MB104 pís-zk3-2010

(A) Teorie: a) ANO b) NE c) ANO d) ANO e) NE f) NE

(1) Vypočteme výběrový průměr $M_1 = 316,\overline{6}$; $M_2 = 226,\overline{6}$

výběrový rozptyl $S_1^2 = 6946,7$; $S_2^2 = 3466,7$

Uvažujeme $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, proto využijeme dvouvýběrový t-test

$$S_*^2 = \frac{5 \cdot S_1^2 + 5 \cdot S_2^2}{10} = 5206,\overline{7} \; ; \; S_* \doteq 72,16$$

Testujeme $H_0: \mu_1 = \mu_2$ oproti $H_1: \mu_1 > \mu_2$

$$I = \left(M_1 - M_2 - S_* \sqrt{\tfrac{1}{m} + \tfrac{1}{n}}\, t_{0,95}(10) ; \infty \right) = \left(90 - 72,16 \sqrt{\tfrac{1}{3}} \cdot 1,8125 ; \infty\right) = (14,49 ; \infty)$$

Protože $0 \notin I$, H_0 zamítáme, „muži mají vyšší platy".

(2) Vypočteme distribuční funkci pro $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 3$:

$$F(x,y,z) = c \int_0^z \int_0^y \int_0^x (\alpha + \beta + \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma = c \left(\iiint \alpha \, d\alpha d\beta d\gamma + \iiint \beta \, d\alpha d\beta d\gamma + \iiint \gamma \, d\alpha d\beta d\gamma \right)$$

$$= c \left(\frac{x^2}{2} yz + x \frac{y^2}{2} z + xy \frac{z^2}{2} \right) = \frac{c}{2} xyz (x + y + z) = c \cdot \frac{xyz}{2}(x+y+z)$$

Určíme c tak aby $F(1,2,3) = 1$: $\frac{c}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 1 \iff c = \frac{1}{18}$.

$$P\left(0 \le X \le \tfrac{1}{2}, 0 \le Y \le \tfrac{1}{3}, 0 \le Z \le \tfrac{1}{4}\right) = F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}\right) = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{13}{12}.$$

$F(x,y,z) = 0$ pro $x,y,z < 0$; $F(x,y,z) = 0$ pokud $x<0$ nebo $y<0$ nebo $z<0$.

$F(x,y,z) = \frac{1}{36} yz(1+y+z)$ pro $x \ge 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 3$;

$= \frac{1}{18} z(3+z)$ $\quad x \ge 1, y \ge 2, 0 \le z \le 3$

$= \frac{1}{18} xz(2+x+z)$ $\quad 0 \le x \le 1, y \ge 2, 0 \le z \le 3$

$= \frac{1}{12} xy(3+x+y)$ $\quad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, z \ge 3$

$= \frac{1}{6} x(5+x)$ $\quad 0 \le x \le 1, y \ge 2, z \ge 3$

$= \frac{1}{12} y(4+y)$ $\quad x \ge 1, 0 \le y \le 2, z \ge 3$

(3) Homomorfismus grup $f: (\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{Z},+)$; $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\forall x,y \in \mathbb{Z}$

a) ANO $3(x+y) = 3 \cdot x + 3 \cdot y$; b) NE $3+x+y \ne 3+x+3+y$

c) NE $(x+y)^3 \ne x^3 + y^3$ d) NE $1 \ne 1+1$ e) ANO $0 = 0+0$

(4) a) $(x+3)(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i)^2$

b) $(x+3)(x^2 - x + \frac{3}{4})^2$

$(\mathbb{Z}_{24},+) \to (\mathbb{Z}_{15},+)$: řád obrazu musí dělit řád vzoru, zároveň řád prvku dělí řád grupy.

Proto $[1]_{24} \mapsto [a]_{15}$ a řádu r, kde $r | 24 \wedge r | 15 \Rightarrow r | 3$

Tedy $[1] \mapsto [0], [1] \mapsto [5], [1] \mapsto [10]$

$(\mathbb{Z}_{15},+) \to (\mathbb{Z}_{24},+)$: $[1] \mapsto [0], [1] \mapsto [8], [1] \mapsto [16]$

M5104 pís-[illegible]-2010

(B) Teorie: a) NE b) NE c) NE d) ANO e) ANO f) ANO

(1) Zajímá nás to $P(S \leq 0{,}2)$, je-li náhodný výběr z rozdělení $N(10;\ 0{,}0437)$.

$$P(S \leq 0{,}2) = P(S^2 \leq 0{,}04) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq (n-1)\,\frac{0{,}04}{\sigma^2}\right) =$$

$$= F_{\chi^2(n-1)}\left((n-1)\frac{0{,}04}{\sigma^2}\right) = F\left(\frac{20\cdot 0{,}04}{0{,}0437}\right) = F_{\chi^2(20)}(10{,}85) \overset{\text{tab.}}{=} 0{,}05.$$

Pravděpodobnost přijetí dodávky je 5%

4 výrobky v testu: analogicky ... $F_{\chi^2(3)}\left(3\cdot\frac{0{,}04}{\sigma^2}\right) = F(1{,}628)$.

Interpolace: Určíme a tak, aby $a\cdot 0{,}584 + (1-a)\cdot 2{,}37 = 1{,}628$

$2{,}37 - 1{,}628 = a(2{,}37 - 0{,}584)$

$a = 0{,}415$

Odkud $F(1{,}628) \approx 0{,}415\cdot 0{,}1 + 0{,}585\cdot 0{,}5 = 0{,}334$.

Pokud se testují pouze 4 výrobky, je P přijetí dodávky asi 33%

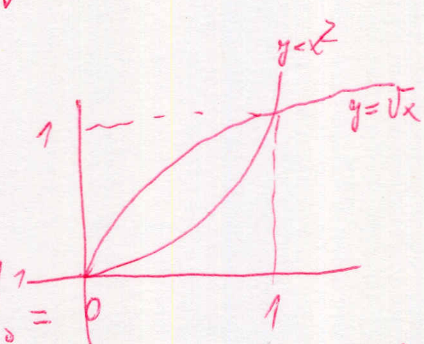
(2) Hustota $f(x,y) = c(x+y^2)$

$$1 = \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} c(x+y^2)\,dy\,dx = c\cdot\int_0^1 \left[xy + \frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= c\int_0^1 \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^3 - \frac{x^6}{3}\,dx = c\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^7}{21}\right]_0^1 =$$

$$= c\cdot\frac{33}{140} \Rightarrow c = \frac{140}{33}$$

(lze též počítat v opačném pořadí integrace stejně jako v D2)



$EX = (EX, EY)$, kde $EX = \frac{13}{22}$, $EY = \frac{175}{297}$ (viz D2)

Pozn: úloha je stejná jako D2, prohodíme-li role x, y

(3) Homomorfismy $(\mathbb{C}^*,\cdot) \to (\mathbb{R}^*,\cdot)$ $\quad f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y)\ \ \forall x,y\in\mathbb{C}^*$

a) NE $3|x\cdot y| \neq 3|x|\cdot 3|y|$ b) NE $3+|xy| \neq (3+|x|)\cdot(3+|y|)$ c) ANO $|xy|^3 = |x|^3\cdot|y|^3$

d) ANO $1 = 1\cdot 1$ e) ANO $\frac{1}{|xy|} = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{|y|}$.

$(\mathbb{Z}_{21},+) \to (\mathbb{Z}_{15},+)$: generátor $[1]_{21}$ musí jít na prvek řádu r, kde $r|21 \wedge r|15$.

$[1]\mapsto[0]$, $[1]\mapsto[5]$, $[1]\mapsto[10]$

$\mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{21}$: $[1]\mapsto[0]$, $[1]\mapsto[7]$, $[1]\mapsto[14]$

(4) $x^2+2x-35 = (x+7)\cdot(x-5)$, proto $f = (x+7)^2(x-5)$, $g = (x+7)(x-5)^2$

$h = \frac{1}{12}f - \frac{1}{12}g$

(C) Teorie: a) ANO b) NE c) ANO d) NE e) NE f) NE

(1) Vše stejně jako (A1), pouze konstruujeme oboustranný interval spolehlivosti:

$$I = \left(M_1 - M_2 - S_* \sqrt{\tfrac{1}{m}+\tfrac{1}{n}}\, t_{0,975}(10) \,;\, M_1 - M_2 + S_* \sqrt{\tfrac{1}{m}+\tfrac{1}{n}}\, t_{0,975}(10) \right) =$$
$$= (-2{,}826;\ 182{,}826)$$

$0 \in I$, proto hypotézu $H_0: \mu_1 = \mu_2$ nezamítáme.

(2) Podobně jako (A2):

$F(x,y,z) = C \cdot \frac{xyz}{2}(x+y+z)$ pro $0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 1$

Dosazením do $F(3,2,1) = 1$ určíme $C = \frac{1}{18}$. ; $P(0 \le X \le \frac{1}{2}, 0 \le Y \le \frac{1}{3}, 0 \le Z \le \frac{1}{4}) =$
$= F(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{13}{12}$.

Obdobně jako v A2 získáme kompletní předpis distribuční funkce:

např.: $F(x,y,z) = \frac{1}{36} xy(x+y+1)$ pro $0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2,\ z \ge 1$.

...

(3) Viz (A3)

(4) a) $(x+1)(x-2-\frac{3}{2}i)^2$

b) $(x+1)(x^2-4x+\frac{25}{4})^2$

D

Teorie: a) NE b) NE c) NE d) ANO e) ANO f) ANO

1 Viz B1 $P(S \leq 2) = \dots = F_{\chi^2(20)}\left(\frac{20 \cdot 0{,}04}{0{,}0255}\right) = F(31{,}373) \simeq 0{,}95$

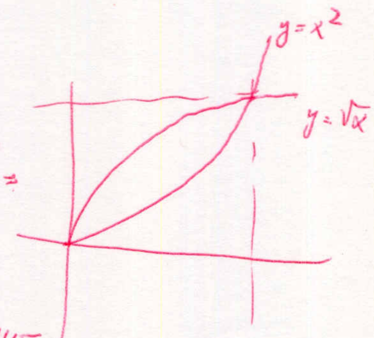
4 výrobky v testu: $\dots = F_{\chi^2(3)}\left(\frac{3 \cdot 0{,}04}{0{,}0255}\right) = F(4{,}706)$

Interpolace: hledáme a tak, aby $a \cdot 2{,}37 + (1-a)\,6{,}25 = 4{,}706$

$a = 0{,}39$

Odtud $F(4{,}706) \approx 0{,}39 \cdot 0{,}5 + 0{,}61 \cdot 0{,}9 = 0{,}744$

2 Hustota $f(x,y) = c\,(x^2+y)$



$1 = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} c\,(x^2+y)\,dy\,dx = c \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$

$= c \int_0^1 x^{\frac{5}{2}} + \frac{x}{2} - x^4 - \frac{x^4}{2}\,dx = c\left[\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^5}{10}\right]_0^1 =$

$= c \cdot \frac{33}{140}$, odtud $c = \frac{140}{33}$

$EX = (EX, EY)$, kde $EX = c \cdot \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\,(x^2+y)\,dy\,dx = \frac{145}{294}$

$EY = c \cdot \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} y\,(x^2+y)\,dx\,dy = \frac{13}{22}$

3 Homomorfismy $(\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ – viz B3

$(\mathbb{Z}_{28}, +) \to (\mathbb{Z}_{16}, +)$: generátor $[1]_{28}$ musíme zobrazit na prvek řádu r, kde $r \mid 28$; přitom $r \mid 16$.

Odtud $r = 1$, $r = 2$ nebo $r = 4$.

$[1] \mapsto [0]$, $[1] \mapsto [8]$, $[1] \mapsto [4]$, $[1] \mapsto [12]$

$\mathbb{Z}_{16} \to \mathbb{Z}_{28}$ $[1] \mapsto [0]$, $[1] \mapsto [14]$, $[1] \mapsto [7]$, $[1] \mapsto [21]$

4 $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$, proto $f = (x-4)^2(x+2)$, $g = (x-4)(x+2)^2$

$h = -\frac{1}{6} \cdot f + \frac{1}{6} \cdot g.$