(A) Teorie: a) ANO b) NE c) ~~NE~~ ANO d) NE e) NE f) NE

(1) $X_n \sim Bi(n; 0{,}1)$

$$0{,}9 = P(X_n \geq 50) = 1 - P(X_n < 50) \iff 0{,}1 = P(X_n < 50) =$$

$$= P\Big(\underbrace{\frac{X_n - n\cdot 0{,}9}{\sqrt{n\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}}}_{\approx N(0,1)} < \frac{50 - n\cdot 0{,}9}{\sqrt{n\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}}\Big) = \Phi\Big(\frac{50 - n\cdot 0{,}9}{\sqrt{n\cdot 0{,}09}}\Big)$$

$$\iff \frac{50 - n\cdot 0{,}9}{0{,}3\cdot\sqrt{n}} = -1{,}3 \iff 0{,}9n - 0{,}39\sqrt{n} - 50 = 0$$

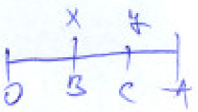
kvadr. rovnice pro $k = \sqrt{n}$, kladný kořen $\sqrt{n} \doteq \cancel{7{,}68} \Rightarrow n \geq 58{,}88$

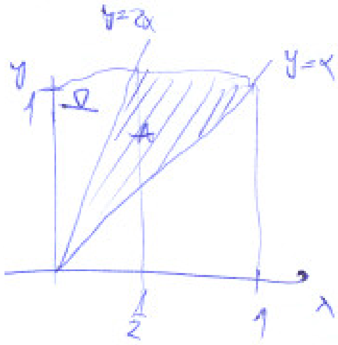
Musí vzít alespoň 59 konzerv.

(2) $x = |OB|,\ y = |OC|,\ x < y \leq 1.$

$|BC| = y - x < |OB| = x$

$\iff y < 2x$





$\mu(A) = \frac{1}{4},\ \mu(\Omega) = \frac{1}{2}$

$\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{1}{2}$ Hledaná pravděpodobnost je rovna $\frac{1}{2}$.

(3) a) nejde o zobrazení - např. $([0],[0]) \mapsto [0]$
$([3],[5]) \mapsto [8]$

b) zobrazení ano, homomorfismus ano, izo - NE, jádro $\ker g = \{[0],[4]\}$

c) zobrazení ANO (není co zkoumat)

homomorfismus ANO $h(s\circ t) = h(s)\circ h(t) = (2,3)\circ s\circ(2,3)\circ(2,3)\circ t\circ(2,3)$
$\overset{\parallel}{(2,3)\circ s\circ t\circ(2,3)}$

izomorfismus ~~ANO~~ NE ($\Sigma_4 \cong \Sigma_4$ nejsou bijekce), ker $h = \{id\}$

(4) Dvojnásobný kořen $3+5i \Rightarrow$ faktor $\varphi(x) = (x-3-5i)^2(x-3+5i)^2 = (x^2-6x+34)^2$
$= x^4 - 12x^3 + 104x^2 - 408x + 1156$

Po vydělení dostaneme polynom x^3+2x^2+x+2 s rac. kořenem -2 a dvěma komplexními kořeny $\pm i$.

Rozklady $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$: $(x+2)(x^2+1)(x^2-6x+34)^2$, $\mathbb{C}$: $(x+2)(x^2+1)(x-3-5i)^2(x-3+5i)^2$

(B) Teorie: a) NE b) ANO c) ANO d) ANO e) ANO f) ANO   pis-224 - MB104 2010

(1) $X_n \sim Bi\left(n; \frac{1}{26}\right)$.

$0{,}95 = P(X_n \geq 5) \Leftrightarrow 0{,}05 = 1 - P(X_n \geq 5) = P(X_n < 5) =$

$= P\left(\frac{X_n - n\cdot\frac{1}{26}}{\sqrt{n\frac{1}{26}\cdot\frac{25}{26}}} < \frac{5 - n\cdot\frac{1}{26}}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{26}\cdot\frac{25}{26}}}\right) =$

$N(0,1)$

$= \Phi\left(\frac{5 - \frac{n}{26}}{\frac{1}{26}\cdot\sqrt{25n}}\right) = \Phi\left(\frac{130 - n}{5\sqrt{n}}\right)$

$\overset{\text{tab.}}{\Leftrightarrow} 0{,}95 = \Phi\left(-\frac{130-n}{5\sqrt{n}}\right) \Leftrightarrow -\frac{130-n}{5\sqrt{n}} = 1{,}65$

$\Leftrightarrow n - 8{,}25\sqrt{n} - 130 = 0 \Leftrightarrow$ subst. $k = \sqrt{n}$, kvadr. rovnice

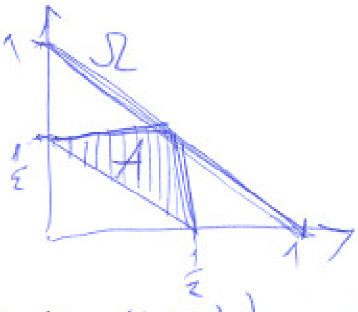
$k = 16{,}25 \Leftrightarrow n = 16{,}25^2 = 264{,}0625$.

Musí si koupit alespoň 265 jogurtů.

(2) Označme díly úsečky $x, y, 1-x-y$ $(x+y \leq 1)$

Podmínky na Δ: $0 \leq x < \frac{1}{2}$, $0 \leq y < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x+y$

Hledaná pravděpodobnost je $\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}$.



(3) a) zobrazení ANO (ověří se $\begin{matrix} a_1 \equiv a_2 (3) \\ b_1 \equiv b_2 (5) \end{matrix} \Rightarrow 10a_1 + 6b_1 \equiv 10a_2 + 6b_2 (15)$)

homomorfismus ANO
izomorfismus ANO

b) je to izomorfismus: $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ je tzv. primitivní 6-tá odmocnina z 1.

c) zobrazení ANO (zde není co zkoumat)
homomorfismus: NE (muselo by platit $h(s \circ t) = h(s) \circ h(t) = s^2 \circ t^2$
$(s\circ t)^2 = s \circ t \circ s \circ t$

– neplatí např. pro $s = (1,2)$, $t = (1,3)$)

(4) Dvojnásobný kořen $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow$ polynom je dělitelný polynomem $\left(x + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2\left(x + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 =$

$= (x^2 + 3x + 3)^2 = x^4 + 6x^3 + 15x^2 + 18x + 9$.

Po vydělení získáme polynom $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$ s rac. kořenem 3.

Po dalším vydělení (nebo ověřování kořenů) získáme z dalších (dělení 3 a 3 rdo) kořen 3. Rozklady: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$: $(x^2+3x+3)^2 \cdot (x-3)^3$, $\mathbb{C}$: $(x-3)^3 \cdot \varphi(x)$