Příklad (rozdělení $\chi^2(1)$)

Nechť Z má normované normální rozdělení. Určete hustotu transforomované náhodné veličiny $X = Z^2$.

Řešení

Zřejmě je pro $x \leq 0$ distribuční funkce nulová, pro $x > 0$ dostáváme: $F_X(x) = P[Z^2 < x] = P[-\sqrt{x} < Z < \sqrt{x}] =$ ← známe

$$= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dz = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}\, dt$$

x

$\frac{1}{2}$

a derivací podle x dostaneme hustotu

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}\,.$$

$X = Z_1^2 + Z_2^2$

$\Rightarrow$

$X \sim \chi^2(2)$

Rozdělení náhodné veličiny s touto hustotou se nazývá (Pearsonovo) χ^2 rozdělení s jedním stupněm volnosti a značí se

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < \delta\right) \geq 1 - \beta$$

$$P\left(p - \delta < \frac{X_n}{n} < p + \delta\right) =$$

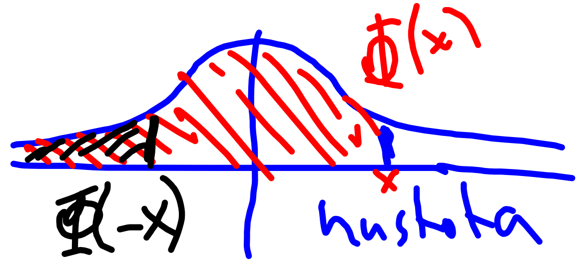
$$= P\left(-\delta < \frac{X_n - np}{n} < \delta\right) =$$

$$= P\left(\frac{-\delta n}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{\delta n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{-\delta\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} < \underbrace{\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}}_{\sim N(0,1)} < \frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\delta n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{-\delta n}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$



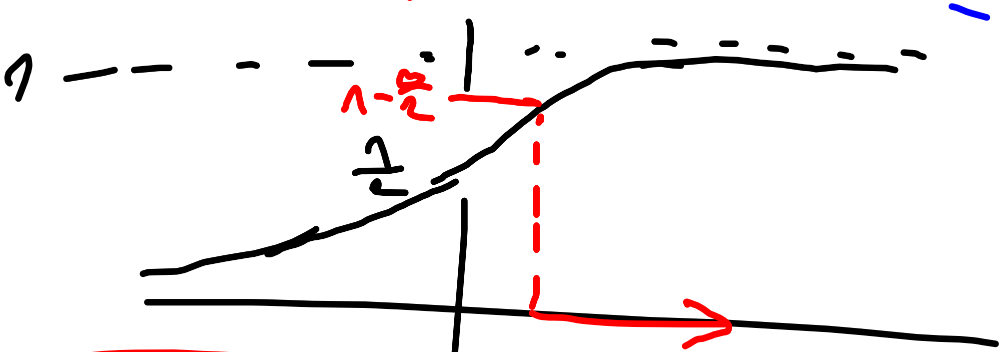
$$= 2\Phi\left(\frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1 \geq 1-\beta$$

$$\iff$$

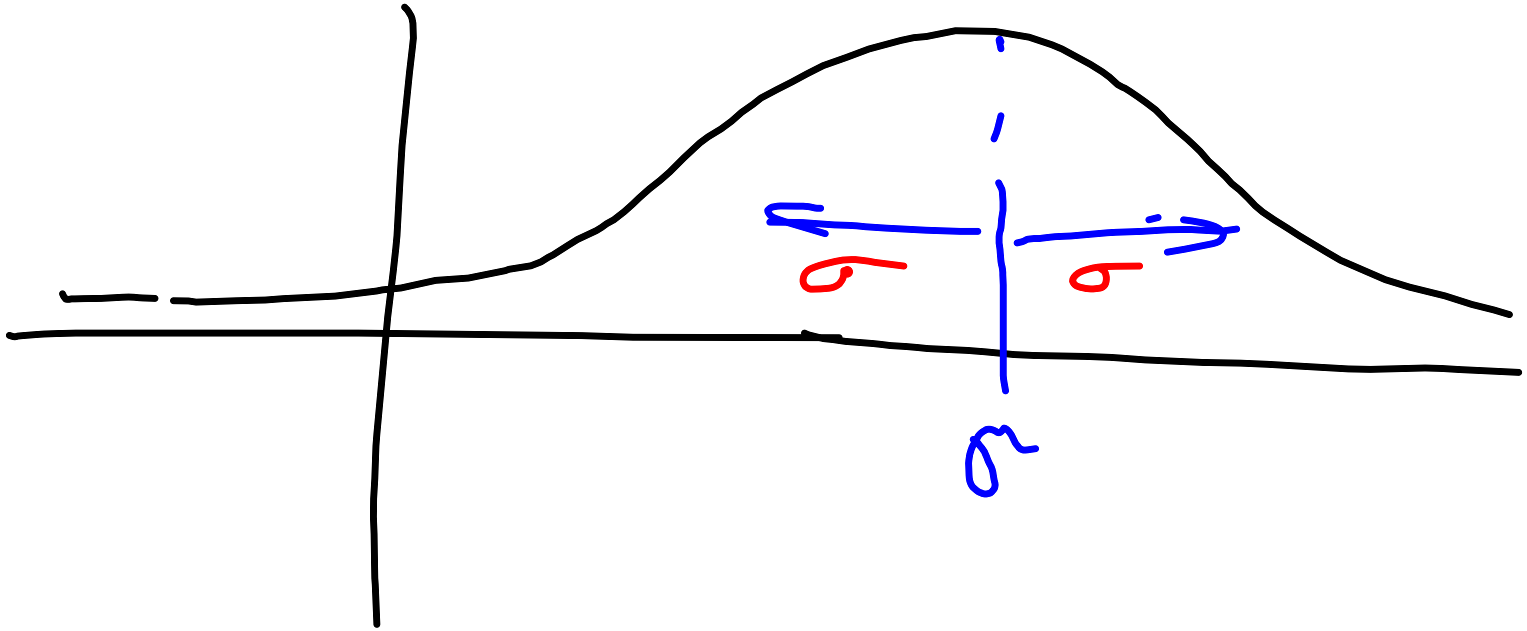
$$\Phi\left(\frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \geq 1 - \frac{\beta}{2}$$

$$\frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}} \geq \Phi^{-1}\left(1-\frac{\beta}{2}\right)$$

kvantilová funkce



$$\boxed{p(1-p) \leq \frac{1}{4}} \implies \frac{\sqrt{n}\cdot\delta}{\sqrt{p(1-p)}} \geq \sqrt{n}\cdot\frac{\delta}{2} \geq z(\beta/2)$$


σ
σ
μ

třední hodnota transforomované náhodné veličiny

Střední hodnotu můžeme přímo vyjádřit také pro funkce $Y = \psi(X)$ náhodné veličiny X. V diskrétním případě můžeme přímo spočíst

$$P(Y = \psi(X) = y_j)$$

$$P(X = \psi^{-1}(y_j))$$

$$E(Y) = \sum_j y_j P(Y = y_j)$$

$$= \sum_j y_j \sum_{\psi(x_i)=y_j} P(X = x_i)$$

$$= \sum_i \psi(x_i) P(X = x_i). = \sum_i \psi(x_i) f_X(x$$

Je tedy $E(\psi(X))$ přímo spočítatelná pomocí pravděpodobnostní funkce f_X.

Příklad

Spočtěme střední hodnotu binomického rozdělení.

Řešení

Pro $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$ je

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} p^{k-1}(1-p)^{n-k} =$$

$k = j+1$

$j = k-1$

$$\binom{n-1}{j}$$

$$= np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!\,j!} p^j (1-p)^{n-1-j} =$$

$$= np\big(p + (1-p)\big)^{n-1} = np.$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

distr. náh. X, Y:

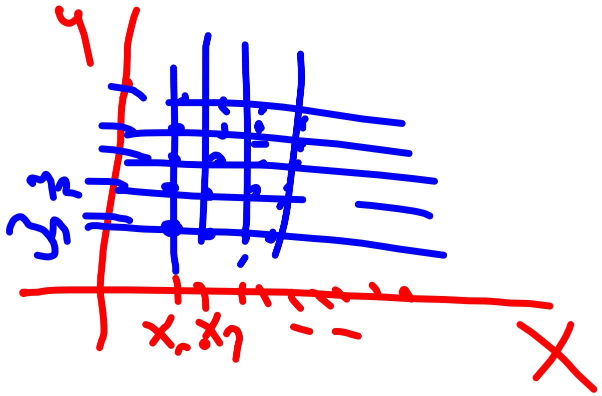
$$E(X+Y) = \sum_{i,j} (x_i + y_j)\, P(X = x_i, Y = y_j) =$$

$$= \sum_i \sum_j x_i P(X = x_i, Y = y_j) + y_j P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$= \sum_i x_i \underline{\sum_j P(X = x_i, Y = y_j)} + \sum_j y_j \underline{\sum_i P(X = x_i, Y = y_j)}$$

$$= \sum_i x_i \cdot P(X = x_i) + \sum_j y_j P(Y = y_j) =$$

$$= E(X) + E(Y)$$



X, Y stoch. nezávislé $\quad P(X=x_i, Y=y_j) =$

$= P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j)$

$$E(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot \underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{\overset{(*)}{=} f_X(x) \cdot f_Y(y)}\, dx\, dy =$$

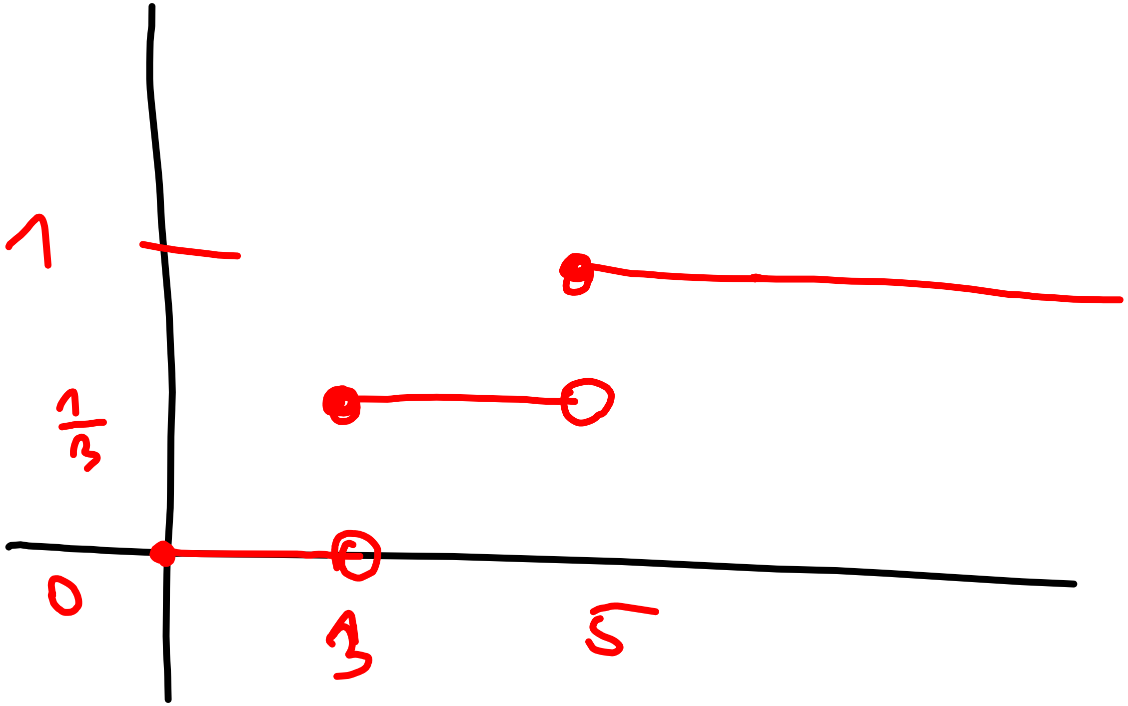
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy\right)}_{E(Y)} dx =$$

$$= E(Y) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx = E(Y) \cdot E(X).$$

$$P(X \le x, Y \le y) \underset{\text{nez.}}{=} P(X \le x) \cdot P(Y \le y)$$

$$\Rightarrow f_{X,Y} = f_X \cdot f_Y$$



$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \geq \alpha\}$$

$$F^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3 \quad F^{-1}\left(\tfrac{1}{3}\right) = 3\ ,\ F^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 5$$

Dk: $D(a+bX) = b^2 \cdot D(X)$

$$D(a+bX) = E\left[\left((a+bX) - E(a+bX)\right)^2\right] =$$

$$= E\left(\left(a+bX - a - bEX\right)^2\right) =$$

$$= E\left(\left(b\cdot(X-EX)\right)^2\right) = E\left(b^2(X-E(X))^2\right) =$$

$$= b^2 \cdot E\left((X-EX)^2\right) = b^2 \cdot DX$$

$$DX = E(X^2) - E(X)^2$$

$$DX = E\left((X-EX)^2\right) = E\left(X^2 - 2X\cdot EX + (EX)^2\right)$$

$$= E\left(X^2 - 2X \cdot EX + (EX)^2\right) =$$

$$= E(X^2) - E(2X \cdot EX) + (EX)^2 =$$

$$= E(X^2) - 2 \cdot EX \cdot E(X) + (EX)^2 =$$

$$= E(X^2) - (EX)^2$$

ad 5. $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2C(X,Y)$

$$D(X+Y) = E\left((X+Y)^2\right) - E(X+Y)^2 =$$

$$= E\left(X^2 + 2XY + Y^2\right) - (EX+EY)^2 =$$

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - (EX)^2 - 2EX\,EY - (EY)^2 =$$

$$= D(X) + D(Y) + 2\underbrace{(EXY - EX\cdot EY)}_{(3) \Rightarrow C(X,Y)}$$

$$= DX + DY + 2C(X,Y)$$

X,Y nez. $\Rightarrow E(XY) = EX\cdot EY \Rightarrow C(X,Y) = 0$

Název: IV 26-13:28 (14 z 14)