$$R(X_i, X_j) = \frac{C(X_i, X_j)}{\sqrt{D(X_i)}\sqrt{D(X_j)}}$$

$$|R(X_i, X_j)| \leq 1$$

$$R(X, X) = \frac{C(X, X)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(X)}} = \frac{D(X)}{D(X)} = 1$$

$$E\left((X-\underline{EX})\cdot(X-EX)^T\right) =$$

vektor

$$= E\left(\underset{\text{n-rozm. sloupec}}{\_\_\_\_\_\_} \cdot \underset{\text{n-rozm. řádek}}{\_\_\_\_\_\_} \right)$$

$$(\cdot \; \_\_\_\_ $$

$$= \left(E\big((X_i - EX_i)(X_j - EX_j)\big) \right)_{i,j} =$$

$$= C(X_i, X_j)$$

Příklad

Jsou-li X a Y náhodné veličiny, nabývající hodnot 0 a 1, pak

$$P(X=1, Y=1) - P(X=1)P(Y=1) = E(XY) - E(X)E(Y) =$$
$$= \mathrm{cov}(X, Y).$$

$$E(X\cdot Y) = 0\cdot P(X=1, Y=0) + 0\cdot P(X=0, Y=1) +$$
$$+ 0\cdot P(X=0, Y=0) + 1\cdot P(X=1, Y=1)$$

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$$

$$\left(E(a+B\cdot X)\right)_i =$$

$$\left(E\left(a_i+(B\cdot X)_i\right)\right) =$$

$$= a_i + E\left((B\cdot X)_i\right) =$$

$$= a_i + E\left(b_{i1}\cdot X_1 + b_{i2}\cdot X_2 + \dots + b_{in}\cdot X_n\right) =$$

$$= a_i + b_{i1}\cdot E(X_1) + \dots b_{in}\cdot E(X_n) \Rightarrow$$

$$X = (X_1, \dots, X_n)$$

$$B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$$

$$a = (a_1, \dots, a_n)$$

$$E(a+B\cdot X) = a + B\cdot E(X)$$

Dále:

$$\operatorname{var}(\underline{a+BX}) = E\Big(\big[(a+BX) - E(a+BX)\big]\big[(a+BX) - E(a+BX)\big]^T\Big) =$$

$$= E\Big(\big((a+BX) - (a+B\cdot E(X))\big)\cdot\big((a+BX) - (a+B\cdot E(X))\big)^T\Big) =$$

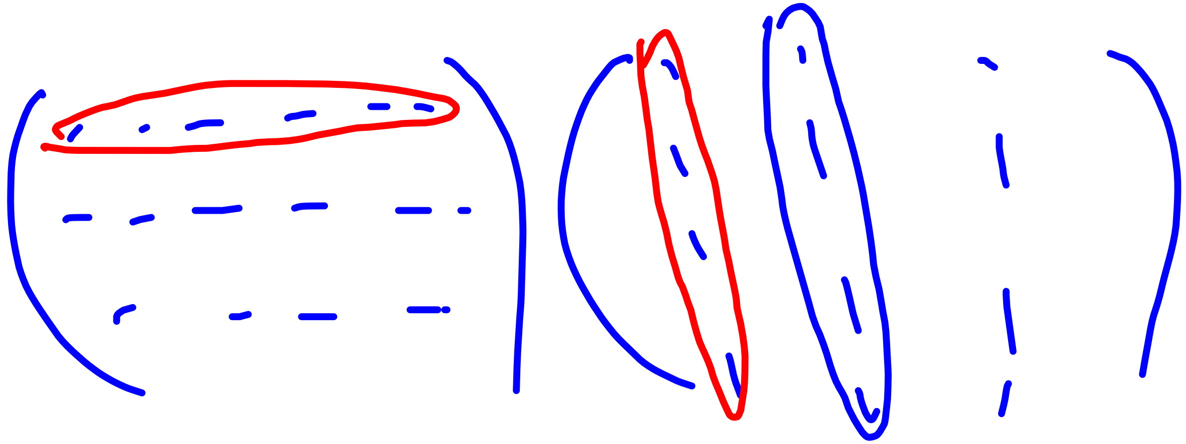
$$= E\Big(B(X - E(X))\cdot \big(B\cdot(X - E(X))\big)^T\Big) =$$

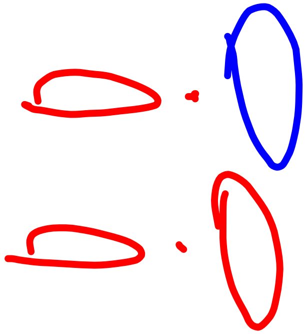
$$= B\cdot E\Big((X - EX)(X - EX)^T\Big)\cdot B^T$$

$$\boxed{(C\cdot D)^T = D^T\cdot C^T}$$

$$= B\cdot \operatorname{var} X \cdot B^T$$

Q .- ortonormální

$Q \cdot Q^T$  $= E$



$= 0$

$= 1$

$$Q^T = Q^{-1}$$

Definice

Nechť jsou složky náhodného vektoru $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ nezávislé a mají rozdělení $Z_i \sim N(0, 1)$ a nechť $a \in \mathbb{R}^m$ je vektor konstant a B konstantní matice typu $m \times n$. Označme dále $V = B \cdot B^T$. Pak řekneme, že náhodný vektor $U = a + B \cdot Z$ má m-**rozměrné normální rozdělení** $N_m(a, V)$.

Pomocí vlastností charakteristik snadno spočítáme, že $E(U) = a, \mathrm{var}(U) = V = BB^T$. Pokud je matice V regulární, pak existuje hustota náhodného vektoru a je tvaru

$$f(u_1, \ldots, u_m) = (2\pi)^{-m/2} |V|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(u-a)^T V^{-1}(u-a)\right).$$

$$f(u_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_1} \cdot e^{-\frac{(u_1 - a_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$\boxed{\sigma_1 = \sqrt{C(X_1, X_1)}}$$

Základní statistiky

Definice

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr. Statistiku

$$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

nazýváme **výběrový průměr**, statistiku

$$D(X) = E\left(\left(X - \overset{M}{EX}\right)^2\right)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2$$

výběrový rozptyl a statistiku $S = \sqrt{S^2}$ **výběrová směrodatná odchylka**. Analogicky se definují i výběrová kovariance, příp. výběrový korelační koeficient pro dvourozměrný náhodný výběr.

Věta

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr rozsahu n z rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 . Pak platí: $\Rightarrow$ stoch. nez.

- $E(M) = \mu$,
- $D(M) = \mathrm{var}(M) = \sigma^2/n$,
- $E(S^2) = \sigma^2$.

$\Rightarrow D(X_1 + \ldots + X_n) = D(X_1) + \ldots + D(X_n)$

$$E(M) = E\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\right) =$$

$$= \frac{1}{n} E(X_1 + \ldots + X_n) = \frac{1}{n}\left(E(X_1) + \ldots + E(X_n)\right) =$$

$$= \frac{1}{n}(\mu + \mu + \ldots + \mu) = \mu$$

$$D(M) = D\left(\frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)\right) = \frac{1}{n^2} D(X_1 + \ldots + X_n) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \left(D(X_1) + \ldots + D(X_n)\right) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2$$

nadno se odvodí, že platí

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-M)^2+n(M-\mu)^2.$$

$$\sum (X_i-\mu)^2 = \sum X_i^2 - 2\mu\sum X_i + \sum \mu^2 =$$

$$= \cancel{\sum X_i^2} - \underline{\cancel{2\mu\cdot}\sum X_i} + \cancel{n\cdot\mu^2}$$

$$? \; \|$$

$$\sum (X_i-\underline{M})^2 + n(M-\mu)^2 = \cancel{\sum X_i^2} - \underline{\cancel{2M\sum X_i}} + \cancel{n\cdot M^2} - \cancel{2M\mu n} + \cancel{n\cdot\mu^2}$$

$$2M^2 n \qquad nM^2$$

$$\sum X_i = n\cdot M$$

Věta

- M a S^2 jsou nezávislé náhodné veličiny.
- $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, a tedy $U = (M-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$.
- $K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$.
- $\sum(X_i-\mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$.
- $T = (M-\mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$.

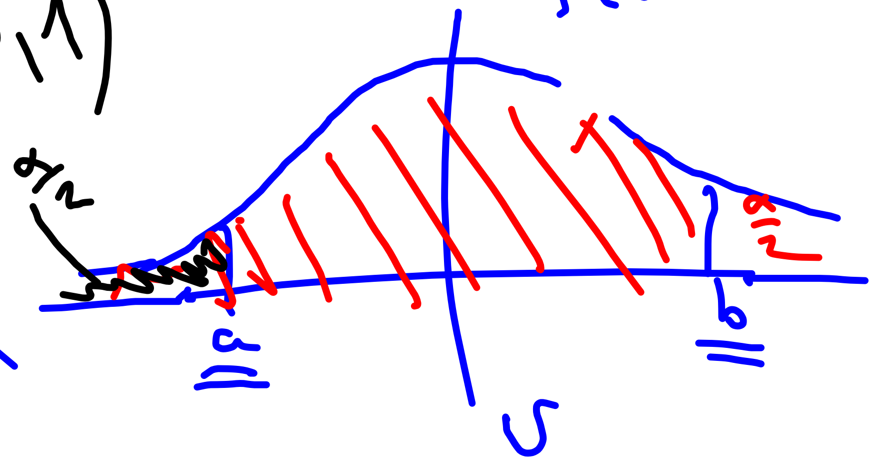
$$K = \cancel{(n-1)} \cdot \frac{1}{\cancel{n-1}} \sum (X_i - M)^2 \cdot \frac{1}{\sigma^2} =$$

$$= \sum (X_i - M)^2 / \sigma^2$$

$$M = \frac{1}{n}\cdot\sum X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$U = \frac{M-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$P(U<b) = 1-\frac{\alpha}{2}$



$$P\left(|U| < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

%

$$P(a<U<b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Obráceně: ? u:

$$P(-u<U<u) = 1-\alpha$$

často $\alpha = 0{,}05$

$$P\left(|U| < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$|U| < u_{1-\frac{\alpha}{2}} \iff \left| \frac{M-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right| < u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\iff \underline{-u_{1-\frac{\alpha}{2}}} < \frac{M-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$u_{\frac{\alpha}{2}} =$$

$$\iff -\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} < M-\mu < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\iff M-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} < \mu < M+\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$