Věta

Je-li posloupnost T_n odhadů parametru θ asymptoticky nestranná a platí-li $\lim_{n\to\infty} D(T_n) = 0$, pak T_n je konzistentním odhadem θ.

Důkaz.

Buď $\epsilon > 0$ libovolné. Z Čebyševovy nerovnosti máme $P(|T_n - E(T_n)| < \epsilon/2) \geq 1 - D(T_n)/(\epsilon/2)^2$. Zároveň pro dostatečně velké n máme $|E(T_n) - \theta| < \epsilon/2$. Proto (pro velká n)

$$P(|T_n - \theta| < \epsilon) \geq P(|T_n - E(T_n)| < \epsilon/2, \cancel{|E(T_n) - \theta| < \epsilon/2}) =$$
$$= P(|T_n - E(T_n)| < \epsilon/2),$$

která konverguje k 1, což znamená, že T_n konverguje podle pravděpodobnosti k θ . $\square$

$|x+y| \leq |x| + |y|$

Poznámka

Odpověď na otázku z minulé přednášky je, že výběrová směrodatná odchylka S **není** nestranným odhadem směrodatné odchylky σ. Kdyby totiž $E(S) = \sigma$, pak by $D(S) = E(S^2) - E(S)^2 = \sigma^2 - \sigma^2 = 0$, což by znamenalo, že S je konstanta, a to je spor, protože rozptyl S je nenulový.

Poznámka

Jak jsme viděli dříve, není statistika $s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2$ náhodného výběru z normálního rozdělení nestranným odhadem rozptylu σ^2 – je totiž $E(s_n^2) = E(\frac{n-1}{n}S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$. Zřejmě je ale $\lim_{n\to\infty} E(s_n^2) = \sigma^2$ a protože

$\sigma^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \sigma^2$

$$D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}, \quad \to 0$$

$$D(S^2)$$

$$K = (n-1)\,S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$D(K) = 2(n-1)$$

$$D(S^2) = D\left(\frac{K\sigma^2}{n-1}\right) = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2}\,D(K) =$$

$$= \frac{\sigma^4}{(n-1)^2}\cdot 2(n-1) = \underline{\underline{\frac{2\sigma^4}{(n-1)}}}$$

$X \sim \chi^2(k)$

$E(X) = k$

$D(X) = 2k$

Řešení

Postupně vypočteme: $Z = (0,3; -0,1; 0,2; -0,2; 0,1; 0,2)$, $M = 0,0833$, $S = 0,1941$. Pak jsou krajními body hledaného 95% intervalu spolehlivosti

ovlivníme volbou α

$M \pm \frac{S}{\sqrt{n}} \boxed{t_{1-\alpha/2}(n-1)} = \underline{0,0833} \pm \underline{0,1941} \cdot 2,5706 / \underline{\sqrt{6}}$, tj. $(-0,12; 0,29)$.

Poznamenejme, že snadno odvodíme i míru rizika, se kterou bychom mohli tvrdit, že je $\mu_1 > \mu_2$, tj. že pravé pneumatiky se sjíždějí více než levé. Je to takové číslo α, aby příslušný interval spolehlivosti neobsahoval číslo 0 – v našem případě je $\alpha = 0{,}34$, což je riziko příliš vysoké.

Stanovení kritického oboru na hladině α

Pro statistiku T (*testové kritérium*) stanovíme obor nezamítnutí V jako interval, jehož hraniční body tvoří kvantil $\alpha/2$ a $1-\alpha/2$, odtud je

$$W = (-\infty, F^{-1}(\alpha/2)) \cup (F^{-1}(1-\alpha/2), \infty).$$

distr. funkce

$\left(F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \dots \frac{\alpha}{2}\text{-tý kvantil rozdělení statistiky } T \right)$