$$P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$$

$$X: \Omega \to \mathbb{R}$$

$$P_X((100,200)) = P(X^{-1}((100,200))) =$$

$$= P(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \in (100,200)\}) =:$$

$$= P(100 < X < 200)$$

$$f(x_i) = P(X = x_i)$$

např. $f(100) = P(X = 100) =$

$$= P(\{\omega \in \Omega ; X(\omega) = 100\})$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

např. $F(100) = P(X \leq 100) =$

$$= \sum_{k=0}^{100} f(k)$$

$$\Omega = 2^{\mathbb{N}}$$

$$X(\omega) = |\omega|$$

$$f(x_i) = P(x_{i-1} < X \leq x_i)$$

ad 1) $F(x)$ je neklesající!

$\forall\ a < b \Rightarrow F(a) \leq F(b)$

$F(a) = P(X \leq a)$

$F(b) = P(\underline{X \leq b}) = P(X \leq a) + \underbrace{P(a < X \leq b)}_{\geq 0}$

$$\Rightarrow \underset{\underset{F(a)}{\parallel}}{P(X \leq a)} \leq \underset{\underset{F(b)}{\parallel}}{P(X \leq b)}$$

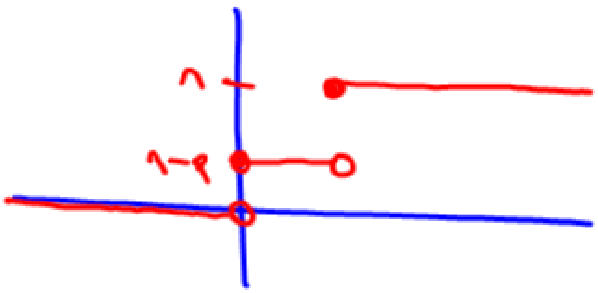
ad 2) $\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} P(X \leq x) = 1$, $-\infty$ anal.

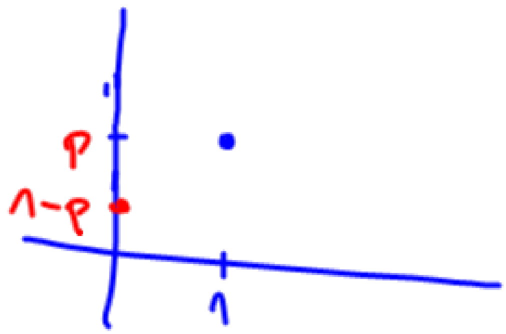
$$P(X_1 \leq x_1 \wedge X_2 \leq x_2) = F(x_1, x_2)$$

$$F_1(x_1) = P(X_1 \leq x_1) = \sum_{i=1}^{n} P(X_1 \leq x_1 \wedge X_2 = x_i)$$

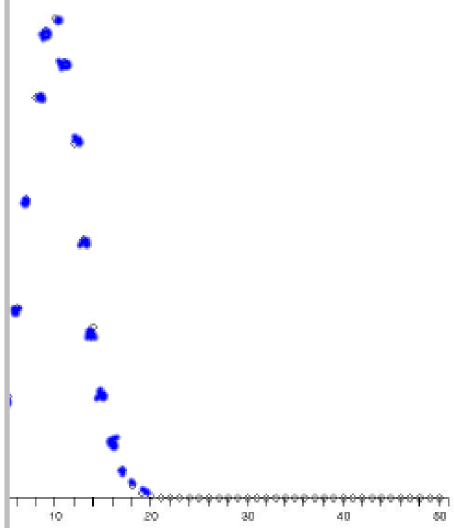
Alternativní rozdělení popisuje pokus se dvěma možnými výsledky, často nazývanýni *zdar*, resp. *nezdar*. Náhodná veličina $X \sim A(p)$ nabývá hodnoty 1 (*zdar*) s pravděpodobností p. Distribuční a pravděpodobnostní funkce jsou tedy tvaru:

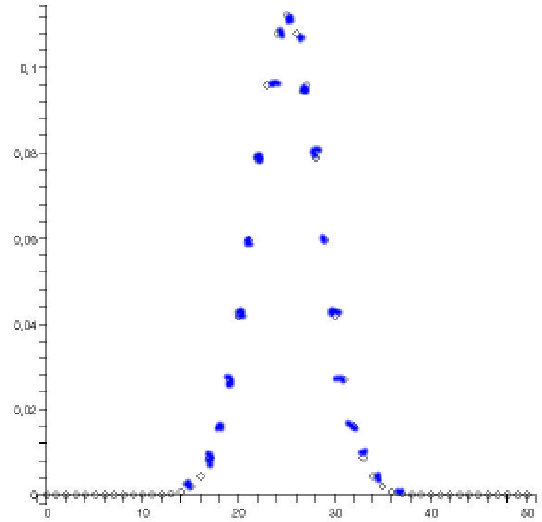
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1-p & 0 \leq t < 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases} \qquad f_X(t) = \begin{cases} p & t = 1 \\ 1-p & t = 0\,. \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

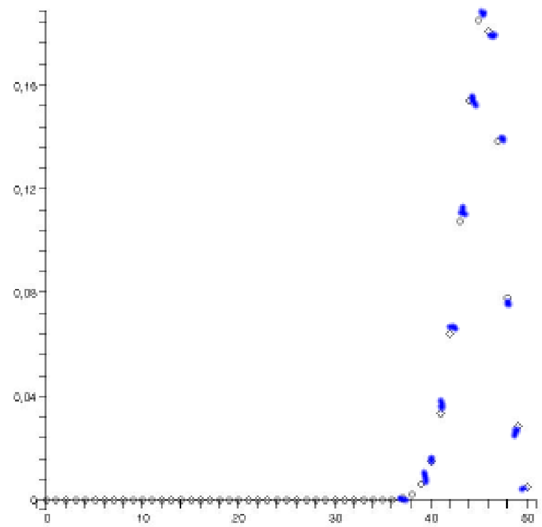




Na obrázku jsou pravděpodobnostní funkce pro $\mathrm{Bi}(50, 0.2)$, $\mathrm{Bi}(50, 0.5)$ a $\mathrm{Bi}(50, 0.9)$. Rozdělení pravděpodobnosti dobře odpovídá intuici, že nejvíce výsledků bude blízko u hodnoty np:







$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \lim_{n\to\infty} \binom{r_n}{k} \frac{(n-1)^{r_n-k}}{n^{r_n}} =$$

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{r_n\cdot(r_n-1)\cdots(r_n-k+1)}{k!} \frac{(n-1)^{r_n-k}}{n^{r_n}} =$$

$$= \frac{1}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{r_n(r_n-1)\dots(r_n-k+1)}{(n-1)^k} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^{r_n} =$$

$$= \frac{1}{k!} \lim_{n\to\infty} \lambda^k \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^{r_n} = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-\frac{r_n}{n}}{r_n}\right)^{r_n} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n - c}{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{n-1} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n-1}}_{=0} = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{n-1} =$$

$$= \lambda$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$\Downarrow$

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}\cdot x} = e^x$$

Pozn.: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Poissonovo rozdělení popisuje náhodné veličiny s pravděpodobnostní funkcí

$$f_X(\cancel{t}\,k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} & \cancel{t}\,k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jak jsme odvodili výše, toto diskrétní rozdělení (rozložené do nekonečně mnoha bodů) dobře aproximuje binomická rozdělení $\mathrm{Bi}(n, \lambda/n)$ pro konstantní $\lambda > 0$ a veliká n.

hustota $f(X) = c = \text{konst.}$ (na (a,b))

$$\int_a^b f(x)\,dx = P(a \le X \le b)$$

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{c = \frac{1}{b-a}}}$$

Exponenciální rozdělení ex(λ) je dalším rozdělením, které je snadno určeno požadovanými vlastnostmi náhodné veličiny.

Předpokládejme, že sledujeme náhodný jev, jehož výskyty v nepřekrývajících se časových intervalech jsou nezávislé. Je-li tedy $P(t)$ pravděpodobnost, že jev nenastane během intervalu délky t, pak nutně $P(t+s) = P(t)P(s)$ pro všechna $t, s > 0$.

Předpokládejme navíc diferencovatelnost funkce P a $P(0) = 1$.

Pak jistě $\ln P(t+s) = \ln P(t) + \ln P(s)$, takže limitním přechodem

$$\lim_{s \to 0_+} \underbrace{\frac{\ln P(t+s) - \ln P(t)}{s}} = (\ln P)'_+(0). := -\lambda$$

Označme si spočtenou derivaci zprava v nule jako $-\lambda \in \mathbb{R}$. Pak tedy pro $P(t)$ platí $\ln P(t) = -\lambda t + C$ a počáteční podmínka dává jediné řešení

$$P(t) = e^{-\lambda \cdot t + C} \; /t=0 \Rightarrow P(t) = e^{-\lambda t}.$$

Všimněme si, že z definice našich objektů vyplývá, že $\lambda > 0$.

Příklad

Nechť má náhodná veličina X rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0, r\rangle$. Určete distribuční funkci a hustotu pravděpodobnosti rozdělení objemu koule o poloměru X.

Řešení

Určeme nejprve distribuční funkci F (pro $0 < d < \frac{4}{3}\pi r^3$)

transformovaná veličina

$$\underline{F(d)} = P\left[\boxed{\frac{4}{3}\pi X^3} \leq d\right] = P\left[X \leq \sqrt[3]{\frac{3d}{4\pi}}\right] = \frac{\sqrt[3]{\frac{3d}{4\pi}}}{r},$$

celkem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \leq 0 \\ \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi r^3}}\, x^{\frac{1}{3}} & \text{pro} \quad 0 < x < \frac{4}{3}\pi r^3 \\ 1 & \text{pro} \quad x \geq \frac{4}{3}\pi r^3 \end{cases}$$

Derivováním pak obdržíme hustotu pravděpodobnosti.

Příklad (rozdělení $\chi^2(1)$)

Nechť Z má normované normální rozdělení. Určete hustotu transformované náhodné veličiny $X = Z^2$.

Řešení

Zřejmě je pro $x \leq 0$ distribuční funkce nulová, pro $x > 0$ dostáváme: $F_X(x) = \underline{P[Z^2 < x]} = P[\underline{-\sqrt{x}} < Z < \sqrt{x}] =$ $\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(\sqrt{x})$

$$= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz = 2\int_{0}^{\cancel{\sqrt{x}}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \, dt$$

hustota

$$\begin{aligned} t &= z^2 \\ dt &= 2z\,dz \Rightarrow \\ dz &= \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

a derivací podle x dostaneme hustotu

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} .$$

Rozdělení náhodné veličiny s touto hustotou se nazývá (Pearsonovo) χ^2 rozdělení s jedním stupněm volnosti a značí se

mIV-9.pdf - Adobe Reader | Bez názvu * - SMART No... | EN