Příklad 65. *V zásilce s 10 výrobky je 8 kvalitních (z nich je 5 první jakosti a 3 jsou druhé jakosti) a 2 zmetky. Ze zásilky vybereme bez vracení 2 výrobky. Náhodná veličina X nechť značí počet vybraných kvalitních výrobků a Y počet vybraných výrobků první jakosti. Určete sdruženou i marginální pravděpodobnostní funkci a rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y stochasticky nezávislé.*

$\binom{10}{2}=45$

$p_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$

$p_X(x) = P(X=x) = \sum_i P(X=x, Y=y_i)$

$\binom{3}{1}\binom{2}{1}$

$\binom{3}{2}$

sdruž. p. fce $p(x,y)$

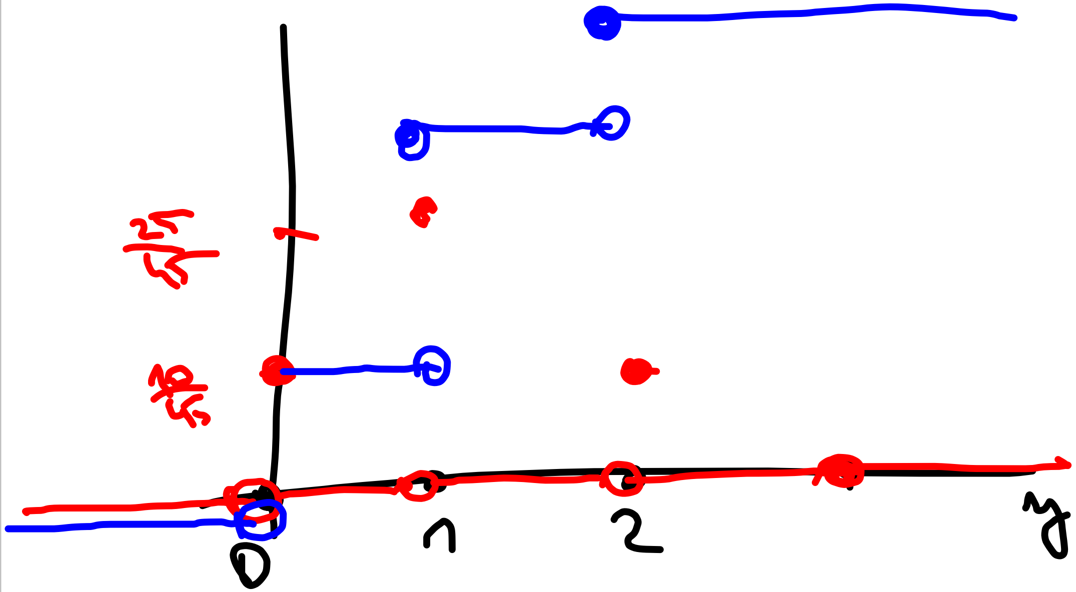
X \ Y	0	1	2	
0	1/45	0	0	1/45
1	6/45	10/45	0	16/45
2	3/45	15/45	10/45	28/45 $P(X=2)$
	10/45	25/45	10/45	

F_Y: $10/45$, $P(Y=1)$ $35/45$, 1

$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)\cdot p_Y(y)$

$p_{X,Y}(0,1) \neq 1/45 \cdot 25/45$

graf. prav. fce f_Y, distr. F_Y:



Příklad 66. *Spojitý náhodný vektor* (X, Y, Z) *má hustotu* $k \cdot xyz$ *pro* $0 < x, y < 1, 0 < z < 3$ *a jinak rovnou nule. Určete konstantu* k *a vypočtěte*

$$P\left(0 < X < \frac{1}{2}, \frac{1}{3} < Y < \frac{2}{3}, 1 < Z < 2\right).$$

$$f_{xyz} = \begin{cases} k \cdot xyz & 0 < x, y < 1,\ 0 \leq z < 3 \\ 0 \end{cases}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f \, dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^1\int_0^3 k \cdot xyz \, dz\,dy\,dx =$$

$$= k \cdot \int_0^1 x\,dx \int_0^1 y\,dy \cdot \int_0^3 z\,dz = k \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^3$$

$$= k \cdot \frac{9}{8} \Rightarrow \underline{\underline{k = \frac{8}{9}}}\ ; \quad P\left(0 < X < \frac{1}{2}, \frac{1}{3} < Y < \frac{2}{3}, 1 < Z < 2\right) =$$

$$= \int_0^{1/2}\int_{1/3}^{2/3}\int_1^2 \frac{8}{9} xyz \, dz\,dy\,dx = \frac{8}{9} \cdot \left[\frac{z^2}{2}\right]_1^2 \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_{1/3}^{2/3} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{\cancel{8}}{9} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\cancel{8}} = \underline{\frac{1}{36}}$$

Příklad 67. *Spojitý náhodný vektor* (X,Y) *má hustotu* $f(x,y) = 24x^2y(1-x)$ *pro* $0 \leq x, y < 1$ *a jinde nulovou. Dokažte, že* X *a* Y *jsou stochasticky nezávislé.*

Spočteme marginální hustoty f_X, f_Y:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^1 24x^2y(1-x)\,dy =$$

$$= 24x^2(1-x)\cdot\int_0^1 y\,dy = 24x^2(1-x)\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 12x^2(1-x)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^1 24x^2y(1-x)\,dx =$$

$$= 24y\int_0^1 x^2(1-x)\,dx = 24y\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right] = 2y$$

stoch. nez. $\Uparrow$

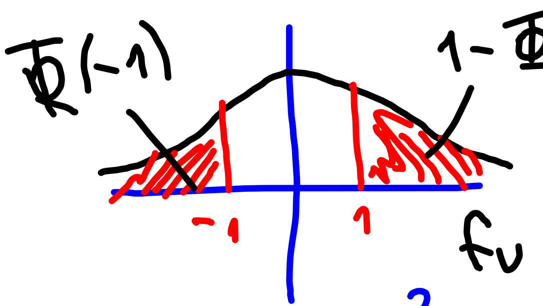
$$f_{X,Y}(x,y) = 24x^2y(1-x) = 12x^2(1-x)\cdot 2y = f_X(x)f_Y(y) \quad \forall\, 0 \leq x, y < 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^1 12x^2(1-x)\,dx = 12\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 1$$

– jde o hustotu

Příklad 68. *Určete pravděpodobnost, že náhodná veličina $X \sim N(20, 16)$ nabude hodnoty:*

- *menší než 16,*
- *větší než 20,*
- *v mezích od 12 do 28,*
- *menší než 12 nebo větší než 28?*



$f_U(x) = f_U(-x)$

$U \sim N(0,1)$

$f_U(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi_U(x) = \int_{-\infty}^{x} f_U(t)$

$\mu + \sigma U \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\parallel$

X

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$X \sim N(20,16)$

$P(X < 16) = P(20 + 4U < 16) = P(U < -1) =$

$= \underline{\Phi_U(-1) = 1 - \Phi_U(1)} \approx 1 - 0{,}84135 =$

$= 0{,}15865$

$$X = 20 + 4U \sim N(20, 16)$$

- $P(X > 20) = P(20 + 4U > 20) = P(4U > 0) = P(U > 0) = \underline{0{,}5}$
- $P(12 < X < 28) = P(12 < 20 + 4U < 28) = P(-2 < U < 2) = \Phi_U(2) - \underbrace{\Phi(-2)}_{1-\Phi(2)} = 2\Phi_U(2) - 1 \approx 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = \underline{0{,}9544}$
- $P(X < 12 \vee X > 28) = 1 - P(12 \le X \le 28) = 1 - \left(P(12 < X < 28) + \underbrace{P(X = 12)}_{0} + \underbrace{P(X = 28)}_{0}\right) = 1 - 0{,}9544 = \underline{0{,}0456}$

Příklad 69. *Na výrobcích měříme délku s přesností ±0,5mm a šířku s přesností ±0,2mm. Náhodná veličina X udává chybu při měření délky a Y chybu při měření šířky. Předpokládejme, že simultánní hustota pravděpodobnosti $\varphi(x, y)$ je uvnitř mezí chyb konstantní (a jinde samozřejmě nulová). Určete*

1. *tuto konstantu,*
2. *obě marginální hustoty pravděpodobnosti,*
3. *simultánní distribuční funkci,*
4. *obě marginální distribuční funkce,*
5. $P(-0,1 < X < 0,1)$,
6. *zda jsou X a Y stochasticky nezávislé.*

$|x| \le 0{,}5 \quad |y| \le 0{,}2$

ad 1. $\varphi(x,y) = \begin{cases} k & \text{pro } -0{,}5 \le x \le 0{,}5,\ -0{,}2 \le y \le 0{,}2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

$$1 = \int_\Omega \varphi(x,y)\,d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_{-0,5}^{0,5}\int_{-0,2}^{0,2} k\,dy\,dx = k\cdot 1\cdot 0{,}4 = 0{,}4k \Rightarrow k = \frac{5}{2}$$

ad2.

$$\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)\,dy = \int_{-0{,}2}^{0{,}2} \frac{5}{2}\,dy = \frac{5}{2}\cdot\frac{4}{10} = 1$$

$$\varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)\,dx = \int_{-0{,}5}^{0{,}5} \frac{5}{2}\,dx = \frac{5}{2}\left[x\right]_{-0{,}5}^{0{,}5} = \frac{5}{2}$$

ad3.

$$F(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{\alpha}\int_{-\infty}^{\beta} \varphi(x,y)\,dy\,dx = \frac{5}{2}\int_{-0{,}5}^{\alpha}\int_{-0{,}2}^{\beta} dy\,dx =$$

$$= \underline{\frac{5}{2}(\alpha+0{,}5)(\beta+0{,}2)}$$ pro $|\alpha| \leq 0{,}5$, $|\beta| \leq 0{,}2$

pro $\alpha < -0{,}5$; $\beta < -0{,}2$: $F(\alpha,\beta) = 0$

$\alpha > 0{,}5$; $\beta > 0{,}2$: $F(\alpha,\beta) = 1$

$\alpha < -0{,}5$; $\beta > -0{,}2$; $F(\alpha,\beta) = 0$

$\alpha > -0{,}5$; $\beta < -0{,}2$; $F(\alpha,\beta) = 0$

ad 4.

$$F_X(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} \varphi_X(x)\,dx = \int_{-0,5}^{\alpha} 1\,dx = (\alpha + 0,5)$$

$|\alpha| \leq 0,5$!

$$F_Y(\beta) = \int_{-\infty}^{\beta} \varphi_Y(y)\,dy = \int_{-0,2}^{\beta} \frac{5}{2}\,dy = \frac{5}{2}(\beta + 0,2)$$

$|\beta| \leq 0,2$

ad 5.

$$P(-0,1 < X < 0,1) = F_X(0,1) - F_X(-0,1) =$$

$$= 0,6 - 0,4 = 0,2$$

ad 6.

$$F_{X,Y}(\alpha,\beta) = \frac{5}{2}(\alpha + 0,5)(\beta + 0,2) \quad \forall\ |\alpha| \leq 0,5,\ |\beta| \leq 0,2$$

$$\| $$

$$F_X(\alpha) \cdot F_Y(\beta) = (\alpha + 0,5) \cdot \frac{5}{2}(\beta + 0,2)$$

pro α, β mimo dané intervaly jsou obě strany nulové

nebo obě strany rovny 1.

Příklad 70. *Mějme náhodnou veličinu X hustoty $f(x) = 2xe^{-x^2}$ pro $x > 0$ (a jinde nulové). Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = X^2$.*

$$F_X(\alpha) = \int_0^{\alpha} 2x e^{-x^2}\,dx, \text{ tj. } P(X<\alpha)$$

$$F_Y(\beta) = P(Y<\beta) = P(X^2<\beta) = P(X<\sqrt{\beta}) =$$

zřejmě stačí uvažovat $\beta>0$.

$$= F_X(\sqrt{\beta}) = \int_0^{\sqrt{\beta}} 2x e^{-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ x=0 \dots t=0 \\ x=\sqrt{\beta} \dots t=\beta \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\beta} e^{-t}\,dt \Rightarrow f_Y(y) = e^{-y}$$

$$F_Y(\beta) = \int_0^{\beta} f(y)\,dy$$

Příklad 71. *Náhodná veličina X má na intervalu $(0, a)$ konstantní hustotu pravděpodobnosti (a jinde nulovou). S využitím vlastností střední hodnoty a rozptylu určete:*

1. $E(2X + 3)$,
2. $E(3X^2 - 2X + 1)$,
3. $D(2X + 3)$,
4. $D(X^2 + 1)$.

ad 1.

$E(2X+3) = 2\cdot EX + 3 =$

$\int_0^a k\,dx = k\cdot a = 1$

$\Rightarrow k = \frac{1}{a}$

$\Rightarrow EX = \int_0^a x\cdot\frac{1}{a}\,dx = \frac{a}{2}$

$E(a + b\cdot X) = a + b\cdot E(X)$

$E(X+Y) = EX + EY$

X, Y nezávislé $\Rightarrow E(X\cdot Y) = EX\cdot EY$

$D(a + b\cdot X) = b^2\cdot DX$

X diskr. $EX = \sum_{x_i} x_i\, p_X(x_i)$

X spoj. $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_X(x)\,dx$

$DX = E((X - EX)^2)$

$= E(X^2) - E(X)^2$

ad 1. $E(2X+3) = 2 \cdot EX + 3 =$

$= a + 3$

---

zbytek příště ...