Příklad 71. *Náhodná veličina X má na intervalu $(0, a)$ konstantní hustotu pravděpodobnosti (a jinde nulovou). S využitím vlastností střední hodnoty a rozptylu určete:*

1. *Momentovou vytvořující funkci náhodné veličiny X,*
2. $E(2X+3)$,
3. $E(3X^2-2X+1)$,
4. $D(2X+3)$,
5. $D(X^2+1)$.

$f_X(t) = \frac{1}{a}$ na $(0,a)$

nulová jinde

ad 1. $M_X(t) = E(e^{t\cdot X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\cdot x} \cdot f_X(x)\, dx =$

$= \int_0^a e^{t\cdot x} \cdot \frac{1}{a}\, dx = \frac{1}{a} \cdot \int_0^a e^{t\cdot x}\, dx = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{t} e^{t\cdot x}\right]_0^a =$

$= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{t} e^{a\cdot t} - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{at}\left(e^{at} - 1\right).$

$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu'_n \frac{t^n}{n!}$

$\mu'_1 = EX,\ \mu'_2 = E(X^2),\ \mu'_3 = E(X^3), \ldots$

$$M_X(t) = \frac{1}{at}\left(e^{at} - 1\right) = \frac{1}{at}\left(\cancel{1} + \frac{at}{1!} + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \dots - \cancel{1}\right) =$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{1!} + \frac{at}{2!} + \frac{a^2t^2}{3!} + \dots$$

$$= \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n t^n}{(n+1)!}}} \Rightarrow \mu'_n = \frac{a^n}{n+1}$$

$$\parallel$$

$$\frac{a^n}{n+1} \cdot \frac{t^n}{n!}$$

$$\Rightarrow EX = \mu'_1 = \underline{\frac{a}{2}}, \quad E(X^2) = \frac{a^2}{3} \quad E(X^4) = \frac{a^4}{5}$$

$$\Rightarrow DX = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \underline{\underline{\frac{a^2}{12}}}$$

ad 2. $E(2X+3) = 2EX + 3 = a + 3$

ad 3. $E(3X^2 - 2X + 1) = 3EX^2 - 2EX + 1 = \underline{a^2 - a + 1}$

ad 4.

$$D(2X+3) - 4DX = \frac{a^2}{3}$$

$$D(a\cdot X + b) = a^2 \cdot D(X)$$

ad 5. $D(X^2+1) = D(X^2) = E(X^4) - (EX^2)^2 =$

$$D(X) = E(X^2) - (EX)^2$$

$$= \frac{a^4}{5} - \left(\frac{a^2}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{a^4}{5} - \frac{a^4}{9} = \frac{4}{45} a^4$$

bez M.V.J.:

$$EX^2 = \int_0^a x^2 \frac{1}{a} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{a^2}{3}$$

$$EX^4 = \int_0^a x^4 \frac{1}{a} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{a^4}{5}$$

Příklad 72. *Náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení (tj. pravděpodobnostní funkci $p(x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$). Určete její momentovou vytvořující funkci, střední hodnotu a rozptyl.*

$x = 0, 1, 2, \dots$ $X \sim Po(\lambda)$

klasicky: $EX = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \dots$

Jinak:

$$M_X(t) = E\left(e^{t \cdot X}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{t \cdot n} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{t} \cdot \lambda\right)^n \cdot \frac{e^{-\lambda}}{n!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(e^t \lambda\right)^n}{n!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{e^t \cdot \lambda} = e^{e^t \cdot \lambda - \lambda} = \underline{\underline{e^{\lambda(e^t - 1)}}}$$

$e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$

$\mu_1' = M_X'(0)$

$\mu_2' = M_X''(0)$

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n' \cdot \frac{t^n}{n!}$$

$$\left(\frac{t^n}{n!}\right)' = \frac{n \cdot t^{n-1}}{n!} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$M_X'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n' \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$M_X'(0) = \mu_1'$$

$$M_X''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \mu_n' \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}$$

$\vdots$

obecně $$M_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} \mu_n' \frac{t^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$M_X^{(k)}(0) = \mu_k'$$

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$M_X'(t) = e^{\lambda\cdot(e^t-1)} \cdot \lambda e^t$$

$$M_X''(t) = e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t \cdot \lambda e^t + e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t$$

$$= \lambda e^t \cdot e^{\lambda(e^t-1)} \cdot (\lambda e^t + 1)$$

EX

$\shortparallel$

$$\mu_1' = M_X'(0) = \underline{\underline{\lambda}}$$

$$EX^2 = \mu_2' = M_X''(0) = \lambda(\lambda+1)$$

$$\Rightarrow DX = \mu_2' - (\mu_1')^2 = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \underline{\underline{\lambda}}$$

Příklad 73. *Diskrétní náhodný vektor* (X_1, X_2) *má simultánní pravděpodobnostní funkci* $\pi(0,-1) = c, \pi(0,0) = \pi(0,1) = \pi(1,-1) = \pi(2,-1) = 0, \pi(1,0) = \pi(\cancel{0}\,1,1) = \pi(2,1) = 2c, \pi(2,0) = 3c$ *a rovnou nule jinde.*
Určete konstantu c a vypočtěte:

1. *kovarianci* $C(X_1, X_2)$, $= E\left((X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)\right)$
2. *korelační koeficient* $R(X_1, X_2)$. $= \dfrac{C(X_1, X_2)}{\sqrt{DX_1 \cdot DX_2}}$

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1	$\pi_1(x_1) = P(X_1 = x_1)$
0	c	0	0	c
1	0	$2c$	$2c$	$4c$
2	0	$3c$	$2c$	$5c$
$\pi_2(x_2)$	c	$5c$	$4c$	$1 = 10c$

$\Rightarrow 10c = 1$

$\Rightarrow c = \frac{1}{10}$

$EX_1 = \sum x_1 \cdot \pi_1(x_1) = 0 \cdot c + 1 \cdot 4c + 2 \cdot 5c = 1{,}4$

$EX_2 = -1 \cdot c + 0 \cdot 5c + 1 \cdot 4c = 0{,}3$

$x_1 \backslash x_2$	-1	0	1
0	$-14c\cdot(-1-3c)$	$14\cdot 3c^2$	$-14c\cdot(1-3c)$
1	$(1-14c)(-1-3c)$	$(1-14c)3c$	$(1-14c)(1-3c)$
2	$(2-14c)(-1-3c)$	$(2-14c)3c$	$(2-14c)(1-3c)$

$(x_1 - EX_1)(x_2 - EX_2)$

$$\sum (x_1 - EX_1)(x_2 - EX_2)\cdot \pi(x_1, x_2)$$

dokončíme v OOcalc

$\pi(0,-1)$

	-1	0	1			
0	0,1	0	0	0,1	EX_1	1,4
1	0	0,2	0,2	0,4	EX_2	0,3
2	0	0,3	0,2	0,5		
	0,1	0,5	0,4	1		

$*$

	-1	0	1
0	1,82	0,42	-0,98
1	0,52	0,12	-0,28
2	-0,78	-0,18	0,42

$\leftarrow (X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)$

0,18	0	0		
0	0,02	-0,06		
0	-0,05	0,08		
			$\sum =$	**0,18**

$\leftarrow (X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)\cdot\pi(x_1,x_2)$

$$C(X_1,X_2) = E\big((X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)\big) =$$
$$= \sum (x_1 - EX_1)(x_2 - EX_2)\cdot \pi(x_1,x_2)$$

Vlastnosti střední hodnoty

a) $E(a) = a$,

b) $E(a + bX) = a + bE(X)$,

c) $E(X - E(X)) = 0$,

d) $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$,

e) Jsou-li náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ stochasticky nezávislé, pak platí $E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$.

$C(X,Y) = E((X - EX)(Y - EY))$

Vlastnosti kovariance

a) $C(a_1, X_2) = C(X_1, a_2) = \underline{C(a_1, a_2)} = 0$,

b) $C(a_1 + \underline{b_1} X_1, a_2 + \underline{b_2} X_2) = b_1 b_2 C(X_1, X_2)$,

c) $C(X, X) = D(X)$,

d) $C(X_1, X_2) = C(X_2, X_1)$,

e) $C(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2)$,

f) $C\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C(X_i, Y_j)$.

Vlastnosti rozptylu

a) $D(a) = 0$,

b) $D(a + bX) = b^2 D(X)$,

c) $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$,

d) $D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} C(X_i, X_j)$ (Jsou-li náhodné veli-

Příklad 74. *Nechť X_1, X_2 stochasticky nezávislé náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením. Určete rozdělení rozdělení transformované náhodné veličiny $Y = 3 + X_1 - 2X_2$ a najděte její dolní kvartil.*

$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

$X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(0,1)$

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

X, Y nezávislé

$X + Y \sim N(\underbrace{\mu_1 + \mu_2}_{E(X+Y)}, \underbrace{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}_{D(X+Y)})$

$\Rightarrow Y \sim N(\underbrace{\mu}_{E(Y)}, \underbrace{\sigma^2}_{D(Y)})$

$0 \quad E(Y) \quad D(Y) = 0$

$E(Y) = 3 + \underbrace{EX_1}_{0} - 2\underbrace{EX_2}_{0} = 3$

$D(Y) = D(X_1) + 4D(X_2) = 5$

$D(a+bX) = b^2 \cdot D(X)$

$Y \sim N(3, 5)$

$$Y \sim N(3, 5)$$

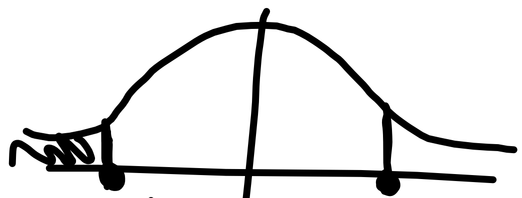
$$U = \frac{Y-3}{\sqrt{5}}$$

$$EU = \frac{1}{\sqrt{5}}(EY - 3) = 0$$

$$DU = \frac{1}{5} DY = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$$

$$U \sim N(0,1)$$

dolní kvartil $U = \dfrac{Y-3}{\sqrt{5}}$



25 % 75 %

$\alpha_{0,25} = -\alpha_{0,75}$

$\alpha_{0,75} = 0{,}67449$

$$\frac{y_{0,25} - 3}{\sqrt{5}} = -0{,}67449$$

$$y_{0,25} = 3 - 0{,}67449 \cdot \sqrt{5}$$

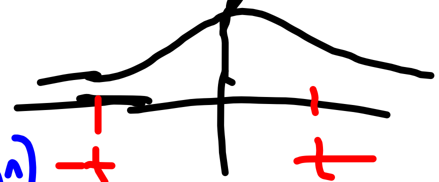
Příklad 75. *Buď* (X, Y) *náhodný vektor, který má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu.*

1. *Určete sdruženou hustotu náhodného vektoru* (X, Y).
2. *Dokažte, že* X *a* Y *nejsou stochasticky nezávislé.*
3. *Určete hustotu sdruženého rozdělení transformovaného vektoru* (R, Φ)*, kde* R *a* Φ *udávají polární souřadnice vektoru* (X, Y).
4. *Určete marginální hustoty náhodných veličin* R *a* Φ *a odvoďte, že jsou nezávislé (a tedy i nekorelované).*
5. *(volitel.) Určete marginální hustoty náhodných veličin* X *a* Y *a jejich střední hodnoty, rozptyly a kovarianci.*

nezávislé

Příklad 76. *Uvažte náhodné veličiny $X \sim N(0,1)$ a α, kde $P(\alpha = 1) = P(\alpha = -1) = 1/2$. Určete:*

1. *rozdělení náhodné veličiny αX,*
2. *kovarianci $C(X, \alpha X)$.*
3. *Ukažte, že X a αX nejsou nezávislé.*



Φ .. distr. f. ci $N(0,1)$

ad 1. $F(t) = P(\alpha \cdot X < t) = \underbrace{\tfrac{1}{2} P(X < t)}_{\alpha = 1} + \underbrace{\tfrac{1}{2} P(X > -t)}_{\alpha = -1} =$

$= \frac{1}{2}\Phi(t) + \frac{1}{2}\Phi(t) = \Phi(t)$

$\Rightarrow \alpha \cdot X \sim N(0,1)$

ad 2. $C(X, \alpha X) = E((X - EX) \cdot (\alpha X - E\alpha X)) =$

$= E(X \cdot \alpha \cdot X) = E(\alpha \cdot X^2) = \underbrace{E\alpha}_{0} \cdot EX^2 = 0$

ad 3. $X, \alpha X$ nejsou nezávislé:

$\forall a, b$:

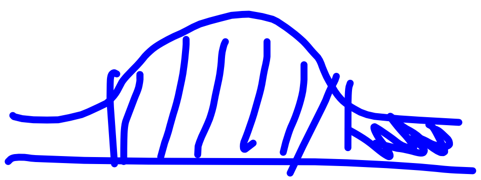
$$P(X \leq a, \alpha X \leq b) = P(X \leq a) \cdot P(\alpha X \leq b)$$

$a = 1,\ b = 1$

$$\frac{1}{2}\Phi(1) + \frac{1}{2}\left(P(X \leq 1, X \geq -1)\right) = \Phi(1) \cdot \Phi(1)$$

$$\frac{1}{2}\Phi(1) + \frac{1}{2}\left(2\Phi(1) - 1\right) \overset{?}{=} \Phi(1) \cdot \Phi(1)$$

$$\frac{1}{2}\left(3\Phi(1) - 1\right) \neq \Phi(1)^2$$



říklad 77. *1. Dokažte Markovovu nerovnost*

$X \geq 0$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}^+$ $\quad P[X > \lambda] < \dfrac{EX}{\lambda}$. $\iff$ $\lambda P[X > \lambda] < EX$

2. Z Markovovy nerovnosti odvoďte Čebyševovu nerovnost.

$$P(|X - EX| > \lambda) < \frac{DX}{\lambda^2}$$

ad 1. spojitá X:

$$\lambda P(X > \lambda) = \lambda \int_{\lambda}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{\lambda}^{\infty} \lambda \cdot f_X(x)\,dx \leq$$

$\lambda \leq x$

$$\leq \int_{\lambda}^{\infty} x \cdot f_X(x) \leq \int_{0}^{\infty} x \cdot f_X(x) = EX$$

ad 2. chceme $P(|X-EX| > \lambda) < \frac{DX}{\lambda^2}$

$DX = E((X-EX)^2)$

do Markovovy nerovnosti dosadíme $X \leftarrow |X-EX|^2$

$$P\left(|X-EX|^2 > \lambda^2\right) < \frac{E((X-EX)^2)}{\lambda^2} = \frac{DX}{\lambda^2}$$

$$\| $$

$$P\left(|X-EX| > \lambda\right)$$

a to je Čebyšev.

Příklad 78. *Mějme nezápornou náhodnou veličinu X se střední hodnotou μ.*

1. *Bez dalších informací o rozdělení X odhadněte $P(X > 3\mu)$.*
2. *Víte-li, že $X \sim \mathrm{Ex}(\frac{1}{\mu})$, vypočtěte $P(X > 3\mu)$.*

Příklad 79. *Určete pravděpodobnost, že při 600 hodech kostkou padne šestka alespoň 75 krát a nejvýše 125 krát*

1. *pomocí Čebyševovy nerovnosti,*
2. *pomocí de Moivre-Laplaceovy věty.*

Příklad 80. *Víme, že v jisté oblasti je 80% domácností vybaveno DVD přehrávačem. S pravděpodobností 95% určete*

1. *rozmezí počtu těch domácností z vylosovaných 900 domácností. které vlastní DVD,*
2. *dolní odhad počtu těch domácností z vylosovaných 900 domácností. které vlastní DVD.*