Příklad 78. *Mějme nezápornou náhodnou veličinu X se střední hodnotou μ.*

1. *Bez dalších informací o rozdělení X odhadněte $P(X > 3\mu)$.*
2. *Víte-li, že $X \sim \mathrm{Ex}(\frac{1}{\mu})$, vypočtěte $P(X > 3\mu)$.*

Markovova nerovnost: $P(X > \lambda) < \frac{EX}{\lambda}$ $(X \geq 0)$

$P(X > \lambda \cdot EX) < \frac{1}{\lambda}$

Čebyšev: $P(|X - EX| \geq \varepsilon) < \frac{DX}{\varepsilon^2}$

$P(|X - EX| \geq \lambda \underbrace{\sqrt{DX}}_{\sigma}) < \frac{1}{\lambda^2}$

ad 1. $P(X > 3\mu) < \frac{1}{3}$

ad 2. $X \sim Ex\left(\frac{1}{\mu}\right)$

Exponenciální rozdělení má hustotu $f_X(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ $\quad t>0$
$Ex(\lambda)$

$= 0$ jinak

$\lambda := \frac{1}{\mu}$.

$$P(X > 3\mu) = 1 - P(X \leq 3\mu) = 1 - F_X(3\mu) =$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{3\mu} f_X(t)\,dt = 1 - \int_0^{3\mu} \frac{1}{\mu} \cdot e^{-\frac{1}{\mu} \cdot t}\,dt =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \text{subst. } u = -\frac{1}{\mu} \cdot t \\ du = -\frac{1}{\mu} \cdot dt \end{array}\right| = 1 - \int_0^{-3} \cancel{\frac{1}{\mu}} \cdot e^{u} \cdot (-\cancel{\mu})\,du =$$

$$= 1 - \int_{-3}^{0} e^{u}\,du = 1 - \left[e^{u}\right]_{-3}^{0} = 1 - (1 - e^{-3}) =$$
$$= e^{-3} \approx 0{,}0497$$

Příklad 79. *Určete pravděpodobnost, že při 600 hodech kostkou padne šestka alespoň 75 krát a nejvýše 125 krát*

1. *pomocí Čebyševovy nerovnosti,*
2. *pomocí de Moivre-Laplaceovy věty.*

Podmínky:

$np(1-p) > 9$

$\frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1}$

$X \sim Bi(600; \frac{1}{6})$

$EX = n \cdot p = 100$

$DX = n \cdot p(1-p) = \frac{500}{6} = \frac{250}{3}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{X - EX}{\sqrt{DX}} \sim N(0,1)$

k-krát padne 6: $\binom{600}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^k$

Cíl: aproximuj $\sum_{k=75}^{125} \binom{600}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^k$

ad 1. $P(|X - EX| \le \lambda \cdot \sigma) \ge \frac{1}{\lambda^2}$

$\le \lambda \quad) \ge \frac{DX}{\lambda^2}$

$P(75 \le X \le 125) =$

$P(-25 \le X - \underset{\substack{\shortparallel \\ EX}}{100} \le 25) = P(|X - \underset{100}{EX}| \le 25)$

$\ge \frac{250/3}{25^2} = \underline{\underline{\frac{10}{75}}}$

ad 2. $X \sim Bi(600; \frac{1}{6})$

$U = \frac{X - 600 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} \sim N(0,1)$

$P(75 \le X \le 125) =$

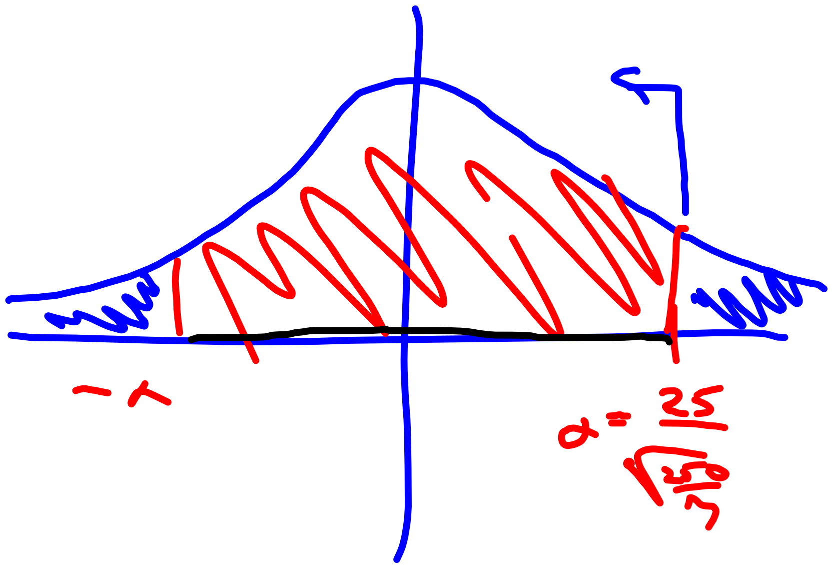
$= P\left(\frac{75 - 100}{\sqrt{\frac{250}{3}}} \le U \le \frac{125 - 100}{\sqrt{\frac{250}{3}}}\right) =$

$= P\left(\frac{-25}{\sqrt{\frac{250}{3}}} \le U \le \frac{25}{\sqrt{\frac{250}{3}}}\right) =$

$= P\left(|U| \le \frac{25}{\sqrt{\frac{250}{3}}}\right)$

$$= 2\,\Phi\left(\frac{25}{\sqrt{\frac{250}{3}}}\right) - 1 =$$

$$\approx \underline{\underline{0{,}99384}}$$



$$F(\alpha) - F(-\alpha)$$

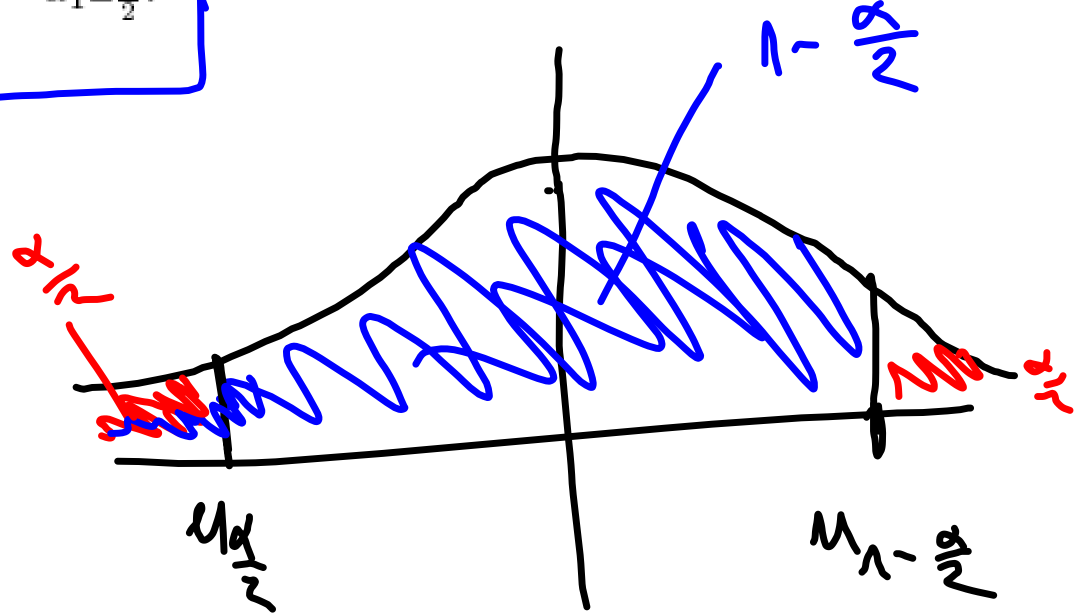
$$= F(\alpha) - (1 - F(\alpha))$$

$$= 2F(\alpha) - 1$$

$$P(|U| < \alpha) = 2F(\alpha) - 1$$

Příklad 80. *Dokažte, že pro kvantily normovaného normálního rozdělení platí vztah*

$$\boxed{-u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{1-\frac{\alpha}{2}}.}$$



$$P\left(U < -u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(-U > u_{\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

Z normovaná normální

$$= P\left(Z > u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - P\left(Z < u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \rightarrow -u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Příklad 81. *Víme, že v jisté oblasti je 80% domácností vybaveno DVD přehrávačem. S pravděpodobností 95% určete*

1. *rozmezí počtu těch domácností z vylosovaných 900 domácností, které vlastní DVD,*
2. *dolní odhad počtu těch domácností z vylosovaných 900 domácností, které vlastní DVD.*

$X \sim Bi(900; 0{,}8)$

$EX = 900 \cdot 0{,}8 = 720$

$DX = 900 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 144$

$\sqrt{DX} = 12$

1\. ? t

$P(|X - EX| \leq t) = 0{,}95$

$U = \dfrac{X - 720}{12} \sim N(0,1)$

$0{,}95 = P(-t \leq X - EX \leq t) = P\left(-\dfrac{t}{12} \leq \underbrace{\dfrac{X-720}{12}}_{U} \leq \dfrac{t}{12}\right) =$

$= 2\Phi\left(\dfrac{t}{12}\right) - 1 \Leftrightarrow \dfrac{1{,}95}{2} = \Phi\left(\dfrac{t}{12}\right) \Leftrightarrow \dfrac{t}{12} = u_{0{,}975} = 1{,}96$

$\Leftrightarrow t \approx 23{,}52$

Tedy: $P(|X - EX| \leq 24) \geq 0{,}95$

Počet dom. s DVD je s $\geq 95\%$ pravd. v intervalu

$\langle 696, 744 \rangle$

2: $P(X > d) = 0{,}95$

$$0{,}95 = P\Big(\underbrace{\frac{X-720}{12}}_{U \sim N(0,1)} > \frac{d-720}{12}\Big) = P\Big(U > \frac{d-720}{12}\Big) =$$

$$= 1 - P\Big(U \leq \frac{d-720}{12}\Big) = 1 - \Phi\Big(\frac{d-720}{12}\Big) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi\Big(\frac{d-720}{12}\Big) = 0{,}05 \Leftrightarrow \frac{d-720}{12} = u_{0{,}05} = -u_{0{,}95}$$

$$\Leftrightarrow d = 720 - 12 \cdot u_{0{,}95} = 720 - 12 \cdot 1{,}64 \doteq 700{,}32$$

Příklad 82. *Předpokládejme, že velká skupina studentů má ze zápočtové písemky ze statistiky bodové hodnoty normálně rozloženy kolem střední hodnoty 72 se směrodatnou odchylkou 9 bodů. Určete pravděpodobnost, že*

a) náhodně vybraný student bude mít výsledek lepší než 80 bodů,

b) průměr výsledků náhodného výběru 10 studentů bude lepší než 80 bodů.

a) $X \sim N(72\,;\,9^2) \Rightarrow U = \dfrac{X-72}{9} \sim N(0,1)$

$$P(X > 80) = P\Big(\underbrace{\frac{X-72}{9}}_{U} > \frac{80-72}{9}\Big) = P\left(U > \frac{8}{9}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{8}{9}\right) \approx 1 - 0{,}813 = 0{,}187$$

b) náh. výběr 10 studentů

$$M = \frac{1}{10}(X_1 + X_2 + \dots + X_{10})$$

náh. výběr $X_1, \dots, X_{10}$

$EM = \mu = 72$

$DM = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{9^2}{10}$

Víme, že $U := \frac{M - EM}{\sqrt{DM}} \sim N(0,1)$

$$P(M > 80) = P\left(\frac{M-72}{9/\sqrt{10}} > \frac{80-72}{9/\sqrt{10}}\right) =$$

$$= P\left(U > \frac{8\sqrt{10}}{9}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{8}{9} \cdot \sqrt{10}\right) \approx 1 - 0{,}99752$$

$\approx 0{,}0025$

Příklad 83. *Rychlost letadla byla určována v 5 zkouškách, jejichž aritmetický průměr byl* $m = 870,3\,ms^{-1}$. *Najděte 95% interval spolehlivosti pro* μ *víte-li, že měření rychlosti se řídí normálním rozdělením se směrodatnou odchylkou* $2,1\,ms^{-1}$.

náhodný výběr : $n=5$, $m = 870,3\ \frac{m}{s}$

$R \sim N(\mu ; 2,1^2)$ $\quad R = \frac{1}{5}(R_1 + \dots + R_5) = 870,3$

$U = \frac{R-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{R-\mu}{2,1/\sqrt{5}} \sim N(0,1)$

$\boxed{P(U \leq u_{0,95}) = 0,95}$

$P(|U| \leq \underset{\overset{\parallel}{1,96}}{u_{0,975}}) = 0,95$

$P\left(\left|\frac{870,3-\mu}{2,1/\sqrt{5}}\right| \leq 1,96\right) = 0,95$

$870,3 - \frac{2,1}{\sqrt{5}} \cdot 1,96 \leq \mu \leq 870,3 + \frac{2,1}{\sqrt{5}} \cdot 1,96 \approx 872,14$

$868,46 =$

Příklad 84. *Nechť* $X_1, \ldots, X_n$ *je náhodný výběr z rozdělení* $N(\mu; 0{,}04)$. *Jaký musí být nejmenší počet měření, aby šířka intervalu spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu* μ *nepřesáhla* 0,16, *a to na hladině významnosti* $\alpha = 0{,}05$?

$X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu; 0{,}04)$ $\qquad \alpha = 0{,}05$

int. spolehlivosti: $\left(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} ; M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right)$

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq 0{,}16$$

$$\frac{2\sigma}{0{,}16} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n}$$

$$\frac{2 \cdot 0{,}2}{0{,}16} \cdot 1{,}96 \leq \sqrt{n}$$

$\sqrt{n} \geq 4{,}9$

$n \geq 24{,}01$

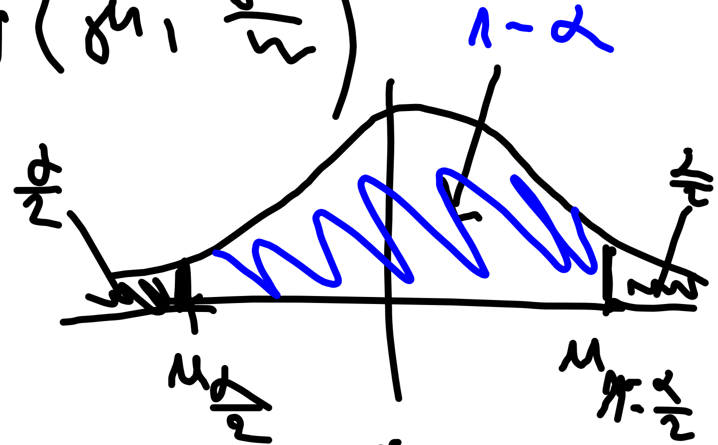
$\boxed{n = 25}$

Př: Určete
a) oboustranný
b) levý (jednostranný) na hladině α
interval spolehlivosti pro μ ze znalosti náhodného výběru rozsahu n, kde $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$
kde σ^2 je známá hodnota.

Řeš.: $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

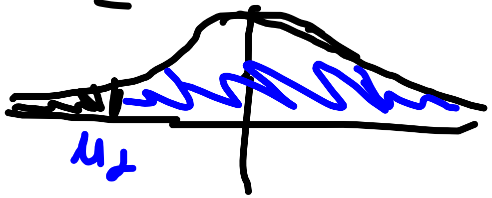
$$M = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$U = \frac{M - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$



$$P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} \le U \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{M-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$



$$1-\alpha = P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq M - \bar{x}_n \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - M \leq -\bar{x}_n \leq \underline{u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - M}\right)$$

$$= P\left(\underline{M - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \bar{x}_n \leq M - \underbrace{u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= P\left(M - \underbrace{u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \bar{x}_n \leq M + \underbrace{u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

ad b) $1-\alpha = P\left(M - \bar{x}_n \leq u_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$

$$= P\left(\underline{M - u_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x}_n}\right)$$