Příklad 85. *Televizní stanice, která vysílá seriál Vražedná čísla, by ráda věděla, kolik času se průměrný student matematiky vydrží dívat na TV, aby na ně mohla zaměřit případnou reklamní kampaň. Náhodným výběrem 100 studentů zjistila, že týdně sledují TV průměrně 20 hodin* $= M$ *s (výběrovou) směrodatnou odchylkou 5 hodin. Za předpokladu, že se počet hodin u TV řídí normálním rozdělením, sestrojte 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu hodin, který matematici stráví před TV obrazovkou.*

$n = 100, \; M = 20, \; S = 5; \quad X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Statistika $T = \dfrac{M - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$\Rightarrow$ int. spolehlivosti $1-\alpha$ pro μ je

$$\left(M - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) \; ; \; M + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right)$$

$20 - \frac{5}{10} \cdot 1{,}96 \; ; \; 20 + \frac{5}{10} \cdot 1{,}96$

$(19{,}02 \; ; \; 20{,}98)$

Příklad 86. *Pevnost nosníků má normální rozdělení s variabilitou vyjádřenou směrodatnou odchylkou* $\sigma = 120$. *Nová technologie výroby bude akceptována, jestliže zajistí variabilitu nejvýše* 100.

Rozhodněte, zda je možné na základě 16 měření s výběrovou směrodatnou odchylkou rovnou 107,5 s rizikem 0,05 přijmout novou technologii.

$H_0: \sigma > 100$ alt- $H_1: \sigma \leq 100$

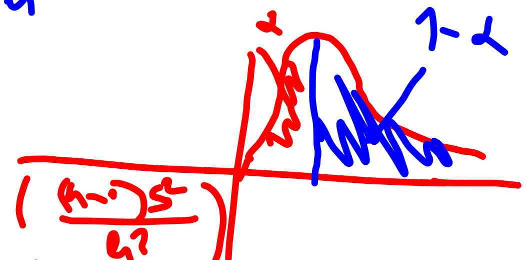
„zavedení nové technologie je nákladné"

$1-\alpha = P(\sigma \leq h) =$

h... horní hranice pro σ (H_0 zamítneme, pokud $h \leq 100$)

$$= P(\sigma^2 \leq h^2) = P\left(\underbrace{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}_{K} \geq \frac{(n-1)S^2}{h^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = P\left(\underbrace{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}_{K} \leq \frac{(n-1)S^2}{h^2}\right) = F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{(n-1)S^2}{h^2}\right)$$



$$\alpha = F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{(n-1)S^2}{h^2}\right)$$

hledáme h

$$\Updownarrow$$

α. kvantil

$$\chi^2_\alpha(n-1) = \frac{(n-1)S^2}{h^2} \iff h^2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_\alpha(n-1)}$$

Dosadíme: $h^2 = \dfrac{15 \cdot 107{,}5^2}{7{,}26}$ (příp. odhadem $\chi^2_\alpha(n-1) \approx 7{,}4$)

$$\approx 154{,}5^2 \Rightarrow h \approx 154{,}5$$

Závěr: horní hranice h pro σ není menší než 100, proto hyp. H_0 nezamítáme na hladině 0,95

Kdybychom ale formulovali:

$H_0: \sigma \leq 100$ alt. $H_1: \sigma > 100$

výpočet stejný, dolní hranice d pro σ:

$$d^2 = \frac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)} \approx 83^2$$

Protože $83 \ngtr 100$, hypotézu H_0 nezamítáme.

Příklad 87. *Spotřeba nového modelu auta byla testována 11 řidiči s výsledky 7,5; 7,8; 6,9; 8,2; 8,0; 7,5; 9,0; 7,6; 8,1; 7,9; 8,3. Rozhodněte, zda je možné se spolehlivostí 0,95 vyvrátit tvrzení výrobce o průměrné spotřebě 7,7 l/100 km.*

z dat $M = \frac{\sum X_i}{n} = 86{,}8/11 = 7{,}89$

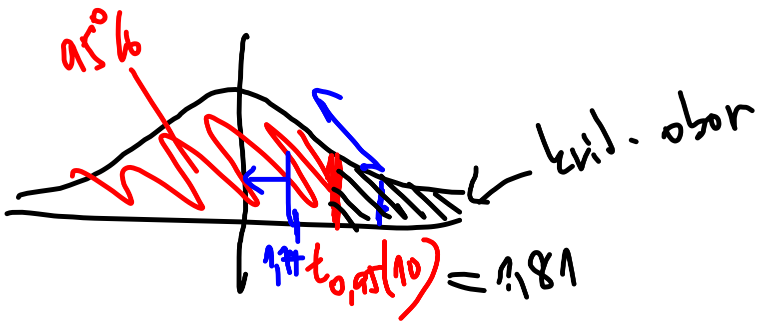
$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum (X_i - EX_i)^2 = \frac{n}{n-1}\left(E(X^2) - E(X)^2\right)$$

$S \approx 0{,}54$

statistika $T = \frac{M - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

jednostranný: kritický obor $\left(t_{0,95}(10);\ \infty\right)$

$$\frac{M - 7{,}7}{S/\sqrt{n}} \approx 1{,}77 \not> 1{,}81 \Rightarrow H_0 \text{ nezamítáme}$$



Příklad 88. *Hloubka moře se měří přístrojem, jehož systematická chyba je nulová a náhodné chyby měření mají normální rozdělení se směrodatnou odchylkou $\sigma = 1$ m. Určete, kolik měření je třeba provést, aby se hloubka moře určila s chybou nejvýše 1/4 metru při riziku 0,05.*

náh. výběr rozsahu n z $N(\mu; 1)$

interval spolehlivosti pro μ (známe σ):

$$\left(\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}},\ \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$\alpha = 0{,}05$

$$\frac{1}{4} \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sqrt{n} \geq 4\sigma\, u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sqrt{n} \geq 4 \cdot 1 \cdot 1{,}96 \Rightarrow n \geq 61{,}47$$

Je třeba provést 62 měření.

Příklad 89. *Aktivní studenti chtěli dopravnímu podniku dokázat, že autobusy trpí většími výkyvy příjezdových dob na danou zastávku než tramvaje a provedli měření odchylek od jízdního řádu:*

autobus	0	2	4	-3	2	-4	-3	0	0	5
tramvaj	4	6	3	0	-2	2	0	1	1	0

Z tabulky lze snadno vypočítat, že $S_1^2 = 9{,}12$ *a* $S_2^2 = 5{,}39$.

1. *Na hladině 0,05 testujte nulovou hypotézu, že autobus i tramvaj jsou stejně spolehlivé oproti alternativní hypotéze, že tramvaj je spolehlivější.*

2. *Určete maximální pravděpodobnost s níž můžete tvrdit, že je tramvaj spolehlivější než autobus.*

statistika $F = \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(9;9)$

jednostranný int. spolehlivosti pro $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$?

p-hodnota (viz OOCalc) : 0,22

$\Rightarrow$ b) tvrdit, že tvar je spolehlivější než bys lze s pravděpodobností $\leq 1 - 0{,}22 = 0{,}78$

$\Rightarrow$ a) nulovou hypotézu nezamítáme

jinak: interval spolehlivosti:

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in \left(\frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{1-\alpha}(9;9)} ; \infty \right)$$

Protože $1 \in \left(\frac{1{,}69}{3{,}18} ; \infty \right) \Rightarrow H_0$ nezamítáme

Příklad 90. *31 pacientů s rakovinou plic, léčených novým lékem, má průměrnou dobu přežití 28 měsíců se směrodatnou odchylkou 4 měsíce. Z předchozích studií je známo, že průměrné přežití pacientů bez podávání nového léku je 26 měsíců.*

1. *Lze na základě těchto dat usoudit, že nový lék prodlužuje dobu přežití?* $\alpha = 0{,}05$ $\quad (\alpha = 0{,}01)$
2. *Jak se změní závěr, pokud se významně zvětší počet pacientů, resp. rozptyl?*

$H_0 : \mu = 26$ oproti $H_1 : \mu > 26$

doba přežití není prodloužena

$$T = \frac{M - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{1-\alpha}(30)$$

$$T = \frac{28 - \overset{26}{\mu}}{4/\sqrt{31}} \sim t_{1-\alpha}(30) \approx 1{,}6973 \quad (2{,}4573)$$

krit. hodnota je 1,6973

$T = 2{,}7839$

zamítáme H_0 (podobně i s $\alpha = 0{,}01$)

Příklad 91. *Hmotnost jedné porce kávy považujeme za náhodnou veličinu s normálním rozdělením* $N(6\text{g}; 1,196\text{g}^2)$. *Určete pravděpodobnost, že k přípravě 16 porcí kávy postačí jeden 100g balíček.*

$$X \sim N(6; 1{,}196)$$

$$X_i \sim N(\dots)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{16} X_i \le 100\right) =$$

$$= P\Big(\underbrace{\frac{1}{16}\sum X_i}_{M} \le \frac{100}{16}\Big) = \underline{P\left(\frac{M-6}{\sqrt{1{,}196}/4} \le \frac{\frac{100}{16}-6}{\sqrt{1{,}196}/4}\right)}$$

$$= \Phi\left(\frac{1/4}{\sqrt{1{,}196}\cdot 1/4}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{1{,}196}}\right) = \Phi(0{,}91)$$

$$\approx 0{,}862$$

Příklad 92. *Ve dvou nádržích se zkoumal obsah chlóru. Z první bylo odebráno 22 vzorků, z druhé 10 vzorků. Byly vypočteny následující hodnoty výběrových průměrů a rozptylů:* $M_1 = 34,23$, $M_2 = 35,73$, $S_1^2 = 1,76$, $S_2^2 = 1,81$. *Hodnoty zjištěné z odebraných vzorků považujeme za realizace dvou nezávislých náhodných výběrů z rozdělení* $N(\mu_1, \sigma^2)$, *resp.* $N(\mu_2, \sigma^2)$. *Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot* $\mu_1 - \mu_2$ *a vyslovte závěr na dané hladině spolehlivosti o podstatnosti rozdílu naměřených hodnot.*

Dvouvýběrový T-Test:

$M_1 - M_2 = -1,5$; $S_*^2 = \dfrac{21 \cdot S_1^2 + 9 \cdot S_2^2}{30} = 1,775$

$\Rightarrow S_* \approx 1,33$

$-1,5 \pm 1,33 \cdot \sqrt{\frac{1}{22} + \frac{1}{10}} \underbrace{t_{0,975}(30)}_{2,0423} =$

$= -1,5 \pm 1,036 \Rightarrow (-2,536 ; -0,464)$

Protože $0 \notin (\ldots | \ldots) \Rightarrow$

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ **zamítáme** se spolehlivostí 95%