Příklad 2. *Doplňte následující tabulku operace $*$ na množině $\{a,b,c\}$ tak, aby se jednalo o pologrupu.*

$*$	a	b	c
a	b	a	c
b	a	b	c
c	c	c	c

$a*b$

pologrupa … $*$ asociativní

$$(\forall x,y,z: (x*y)*z = x*(y*z))$$

$$b*a = (a*a)*a = a*(a*a) = a*b = a$$

$$b*b = (a*a)*(a*a) = a*(a*a)*a = (a*b)*a = a*a = b$$

$$b*c = (a*a)*c = a*(a*c) = a*c = c$$

$$c*a = (b*c)*a = b*(c*a) \longrightarrow \text{žádná inf.}$$

$$\underbrace{c*a}_{x} = (a*c)*a = a*\underbrace{(c*a)}_{x}$$

$$\Rightarrow x = c$$

$$c*b = c*(a*a) = (c*a)*a = c*a$$

$$= c$$

$$c*c = (a*c)*(a*c) = a*(c*a)*c =$$

$$= (a*c)*c = c*c \Rightarrow \text{No INFO}$$

$$c*c = a*(c*b)*c = a*(c*c)$$

$$\Rightarrow c*c = c$$

Příklad 3 (zákony o krácení).

1. *Dokažte, že v libovolné grupě platí tzv. zákony o krácení.*

$$a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c, \quad a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b.$$

2. *Dokažte, že konečná pologrupa, ve které platí zákony o krácení, je nutně grupou.*

3. *Udejte příklad nekonečné pologrupy, v níž platí zákony o krácení a není grupou.*

4. *Udejte příklad tříprvkového grupoidu, v němž platí zákony o krácení, ale není grupou.*

ad 1. $a \cdot b = a \cdot c \quad | \text{ zleva } \cdot a^{-1}$

$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c)$

$(a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c$

$e \cdot b = e \cdot c$

$\underline{\underline{b = c}}$

$a \cdot c = b \cdot c \quad | \cdot c^{-1}$

$\Downarrow$

$a = b$

ad 3. $(\mathbb{N},+)$ ... pologrupa

$$a+b=a+c \Rightarrow b=c \quad ✓$$

$(\mathbb{N},\cdot)$ ... pologrupa

$$a\cdot b=a\cdot c \Rightarrow b=c$$

někdy ale $(\mathbb{Z},\cdot)$: $a\cdot b=a\cdot c \not\Rightarrow b=c$ $(a=0)$

ad 2. zákon ověření : „v každém řádku i sloupci každý prvek právě jednou"

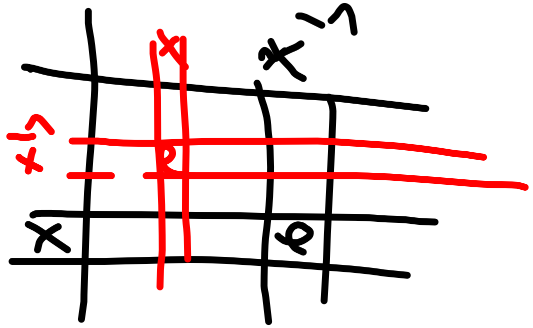
a) ukážeme $\exists$ neutrálního prvku e.

Pro lib. a $\exists!\, y$: $a\cdot y=a$

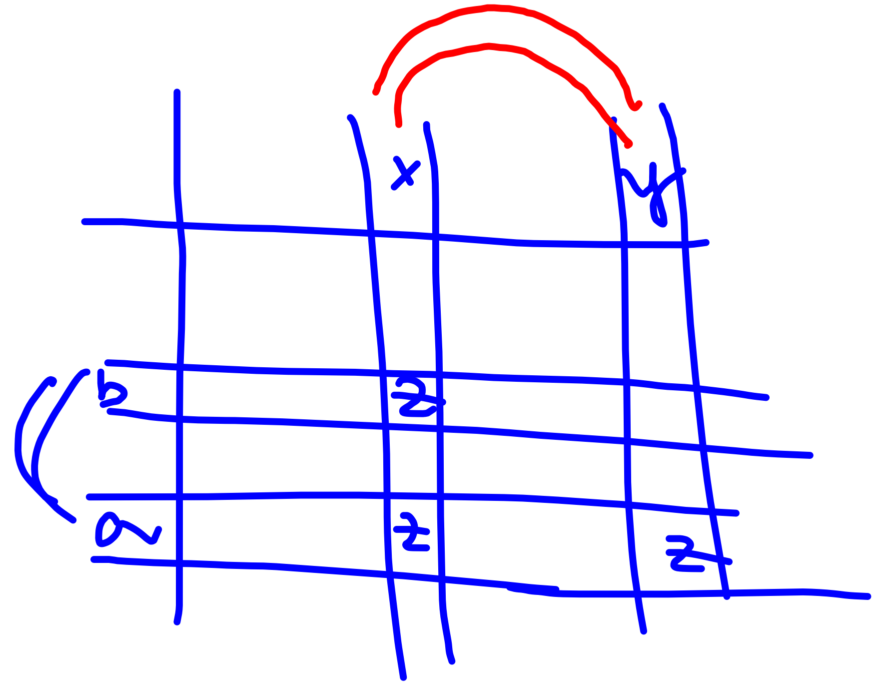
Ukážeme, že $\forall x$: $y\cdot x=x$

$x\cdot y=x$

tj. že $y=e$



ZÁKON O KRÁCENÍ



$$b \cdot x = a \cdot x$$
$$b = a$$

$$a \cdot x = a \cdot y$$
$$\Downarrow$$
$$x = y$$

(a) Chci $\forall x: \; y\cdot x \overset{?}{=} x$

$$(a\cdot y)\cdot x = a\cdot(y\cdot x)$$

$$\underset{\text{ }}{a}\cdot x = a\cdot(y\cdot x)$$

$$\overset{2.\text{KR.}}{\Longrightarrow} \quad \underline{\underline{x = y\cdot x}}$$

(b) Ukážeme, že rovněž $y\cdot a = a$

$$a\cdot\underline{(y\cdot a)} = \underline{(a\cdot y)}\cdot a$$

$$a\cdot(y\cdot a) = a\cdot a$$

$$\overset{2.\text{KR.}}{\Longrightarrow} \quad \underline{\underline{y\cdot a = a}}$$

$$\boxed{e = y}$$

(c) Chci $x\cdot y \overset{?}{=} x$

$$(x\cdot y)\cdot a = x\cdot(y\cdot a) = x\cdot a \overset{2.\text{KR.}}{\Longrightarrow} x\cdot y = x \; ✓$$

(d) ze zákona o krácení a z existence e plyne, že

k lib. a existuje levý inverzní prvek ℓ

— " — pravý — " — r,

tj. $\ell \cdot a = e \qquad a \cdot r = e$

$$(\ell \cdot a) \cdot r = \ell \cdot (a \cdot r)$$

$$e \cdot r = \ell \cdot e$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{r = \ell}}$$

(14) 3-prvkový grupoid, z. o tř. 1

který není grupou

	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

✓

není neutr. prvek

Příklad 4. *Doplňte následující tabulky operace $*$ na množině $\{a,b,c\}$ tak, aby se jednalo o grupu.*

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	$\triangle$
c	c	$\triangle$	a

$*$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

$\Rightarrow e = c$

$e = a$!

NEJDE!

$[0] \longmapsto c$

$[1] \longmapsto a$ (nebo

$[2] \longmapsto b$ opačně)

JEDINÁ prvková grupa je $(\mathbb{Z}_3, +)$

Příklad 5. *Dokažte, že* $\left(\mathbb{Q}(\sqrt{3})\right)^{*} = \{a + b\sqrt{3}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ *je podgrupa grupy* $(\cancel{\mathbb{Q}}, \cdot)$. $(\mathbb{C}^{*}, \cdot)$

$a \cdot b \neq 0$

$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ (Sporem: $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$ $\quad m, n \in \mathbb{Z}$, $(m,n) = 1$

$3n^2 = m^2 \Rightarrow 3 \mid m^2 \Rightarrow 3 \mid m \Rightarrow m = 3m'$, $m' \in \mathbb{Z}$

$3n^2 = 9m'^2 \Rightarrow n^2 = 3 \cdot m'^2 \Rightarrow 3 \mid n^2 \Rightarrow 3 \mid n$

SPOR

Zřejmě $\mathbb{Q}(\sqrt{3})^{*} \subseteq \mathbb{C}^{*}$ (dokonce $\subseteq \mathbb{R}^{*}$)

$x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})^{*} \stackrel{?}{\Longrightarrow} x \cdot y^{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})^{*}$

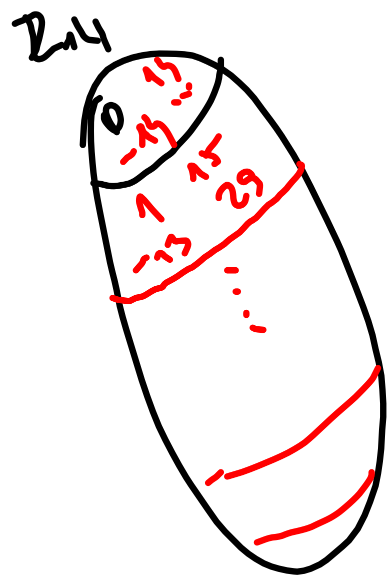
$x = a + b\sqrt{3}$, $y = c + d\sqrt{3}$

$$(a + b\sqrt{3}) \cdot (c + d\sqrt{3})^{-1} = \frac{a + b\sqrt{3}}{c + d\sqrt{3}} = \frac{(a + b\sqrt{3})(c - d\sqrt{3})}{(c + d\sqrt{3})(c - d\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{(ac - 3bd) + \sqrt{3}(-ad + bc)}{c^2 - 3d^2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})^{*}$$

Příklad 6.

1. *Popište všechny podgrupy grupy* $(\mathbb{Z}_{14}, +)$.
2. *Popište všechny podgrupy grupy* $(\mathbb{Z}_n, +)$.



$$\mathbb{Z}_{14} = \{[0]_{14}, [1]_{14}, \dots, [13]_{14}\}$$

$$[0]_{14} = [-14]$$

$\langle [0] \rangle = \{[0]\} \le \mathbb{Z}_{14}$ řádu 1

$\langle [1] \rangle = \mathbb{Z}_{14} \le \mathbb{Z}_{14}$ řádu 14

$\langle [2] \rangle = 2\cdot\mathbb{Z}_{14} \le \mathbb{Z}_{14}$ řádu 7

$\langle [3] \rangle = \mathbb{Z}_{14}$

$\langle [4] \rangle = 2\cdot\mathbb{Z}_{14}$

$\langle [7] \rangle = \{[0], [7]\} = 7\cdot\mathbb{Z}_{14}$ řádu 2

$\mathbb{Z}$. $(\mathbb{Z}_n, +)$

podgrupami jsou právě

$d \cdot \mathbb{Z}_n$, kde $d | n$, $d \in \mathbb{N}$

Příklad 7. *Popište svaz podgrup Σ_3.*

$$\Sigma_3 = \{id, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$$

řády: 1, 2, 2, 2, 3, 3

řád prvku a: $\min\{k \in \mathbb{N};\ a^k = e\}$

$$\langle (1,2), (1,3) \rangle = \Sigma_3$$

$$(1,2)\circ(1,3) = (1,3,2)$$

$$(1,3)\circ(1,2) = (1,2,3)$$

$$(1,3,2)\circ(1,2) = (2,3)$$

$$\langle (1,2,3) \rangle = \{(1,2,3), (1,3,2), id\}$$

Σ_3

$\langle (1,2,3) \rangle$

$\langle (1,2) \rangle$ $\quad$ $\langle (1,3) \rangle$ $\quad$ $\langle (2,3) \rangle$

$\{id\}$

Příklad 8.

1. *Určete podgrupu* Σ_8 *generovanou množinou*

$$\{(4,5,2,1)\circ(4,6,3,1,5,2),(4,5,2,1)\circ(4,5,6)\circ(2,1,3)\}.$$

2. *Určete podgrupu* Σ_n *generovanou množinou*

$$\{\underbrace{(1,2)}_{t},\underbrace{(1,2,3,\dots,n)}_{c}\}.$$

ad 2.

$$\underline{c^{-1}\circ t\circ c} = (1,n)(2)(3)\dots(n-1) = \underline{(1,n)}$$

$$\underline{c^{-2}\circ t\circ c^{2}} = (1)(n-1,n)\dots = \underline{(n-1,n)}$$

$$(i,n) = c^{i-n-1}\circ t\circ c^{n+1-i}$$

$$(2,3) = (2,n)\circ(3,n)\circ(2,n)$$

$$(2,n)\circ(3,n) = (3,2,n)$$

$$(3,2,n)\circ(2,n) = (2,3)$$

obecně:

$$(i,j) = (i,n)\circ(j,n)\circ(i,n)$$

$$\Rightarrow \langle(1,2),(1,2,\dots,n)\rangle = \Sigma_n$$

$$\pi = (4,6,3)(1,2,5) \quad \ldots \text{řád } 3$$

$$\rho = (1,3)(2,4)(5,6) \quad \ldots \text{řád } 2$$

$$\langle \{\pi, \rho\} \rangle = \langle \pi, \rho \rangle =$$

$$= \{ \boxed{\pi^{i_1} \rho^{j_1} \cdot \pi^{i_2} \rho^{j_2} \ldots} ;\ i, j \in \mathbb{Z} \}$$

$$\pi^2 = \pi^{-1} = (4,3,6)(1,5,2)$$

$$\rho^{-1} = \rho$$

$$\pi \circ \rho = (1,4,5,3,2,6)$$

$$\rho \circ \pi = (1,4,5,3,2,6)$$

2 generátory

$$\langle \pi, \rho \rangle = \{ \underline{id}, \underline{\pi}, \underline{\pi^2 = \pi^{-1}}, \rho, \underline{\pi \circ \rho = \rho \circ \pi, \pi \circ \rho} \} = \langle \pi \circ \rho \rangle \cong \mathbb{Z}_6$$