Příklad 29. *Nalezněte nejprve všechny racionální a poté násobné kořeny polynomu*

$$f = 4x^7 + 17x^6 + 32x^5 + 39x^4 + 28x^3 + 13x^2 + 2x \in \mathbb{Z}[x].$$

Tento polynom rozložte na součin ireducibilních polynomů postupně nad $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$.

zřejmě $x = 0$ je kořen $f \Rightarrow$

$\Rightarrow f = x\,(\underbrace{4x^6 + 17x^5 + \dots + 13x + 2}_{g})$

$g\left(\frac{r}{s}\right) = 0 \Rightarrow r \mid 2 \wedge s \mid 4$

$\frac{r}{s} \in \left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm \frac{1}{4}\right\}$

$\frac{r}{s} > 0 \Rightarrow g\left(\frac{r}{s}\right) > 0$

	4	17	32	39	28	13	2
-1	4	13	19	20	8	5	-3
-2	4	9	14	11	6	1	0
-2	4	1	12	-13	32	-63	
$-\frac{1}{2}$	4	7	$\frac{21}{2}$	$\frac{23}{4}$	$\frac{25}{8}$	×	
$-\frac{1}{4}$	4	8	12	8	4	0	
$-\frac{1}{4}$	4	7	$\frac{47}{4}$	×			

$x+2)\ g$

(nemuseli jsme teď $-2 \to 1$)

$$f = x(x+2)\left(x+\frac{1}{4}\right)(4x^4+8x^3+12x^2+8x+4) =$$

$$= x(x+2)(4x+1)(x^4+2x^3+3x^2+2x+1)$$

Určíme násobné kořeny polynomu $h = x^4+2x^3+3x^2+2x+1$

$h' = 4x^3+6x^2+6x+2$

$(h,h') = \left(2h, \frac{h'}{2}\right)$

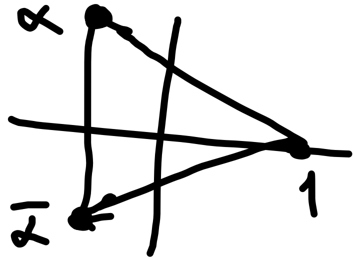
$$(2x^4+4x^3+6x^2+4x+2):(2x^3+3x^2+3x+1) = \left(x+\tfrac{1}{2}\right)$$
$$-(2x^4+3x^3+3x^2+x)$$
$$x^3+3x^2+3x+2$$
$$-\left(x^3+\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{3}{2}x+\tfrac{1}{2}\right)$$
$$\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{3}{2}x+\tfrac{3}{2} = \tfrac{3}{2}(x^2+x+1) \quad \dots \text{ zb.}$$

$$(2x^3+3x^2+3x+1):\boxed{(x^2+x+1)} = (2x+1)$$
$$-(2x^3+2x^2+2x)$$
$$x^2+x+1$$
$$-(x^2+x+1)$$
$$0 \quad \text{zb.}$$

n.s.d.

kořeny x^2+x+1 jsou násobnými kořeny f

$$\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} & (=:\alpha\,;\ \alpha^3=1) \\[2ex] \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



Kořeny f jsou $0, -2, -\frac{1}{4}$, dvojnás. $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, dvoj.: $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

nad $\mathbb{C}$: $f = x(x+2)(4x+1)\left(x+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(x+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2$

nad $\mathbb{R}$: $f = x(x+2)(4x+1)(x^2+x+1)^2$

nad $\mathbb{Q}$: ——— " ———

Příklad 30. *Určete násobnost kořene -1 polynomu*

$$x^5 - ax^2 - ax + 1 \in \mathbb{C}[x]$$

v závislosti na hodnotě parametru $a \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & -a & -a & 1 \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 1 & -1-a & 1 & 0 \\
-1 & 1 & -2 & 3 & -4-a & 5+a & \\
 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & \\
-1 & 1 & -3 & 6 & -5 \neq 0 & &
\end{array}$$

$x=-1$ je kořen vždy

$a \neq -5 \Rightarrow x=-1$ jednoduchý

$a = -5$

je dvojnásobný kořen

Příklad 31. *Mezi všemi normovanými polynomy s reálnými koeficienty, které mají jednoduchý kořen* $-\frac{1}{3}$ *a dvojnásobný kořen* $3+2i$ *nalezněte ten, jehož stupeň je nejmenší, a rozložte jej na ireducibilní polynomy nad* $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$.

$-\frac{1}{3} \Rightarrow x+\frac{1}{3}$

$3+2i$ je kořen $\Rightarrow$ $3-2i$ kořen

$$\Rightarrow (x-3-2i)^2(x-3+2i)^2 =$$

$$= \left((x-3)^2-(2i)^2\right)^2 = (x^2-6x+9+4)^2 =$$

$$= (x^2-6x+13)^2$$

$$f = \underline{(x+\tfrac{1}{3})(x^2-6x+13)^2} =$$

$$= (x+\tfrac{1}{3})(x^4-12x^3+26x^2-156x+36x^2+169) =$$

$$= (x+\tfrac{1}{3})(x^4-12x^3+62x^2-156x+169) =$$

$$= (x^5-11\tfrac{2}{3}x^4+58x^3-135\tfrac{1}{3}x^2+117x+56\tfrac{1}{3})$$

nad $\mathbb{C}$: $(x+\frac{1}{3})(x-3-2i)^2(x-3+2i)^2$

nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$: $(x+\frac{1}{3})(x^2-6x+13)^2$

Příklad 32. *Dokažte, že polynom* 3 3 ... zřejmé

$$f = x^3 + 3x^2 + 5x + 5$$

je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$ (tj. i nad $\mathbb{Z}$) ... Gaussovo lemma

- *pomocí Eisensteinova kritéria,*
- *jinak.*

p prvočíslo

① $p \mid a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$
② $p \nmid a_n$
③ $p^2 \nmid a_0$

$\Big\}$ $a_n x^n + \dots + a_0$ je ired.

$a \in \mathbb{Z}$

f je ireducibilní $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{f(y+a)}_{\varphi(y)}$ je ireducibilní

$f = h \cdot g$ $\qquad$ $f(y+a) = h(y+a) \cdot g(y+a)$

$\varphi(y) = f(y+a)$

$f(x) = \varphi(x-a)$

$x \leftarrow y+1$

$\varphi(y) = (y+1)^3 + 3(y+1)^2 + 5(y+1) + 5 = y^3 + 6y^2 + 14y + 14$

je Eisensteinův vzhledem ke 2

• jinak:

f rozložitelný $\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{Q} : (x-\alpha) \mid f$

$\Leftrightarrow \alpha$ je kořen f

$\alpha = \frac{r}{s} \Rightarrow \frac{r}{s} \in \{\cancel{1}, -1, \cancel{5}, -5\}$

	1	3	5	5
−1	1	2	3	2
−5	1	−2	15	−70

st. 3

nemá kořen v $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ je ireducibilní

Příklad 33. *1. Dokažte, že polynom*

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$$

je ireducibilní nad $\mathbb{Z}$.

2. Důkaz zobecněte pro nekonečně mnoho polynomů.

1) možná cesta: nemá kořen (± 1)

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + D)$$

$$A, B, C, D \in \mathbb{Z}$$

jinak

$x \leftarrow y + 1$

$$\varphi(y) = (y+1)^4 + (y+1)^3 + (y+1)^2 + (y+1) + 1 =$$

$$= y^4 + 5y^3 + 10y^2 + 10y + 5$$

Eisensteinův vzhledem k 5 $\Rightarrow$ ireducibilní

Ukážeme, že

$1+x+x^2+\dots+x^{n-1}$ je ireducibilní $\Leftrightarrow$ n je prvočíslo

1. $n=p$ prvočíslo

$$f=1+x+\dots+x^{p-1}=\frac{x^p-1}{x-1}$$

$x \leftarrow y+1 \Rightarrow \varphi(y)=f(y+1)=\dfrac{(y+1)^p-1}{y+1-1}=\dfrac{(y+1)^p-1}{y}=$

$$=y^{p-1}+\binom{p}{1}y^{p-2}+\binom{p}{2}y^{p-3}+\dots+\binom{p}{p-1}$$

je Eisensteinův vzhledem k p,

protože $\forall i\in\{1,\dots,p-1\}: \underline{\underline{p \mid \binom{p}{i}}}$, $p^2 \nmid \binom{p}{p-1}$

$$\binom{p}{i}=\frac{p\cdot\overbrace{(p-1)\cdots(p-i+1)}^{A}}{i!}$$

$\mathbb{Z}$: $i! \mid p\cdot A \wedge (i!,p)=1 \Rightarrow i! \mid A \Rightarrow p \mid \binom{p}{i}$

$n = a \cdot b$ je složené $(a > 1, b > 1)$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^{ab} - 1}{x - 1}$$

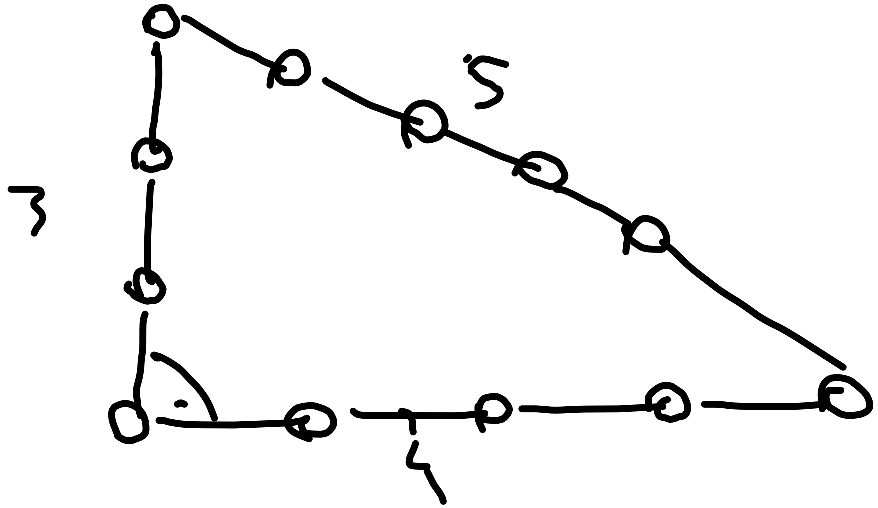
$$x^{ab} - 1 = (x^a - 1) \cdot \underline{\left((x^a)^{b-1} + (x^a)^{b-2} + \dots + x^a + 1\right)}$$

Proto

$$1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{x^a - 1}{x - 1} \cdot \left((x^a)^{b-1} + \dots + x^a + 1\right) =$$

$$= (1 + x + x^2 + \dots + x^{a-1}) \cdot \left(1 + x^a + \dots + (x^a)^{b-1}\right)$$

$\Rightarrow$ není ireducibilní



$$x^n + y^n = z^n \qquad n > 2$$

Příklad 34. *Nalezněte rozklad polynomu*

$$x^4 + 4x^3 + x^2 + 5$$

na součin ireducibilních polynomů nad $\mathbb{Z}$.

snadno se ověří, že nemá kořen v $\mathbb{Z}$
(tj. $x=-1$, $x=-5$)

$$x^4+4x^3+x^2+5 = (x^2+Ax+B)(x^2+Cx+D)$$

$A, B, C, D \in \mathbb{Z}$

porovnáním koef.:

x^3: $4 = A+C$

x^2: $1 = A\cdot C + B + D$

x^1: $0 = A\cdot D + B\cdot C$

x^0: $5 = B\cdot D$

BÚNO stačí $\boxed{B=1}$ nebo $B=-1$

$\boxed{D=5}$

$4 = A+C$

$1 = A\cdot C + 6$

$0 = 5A + C$

$4A = -4 \Rightarrow \boxed{A=-1,\ C=5}$

$B = -1$; $D = -5$

$1 = A + C$

$1 = A \cdot C - 6$

$0 = -5A - C$

$4 = -4A$

$A = -1$, $C = 5$

není splněna

rozklad je

$$x^4 + 4x^3 + x^2 + 5 = (x^2 - x + 1)(x^2 + 5x + 5)$$

Příklad 35. *Nalezněte všechny ireducibilní polynomy*

1. *stupně nejvýše 3 nad* $\mathbb{Z}_3$,
2. *stupně nejvýše 4 nad* $\mathbb{Z}_2$.