Pravděpodobnost

Ω – **základní prostor**, množina všech výsledků

$\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ – **možné výsledky**, prvky množiny Ω

A – **náhodný jev**, $A \subseteq \Omega$

A^c – **jev opačný**, $A^c = \Omega \backslash A$

ω_i – **elementární jev**

Ω – **jev jistý**

$\emptyset$ – **jev nemožný**

$A \cap B = \emptyset$ – **jevy neslučitelné**

$A \subseteq B$ – jev B je **důsledkem** jevu A

$\mathcal{A}$ – **jevové pole**, systém podmnožin množiny Ω, která splňuje podmínky:

- $\Omega \in \mathcal{A}$,
- jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak je i $A \backslash B \in \mathcal{A}$,
- jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak i $A \cup B \in \mathcal{A}$.

$(\Omega, \mathcal{A})$ – **měřitelný prostor**

Pravděpodobnost

Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. **Pravděpodobnost** je zobrazení $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s vlastnostmi:

(a) $P(A) \geq 0$ pro všechna $A \in \mathcal{A}$

(b) $P(\Omega) = 1$

(c) jestliže $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ jsou **po dvou disjunktní** množiny, pak

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Trojice $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývá **pravděpodobnostní prostor**.

Klasická pravděpodobnost

Nechť základní prostor Ω je konečná neprázdná množina a nechť jevové pole $\mathcal{A}$ je systémem všech podmnožin základního prostoru. Označme $m(\Omega)$ počet všech možných výsledků a pro libovolný jev $A \in \mathcal{A}$ označme $m(A)$ počet možných výsledků příznivých jevu A. Pak reálnou funkci $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ definovanou pro všechna $A \in \mathcal{A}$ vztahem

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \tag{1}$$

nazveme **klasická pravděpodobnost.**

Bayesův vzorec

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a nechť je dán rozklad $\{H_i\,;\, i \in I\}$ základního prostoru Ω na nejvýše spočetně mnoho neslučitelných jevů H_i s vlastností $P(H_i) > 0$ a $P(\bigcup_{i \in I} H_i) = 1$. Pak pro $P(A) > 0$ a pro libovolný jev $B \in \mathcal{A}$ dostáváme:

(a) **Bayesův vzorec**

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i \in I} P(H_i) \cdot P(A|H_i)} \tag{4}$$

(b) **Bayesův vzorec**

$$P(B|A) = \frac{\sum_{i \in I} P(H_i) \cdot P(A|H_i) \cdot P(B|A \cap H_i)}{\sum_{i \in I} P(H_i) \cdot P(A|H_i)} \tag{5}$$

Příklad 45. *1. Určete všechna možná jevová pole na základním prostoru* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

2. Určete alespoň tři různá jevová pole na $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

1. $\boxed{\mathcal{A}_1} = \{\Omega, \emptyset\}$

$\boxed{\mathcal{A}_{2,1}} = \{\Omega, \emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}\}$

$\boxed{\mathcal{A}_{2,2}} = \{\ldots, \{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}\}; \quad \boxed{\mathcal{A}_{3,3}}$

$\boxed{\mathcal{A}_3} = \{\Omega, \emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}, \ldots\} = 2^\Omega$

$\{\{\omega_1\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}, \ldots\} = \mathcal{A}_3$

Už máme všechna $\mathcal{A}$

ad 2.

$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$

$\mathcal{A}_2 = 2^{\Omega}$ (množina všech podmnožin Ω)

$\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}$

$\mathcal{A}_4 \stackrel{?}{=} \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}\}$

$\mathcal{A}_5 = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\},$
$\{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}\}$

$\vdots$

Příklad 46. *Náhodný pokus spočívá v hodu kostkou. Jev A znamená, že padne liché číslo, jev B, padne-li prvočíslo.*

a) Určete základní prostor Ω.

b) Uveďte všechny možné výsledky příznivé nastoupení jevů A, B.

c) Pomocí A, B a operací s jevy vyjádřete:

- *padne sudé číslo,*
- *padne číslo 2,*
- *padne číslo 2 nebo 3*

d) Určete nejmenší měřitelný prostor $(\Omega, \mathcal{A})$, obsahující jevy A i B.

ad a) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

počet ok na kostce

ad b) $A = \{1,3,5\}$

$B = \{2,3,5\}$

ad c) • A^c $(= \overline{A})$

• $B \setminus A$

• nelze

ad d) $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, A, B, A^c, B^c, \{1,2,3,5\}, \{3,5\}, \{4,6\}, \{1,2,4,6\}, \{2\}, \{2\}^c, \{1,2\}, \{1,2\}^c, \{1\}, \{1\}^c\}$

$\Theta \in \langle 0, 1 \rangle$

Příklad 47. *Nechť* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ *a* $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, \{\omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2\}\}$. *Určete všechny pravděpodobnostní funkce zobrazující* $\mathcal{A}$ *do množiny* $\{0, 1, \theta, 1-\theta\}$.

$P : \mathcal{A} \to \{0, 1, \Theta, 1-\Theta\}$

$P_1(\Omega) = 1$

$P_1(\emptyset) = 0$

$P_1(\{w_3\}) = \Theta \Rightarrow P_1(\{w_3\}^c) = P_1(\{w_1, w_2\}) =$

$= 1 - \Theta$

$P_2(\Omega) = 1$

$P_2(\emptyset) = 0$

$P_2(\{w_3\}) = 1 - \Theta, \quad P_2(\{w_1, w_2\}) = \Theta$

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}$$

$\underline{P(H) > 0}$

Příklad 48. *a) Z urny, v níž je a bílých a b černých koulí, vybereme postupně (bez vracení) dvě koule. Jaká je pravděpodobnost, že druhá koule je bílá, za předpokladu, že první byla bílá.*

b) Ze skupiny 100 výrobků, která obsahuje 10 zmetků, vybereme náhodně bez vracení 3 výrobky. Určete pravděpodobnost, že:

- *třetí je zmetek za podmínky, že první 2 byly kvalitní.*
- *první 2 jsou kvalitní a třetí zmetek.*

ad a) A … 1. koule bílá

B … 2. koule bílá

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A) = \frac{a}{a+b}$$

$P(B|A)$ spočítáme přímo

$$P(B|A) = \frac{a-1}{a-1+b}$$

b) A = první 2 jsou kvalitní

B = třetí zvolený je zmetek

$P(B|A) = ?$ $\qquad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$P(A \cap B) = ?$

$P(A) = \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99}$

$P(A \cap B) = \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{10}{98}$

A = první je kvalitní $\quad P(A) = \frac{90}{100}$ | $P(B|A) = \frac{89}{99}$

B = druhý je kvalitní $\quad P(A \cap B) = \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99}$

C = třetí je kvalitní $\quad \boxed{P(\bar{C}|A \cap B) = \frac{10}{98}}$

$P(A \cap B \cap \bar{C}) = P(\bar{C}|A \cap B) \cdot P(A \cap B) = \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{10}{98}$

Příklad 49. *Střelec střílí třikrát nezávisle na sobě do terče. Pravděpodobnosti zásahu jsou postupně 0,4 , 0,5 a 0,7.Jaká je pravděpodobnost, že zasáhne terč*

a) právě jednou,

b) aspoň jednou?

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) \iff P(A|B) = P(A) \iff P(B|A) = P(B)$$

stoch. nezávislé

ad a) $0{,}4\cdot(1-0{,}5)\cdot(1-0{,}7) + (1-0{,}4)\cdot 0{,}5\cdot(1-0{,}7) + (1-0{,}4)\cdot(1-0{,}5)\cdot 0{,}7 =$

$= 0{,}06 + 0{,}09 + 0{,}21 = 0{,}36$

ad b) $1 - 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 =$

$= 0{,}91$

Příklad 50. *Nechť $A_1, \dots, A_n$ jsou stochasticky nezávislé náhodné jevy, $P(A_i) = p_i$ pro $i = 1, \dots, n$. Vyjádřete pravděpodobnost, že*

a) nastane aspoň jeden z uvedených jevů,

b) nastanou všechny uvedené jevy,

c) nastane právě jeden z uvedených jevů.

ad a) $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)$

ad b) $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i$

ad c) $P\Big((A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \dots \cap \overline{A_n}) \underset{\text{nesl.}}{\cup} (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \dots \cap \overline{A_n}) \cup \dots \underset{\text{nesl.}}{\cup} (\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n)\Big) =$

$= \underline{\sum_{i=1}^{n} \big(p_1 \cdot (1-p_2) \cdots \forall \cdots (1-p_n)\big)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j}{1-p_j} \cdot \prod_{i=1}^{n} (1-p_i) =$

$= \prod_{i=1}^{n} (1-p_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{1-p_i}$

Příklad 51. *Dva střelci vystřelí nezávisle na sobě do téhož terče každý jednu ránu. Po střelbě byl v teči nalezen 1 zásah. Určete pravděpodobnost, že zásah patří 1. střelci, pokud tento trefuje terče s pravděpodobností 0,8, zatímco druhý střelec s pravděpodobností 0,4.*

A ... 1. střelec se trefí

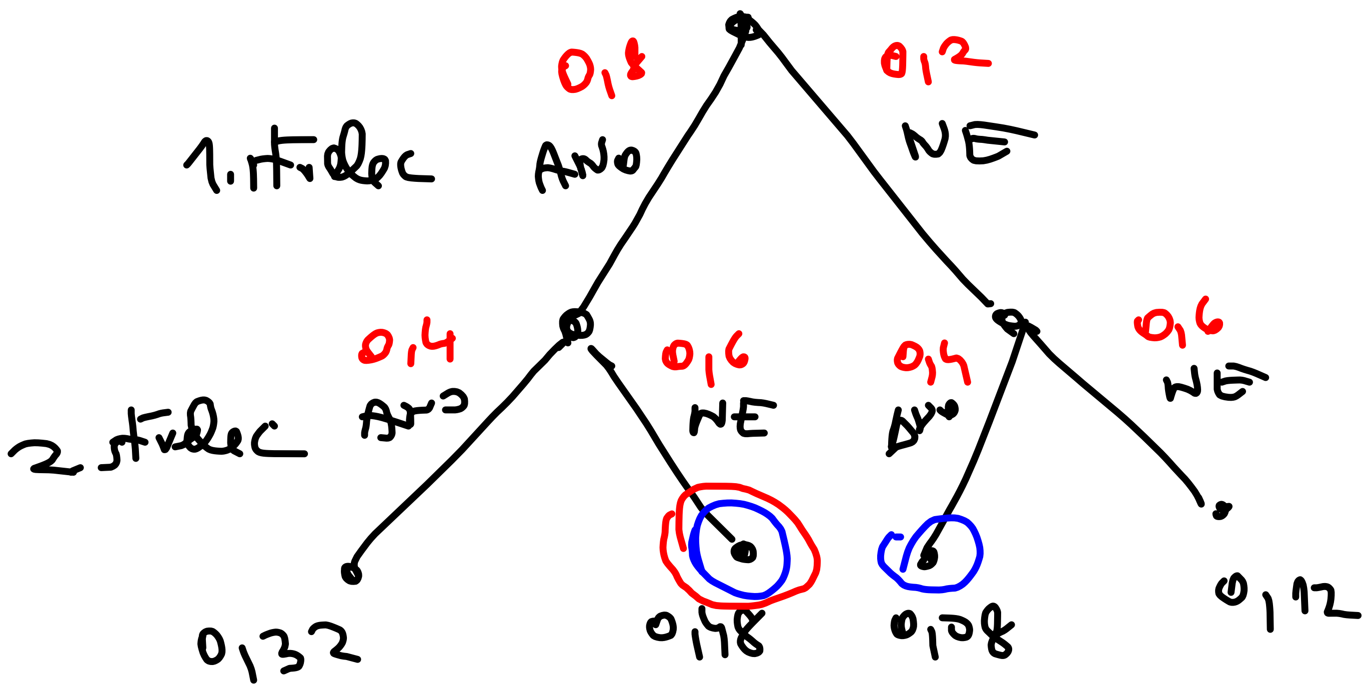
B ... 2. střelec se trefí

$$H = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(H)} = \frac{P(A) \cdot P(\overline{B})}{P(H)} =$$

$$A \cap H = A \cap \big((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\big) = (A \cap A \cap \overline{B}) \cup \underline{(A \cap \overline{A} \cap B)} = A \cap \overline{B}$$

$$= \frac{0{,}8 \cdot 0{,}6}{0{,}8 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}4} = \frac{0{,}48}{0{,}48 + 0{,}08} = \frac{48}{56} = \frac{6}{7}$$



1 zásah --- 0,56

1. střelec 0,48

$$\Rightarrow \frac{0{,}48}{0{,}56} = \frac{6}{7}$$

Příklad 52. *V testu jsou u každé otázky 4 možné odpovědi. Pokud student nezná odpověď, tak hádá (uhodne s pravděpodobností $\frac{1}{4}$). Dobrý student zná 75% odpovědí, slabý 30%. Jestliže byla určitá otázka zodpovězena správně, určete pravděpodobnost, že student jen hádal, jde-li o:*

- *dobrého studenta,*
- *špatného studenta,*
- *náhodného studenta, kdy navíc víme, že dobrých studentů jsou 2/3.*

A ... student je dobrý

S ... správná odpověď

V ... student ví odpověď

$\overline{V}$ ... student hádá odpověď

$P(V|A) = 0{,}75$

$P(V|\overline{A}) = 0{,}3$

$P(S|V) = 1$

$P(S|\overline{V}) = 0{,}25$

$$P(\bar{V} \mid S \cap A) = \frac{P(A \cap S \cap \bar{V})}{P(A \cap S)}$$

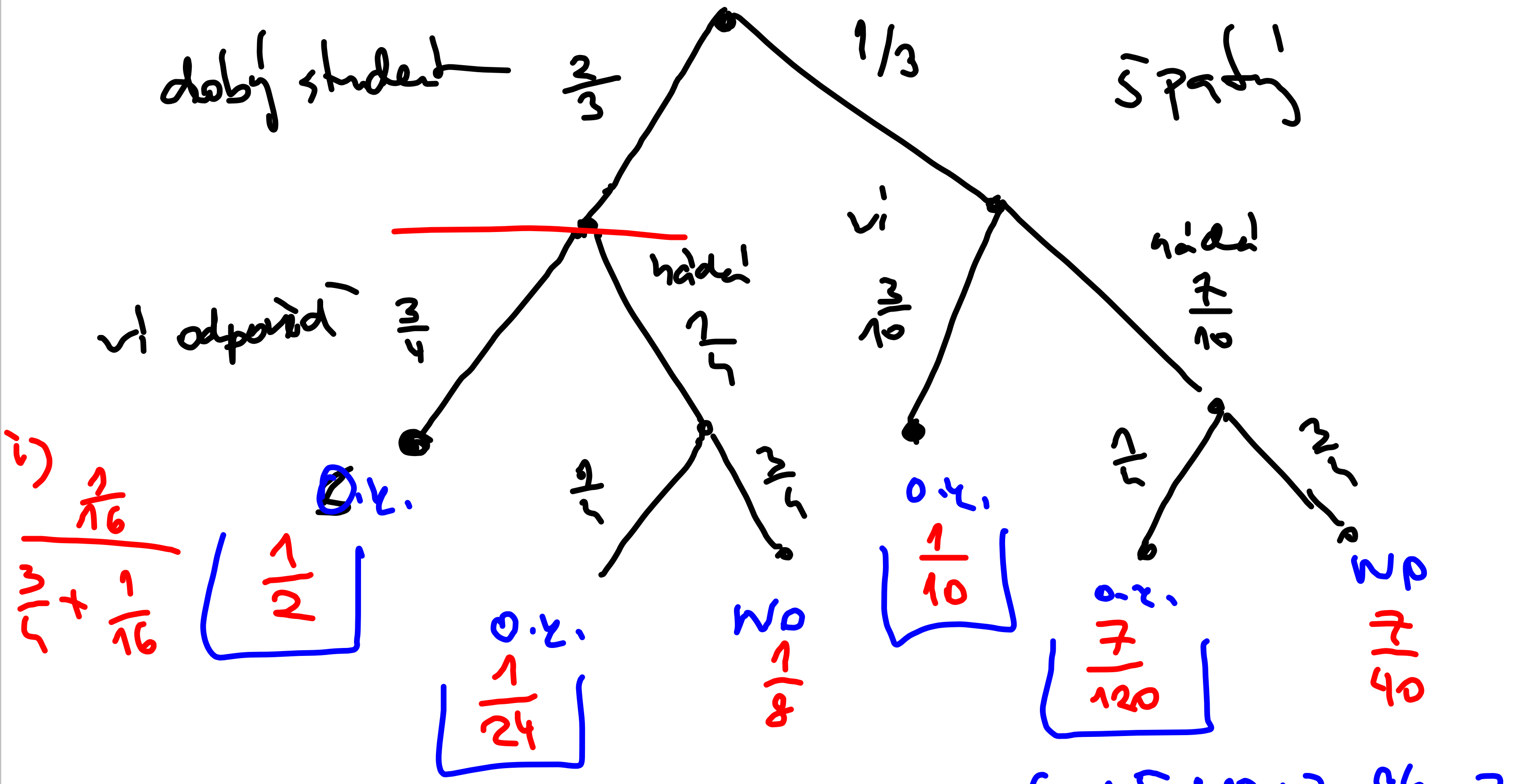
$$P(A \cap S) = P((A \cap V \cap S) \cup (A \cap \bar{V} \cap S)) =$$

$$= P(A \cap V \cap S) + \underline{P(A \cap \bar{V} \cap S)} =$$

$$= \underbrace{P(S \mid A \cap V)}_{1} \cdot \underbrace{P(A \cap V)}_{\substack{P(V \mid A) \cdot P(A) \\ 0{,}75 \cdot 2/3}} + \underbrace{P(S \mid A \cap \bar{V})}_{0{,}25} \cdot \underbrace{P(A \cap \bar{V})}_{\substack{P(\bar{V} \mid A) \cdot P(A) \\ 0{,}25 \quad 2/3}}$$

$$= 0{,}75 \cdot \frac{2}{3} + 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow P(\bar{V} \mid S \cap A) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}(0{,}75 + 0{,}25 \cdot 0{,}25)} = \frac{0{,}25^2}{0{,}75 + 0{,}25^2}$$



S ... zodpovězena správně $\quad P(S) = \frac{60+5+12+7}{120} = \frac{84}{120} = \frac{7}{10}$

i) $\frac{1}{24} \Big/ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{24}\right) = \frac{1}{13}$

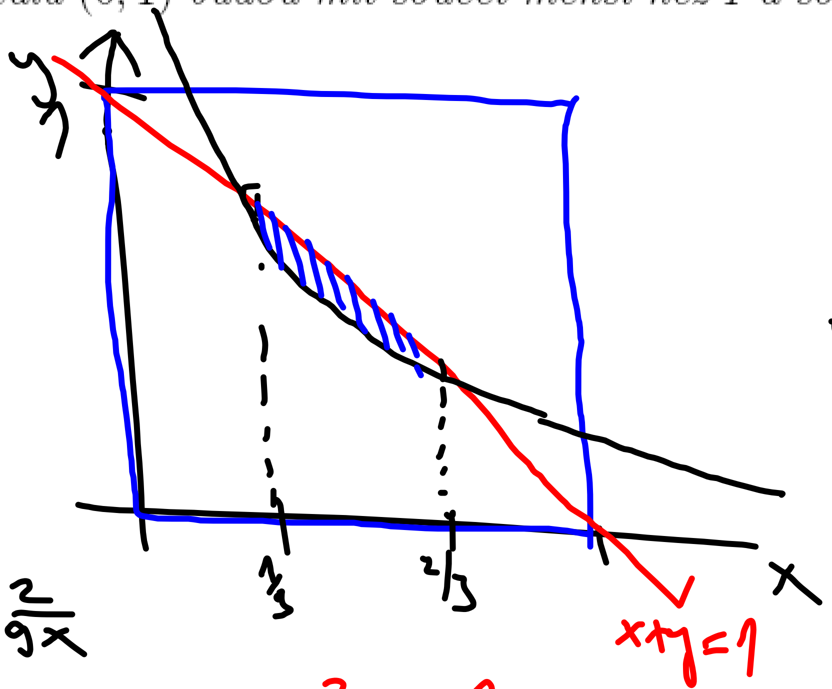
ii) $\frac{7}{120} \Big/ \left(\frac{1}{10} + \frac{7}{120}\right) = \frac{7}{19}$

iii) $\dfrac{\frac{1}{24} + \frac{7}{120}}{\frac{7}{10}} = \frac{12}{84} = \frac{1}{7}$

Příklad 53. *Osoby X a Y přijdou na smluvené místo kdykoliv mezi 9.00 a 10.00 (okamžiky příchodu jsou nezávislé a stejně možné během celého intervalu). Určete pravděpodobnost, že:*

1. *první z příchozích nebude muset na druhého čekat déle než 10 minut,*
2. *osoba Y přijde až jako druhá, jestliže přijde po 9.30.*

Příklad 54. *Jaká je pravděpodobnost, že dvě náhodně zvolená čísla z intervalu* $(0, 1)$ *budou mít součet menší než 1 a součin větší než* $2/9$*?*



$y > \frac{2}{9x}$

$\mu(\Omega) = 1$

$A = \{[x,y] \in \Omega;\ x+y<1,\ xy > \frac{2}{9}\}$

$x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{9\cdot\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$

$$\mu(A) = \int_{1/3}^{2/3} (1-x) - \frac{2}{9x}\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{9}\ln|x|\right]_{1/3}^{2/3} =$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9}\ln\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{18} - \frac{2}{9}\ln\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{12-4-6+1}{18} - \frac{2}{9}\ln 2 = \frac{1}{6} - \frac{2}{9}\ln 2$$

Příklad 55. *V lese tvaru trojúhelníka s vrcholy v bodech* $(-1, 0), (1, 0)$ *a* $(0, \sqrt{3})$ *se ztratilo dítě. Pravděpodobnost výskytu dítěte v určité části lesa je úměrná velikosti této části, nikoliv umístění této části. Určete*

1. *rozdělení vzdálenosti dítěte od zvolené strany lesa,*
2. *rozdělení vzdálenosti dítěte od nejbližší strany lesa.*

Příklad 56 (Buffonova úloha). *Rovina je rozdělena rovnoběžkami umístěnými rovnoměrně ve vzdálenosti d. Do roviny je náhodně umístěna jehla délky $l < d$. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne některou rovnoběžku.*