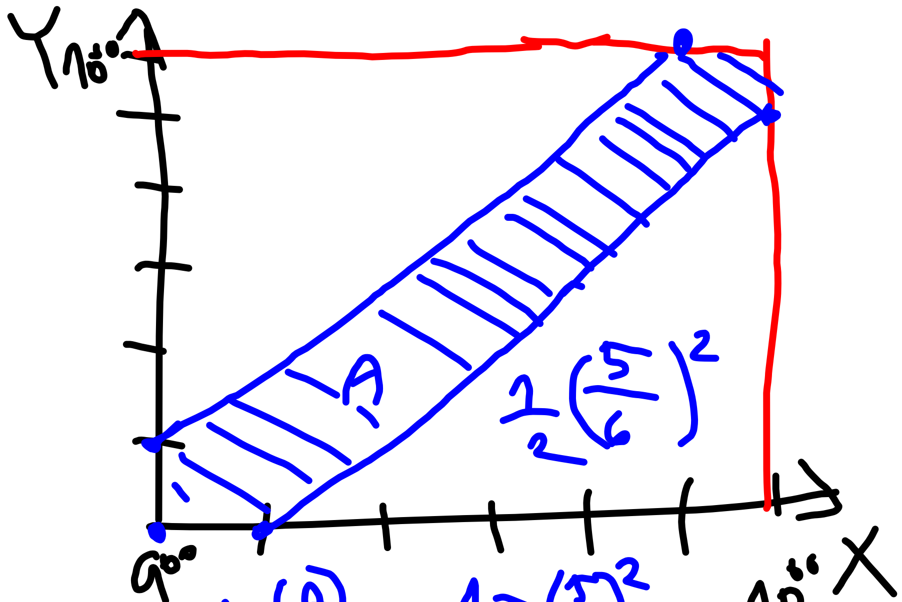
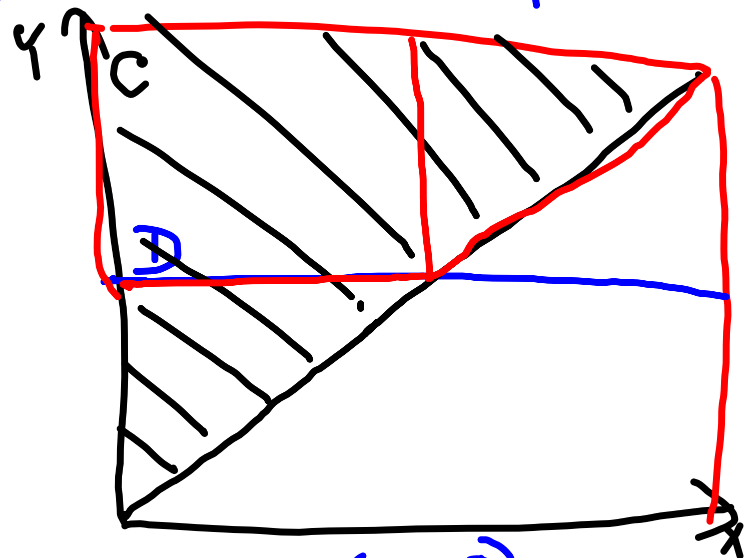
Příklad 54. *Osoby X a Y přijdou na smluvené místo kdykoliv mezi 9.00 a 10.00 (okamžiky příchodu jsou nezávislé a stejně možné během celého intervalu). Určete pravděpodobnost, že:*

1. *první z příchozích nebude muset na druhého čekat déle než 10 minut,* A
2. *osoba Y přijde až jako druhá, jestliže přijde po 9.30.*

C ... Y přijde 2.

ad 2. D ... Y po 9^{30}





ad 1. $\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}{1} = \frac{11}{36}$

$P(C|D) = \frac{P(C\cap D)}{P(D)} = \frac{3/8}{1/2} = \frac{3}{4}$

Písemka 1st. D, př. 5

$\exists$ homomorfismus

$$(\mathbb{C}^\times, \cdot) \to (\mathbb{Z}_{12}^\times, \cdot)$$

$$\{1, 5, 7, 11\}$$

$$a \mapsto \overline{5}$$

$\sqrt{a} \mapsto c$, kde $c^2 = 5$, takový v $\mathbb{Z}_{12}^\times$ neexistuje

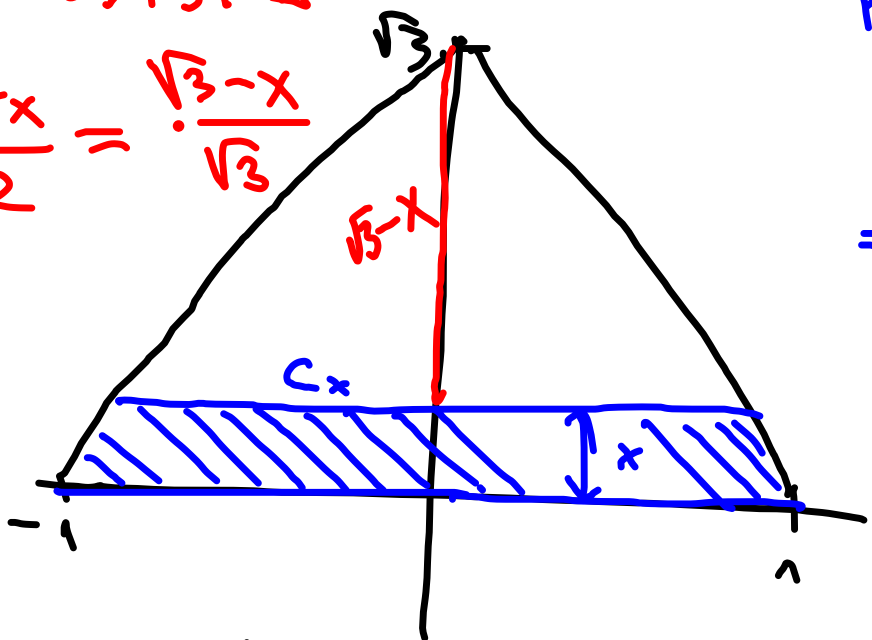
Příklad 55. *V lese tvaru trojúhelníka s vrcholy v bodech $(-1,0)$, $(1,0)$ a $(0,\sqrt{3})$ se ztratilo dítě. Pravděpodobnost výskytu dítěte v určité části lesa je úměrná velikosti této části, nikoliv umístění této části. Určete*

1. *rozdělení vzdálenosti dítěte od zvolené strany lesa,*
2. *rozdělení vzdálenosti dítěte od nejbližší strany lesa.*

$\boxed{\text{pro } x \in (0, \sqrt{3})}$

podobnost Δ:

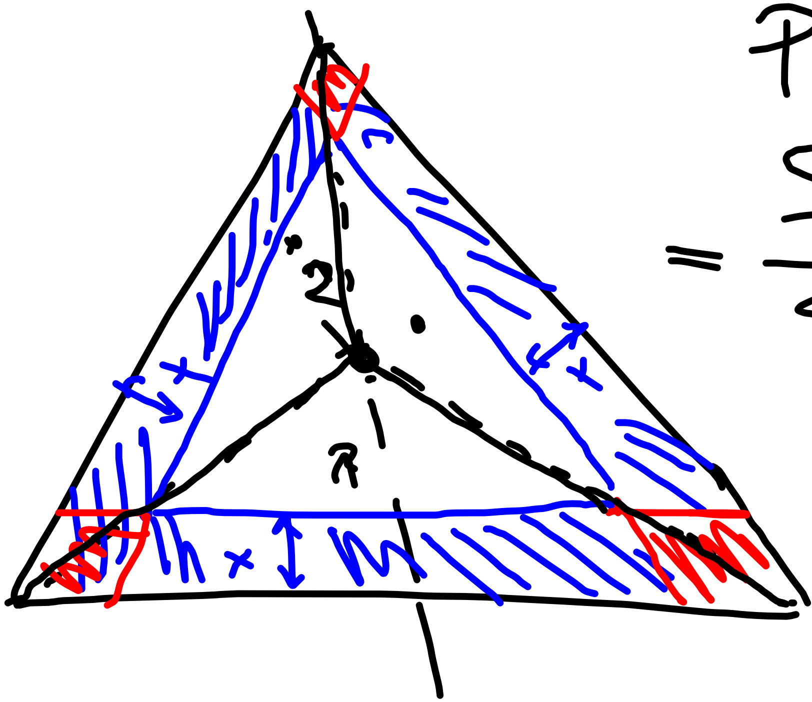
$$\frac{c_x}{2} = \frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}}$$



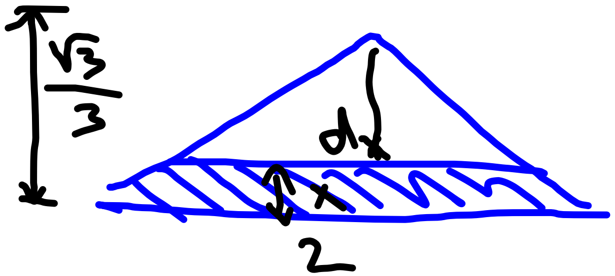
rovnostranný Δ

ad 1. $$P(X \leq x) = \frac{S_{\text{▱}}}{S_\Delta} = \frac{\frac{2+c_x}{2} \cdot x}{\sqrt{3}} = \frac{x \cdot \left(1 + \frac{c_x}{2}\right)}{\sqrt{3}} = \frac{x \cdot \left(1 + 1 - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} = x \cdot \frac{2 - \frac{x}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} x - \frac{x^2}{3}$$

$x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$



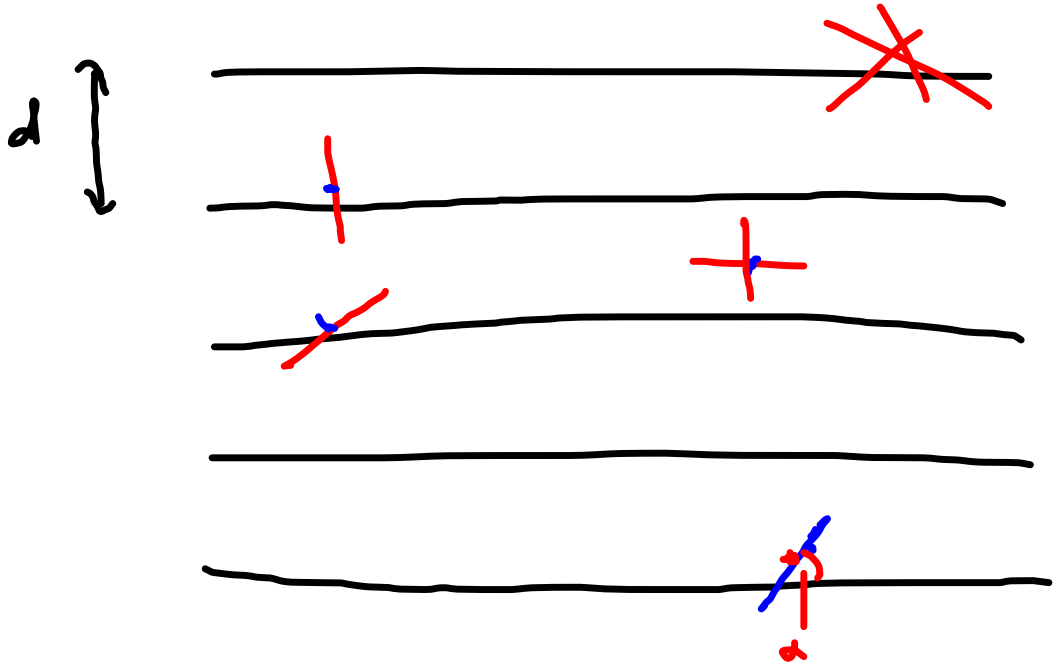
$$P(Y \leq x) = \frac{S_{▲}}{S_{\triangle}} = \frac{3 \cdot x\,(2-\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}x - 3x^2$$

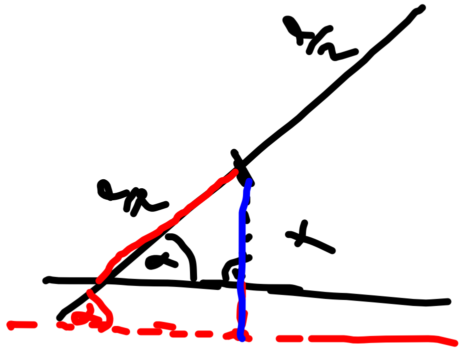


$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - x}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{d_x}{2}$$

$$S_{⏢} = \frac{2 + d_x}{2} \cdot x = \left(1 + \frac{d_x}{2}\right)x = (2 - \sqrt{3}x)\,x$$

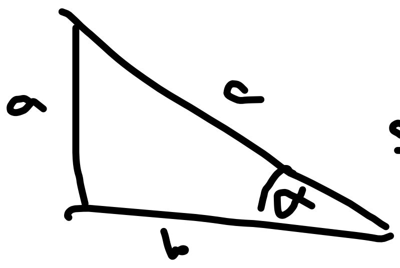
Příklad 56 (Buffonova úloha). *Rovina je rozdělena rovnoběžkami umístěnými rovnoměrně ve vzdálenosti d. Do roviny je náhodně umístěna jehla délky $l < d$. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne některou rovnoběžku.*





jehla protne přímku

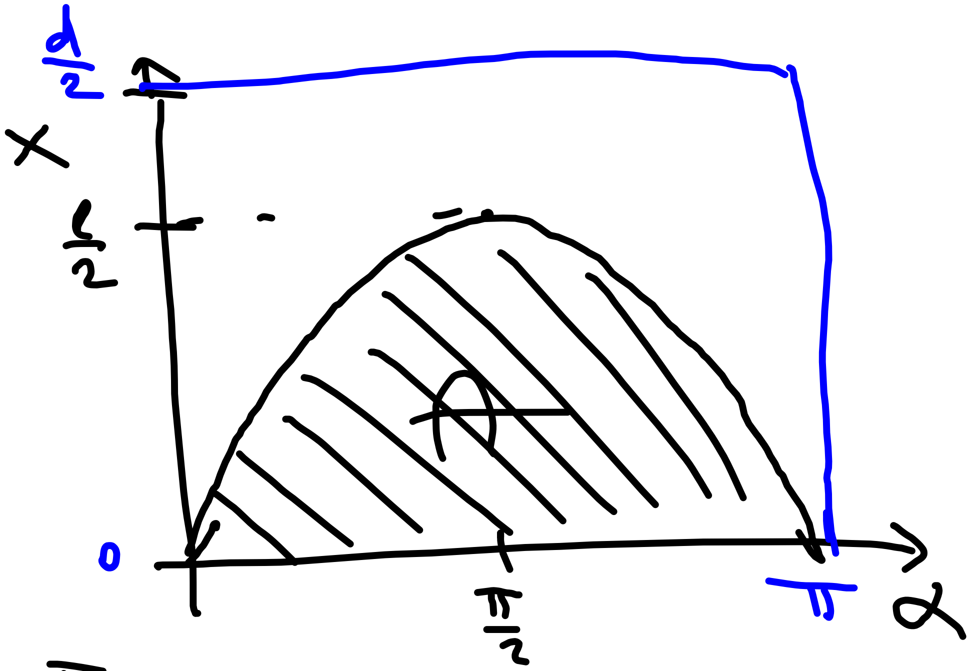
$\iff x \leq \frac{\ell}{2} \cdot \sin\alpha$



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$a = c \sin\alpha$

$c = a/\sin\alpha$



příznivé výsledky

$x \leq \frac{l}{2} \cdot \sin\alpha$

$$\int_0^{\pi} \frac{l}{2} \cdot \sin\alpha \, d\alpha = \frac{l}{2}\Big[-\cos\alpha\Big]_0^{\pi} = \frac{l}{2} \cdot \big(-(-1)-(-1)\big)$$

$$= l$$

$$P(A) = \frac{l}{\pi \cdot \frac{d}{2}} = \underline{\underline{\frac{2l}{\pi d}}}\,.$$

Příklad 58. *Třikrát nezávisle na sobě hodíme mincí. Náhodná veličina X udává počet hlav, které padnou při těchto hodech. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny X.*

P

O O O $X = 0$ $P(X=0) = \frac{1}{8} = f(0)$

P O O
O P O $X = 1$ $P(X=1) = \frac{3}{8} = f(1)$
O O P

P P O
P O P $X = 2$ $P(X=2) = \frac{3}{8} = f(2)$
O P P

P P P $X = 3$ $P(X=3) = \frac{1}{8} = f(3)$

$$F(y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y < 0 \\ \frac{1}{8} & y \in \langle 0, 1) \\ \frac{1}{2} & y \in \langle 1, 2) \\ \frac{7}{8} & y \in \langle 2, 3) \\ 1 & y \geq 3 \end{cases}$$

$$F(y) = P(X \leq y)$$

Příklad 59. *Předpokládejme, že X má diskrétní rozdělení takové, že*

$$P(X = k) = c \cdot k^2 \quad pro \quad k = 1, 2, 3$$

a $P(X = k) = 0$ jinak. Určete

1. *hodnotu c,*
2. *$P(X \geq 2)$,*
3. *$P(X \in \{1, 3\})$.*

ad 1.

$$P(X=1) = f_X(1) = c \cdot 1^2 = c$$
$$P(X=2) = f_X(2) = c \cdot 2^2 = 4c$$
$$P(X=3) = f_X(3) = c \cdot 3^2 = 9c$$

$$c(1^2+2^2+3^2) = 1$$
$$\underline{\underline{c = \frac{1}{14}}}$$

ad 2. $P(X \geq 2) = f_X(2) + f_X(3) = \frac{1}{14}(4+9) = \frac{13}{14}$

ad 3. $P(X \in \{1, 3\}) = f_X(1) + f_X(3) = \frac{1}{14}(1+9) = \frac{5}{7}$

Příklad 60. *Nechť má X binomické rozdělení s parametry $n = 4, p = 2/3$. Určete rozdělení transformované náhodné veličiny $Y = (X-2)^2$ a nakreslete graf její distribuční funkce.*

$X \sim Bi\left(4, \frac{2}{3}\right)$

$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$k \in \{0,1,2,3,4\}$

$= \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4-k}$

$= \binom{4}{k} \cdot \frac{2^k}{81}$

$P(X=0) = \frac{1}{81}$

$P(X=1) = \frac{8}{81}$

$P(X=2) = \frac{24}{81}$

$P(X=3) = \frac{32}{81}$

$P(X=4) = \frac{16}{81}$

$P(Y=k) = P\left((X-2)^2 = k\right) =$

$= P\left(|X-2| = \sqrt{k}\right) =$

$= P\left(X \in \{\sqrt{k}+2, -\sqrt{k}+2\}\right)$

pro $k \neq \{4, 1, 0\}$ je $P(Y=k) = 0$

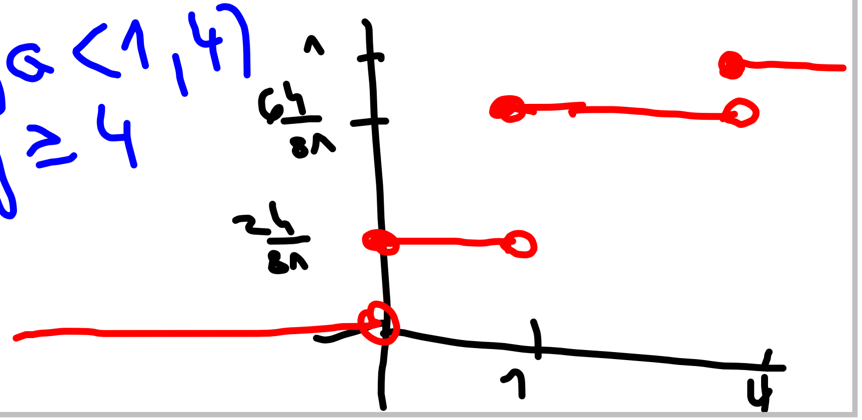
$$P(Y=0) = P(|X-2| = 0) = P(X-2) = 0$$

$$= P(X=2) = \frac{24}{81}$$

$$P(Y=1) = P(X \in \{1, 3\}) = \frac{8}{81} + \frac{32}{81} = \frac{40}{81}$$

$$P(Y=4) = P(X \in \{0, 4\}) = \frac{1}{81} + \frac{16}{81} = \frac{17}{81}$$

$$F(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{24}{81} & y \in \langle 0, 1) \\ \frac{64}{81} & y \in \langle 1, 4) \\ 1 & y \geq 4 \end{cases}$$



Příklad 61. *Náhodná veličina X má distribuční funkci*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & pro\ x \le 0 \\ c \cdot x^2 & pro\ 0 \le x < 2 \\ 1 & pro\ x \ge 2. \end{cases}$$

Jaké hodnoty může nabývat konstanta c?

neklesající!

$\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$0 \le F(x) \le 1$

$\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$

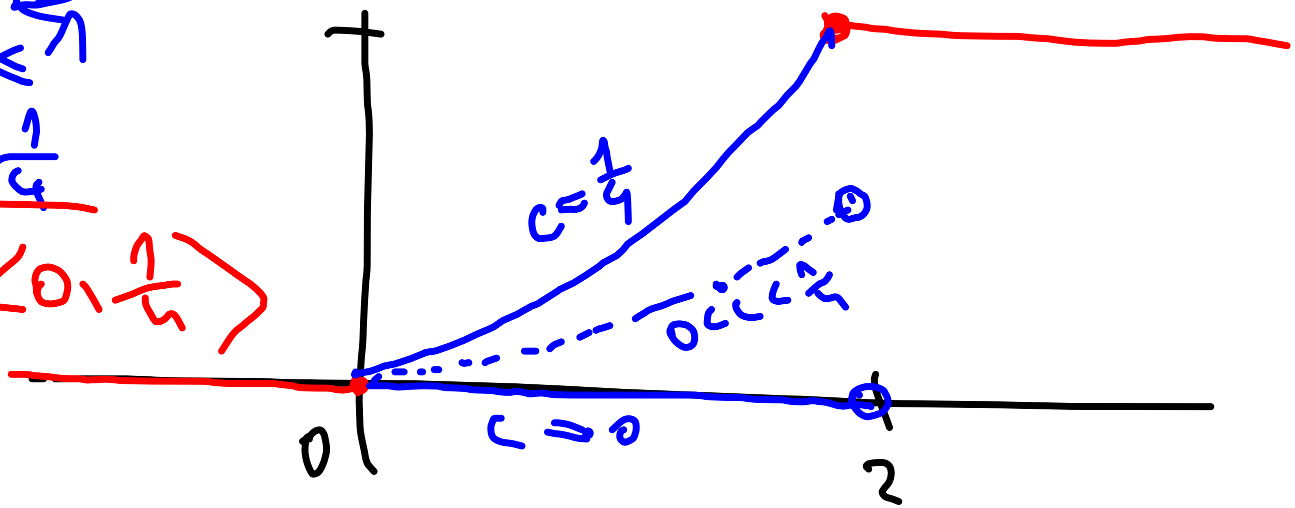
$0 \le c \cdot x^2 \le 1$

$0 \le c$

$c \cdot 4 \le 1$

$c \le \frac{1}{4}$

$c \in \langle 0, \frac{1}{4} \rangle$



Příklad 63. *Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou hustotami (mimo vymezený interval je vždy funkce nulová, c je vhodná konstanta – v případě, že jde o hustotu, tuto konstantu určete):*

1. cx *pro* $x \in (0,1)$,
2. cx *pro* $x \in (-1,2)$,
3. $cx \sin x$ *pro* $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
4. ce^x *pro* $x \in (0,\infty)$,
5. ce^{-x} *pro* $x \in (0,\infty)$,
6. $\frac{c}{1+x^2}$.

F ... distr. funkce, f .. hustota $\quad \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

$P(x_0 < X \leq x_1) = F(x_1) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$

ad 1. $1 = \int_0^1 c \cdot x\,dx = c \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{c}{2} \Rightarrow \underline{c = 2}$

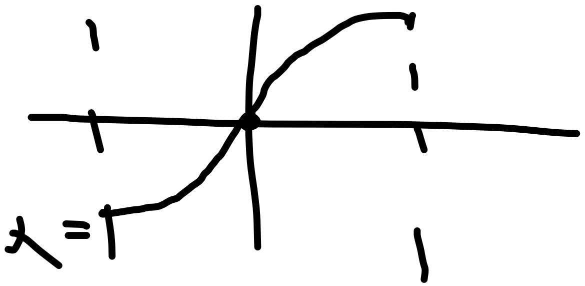
ad 2. $1 = \int_{-1}^{2} \underline{cx\,dx} = c \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2}c \rightarrow c = \frac{2}{3}$

není hustota, $\underline{f(x) \geq 0 \ \forall x \in \langle -1, 2 \rangle} \Rightarrow \underline{c = 0}$

ad 3. $f(x) = c\cdot x\cdot \sin x \qquad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$x \ge 0 \Leftrightarrow \sin x \ge 0$ pro — " —

$c \ge 0$



$$1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} c\cdot x\cdot \sin x\,dx = c\cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cdot \sin x\,dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{vmatrix} = c\cdot\Big[\underline{-x\cos x} + \sin x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= c\cdot(1-(-1)) = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$f(x) = \frac{1}{2}x\cdot\sin x$ je hustota

4. $f(x) = c \cdot e^{x}$ pro $x \in (0, \infty)$

$f(x) \geq 0$ pro $c \geq 0$

$1 = \int_0^\infty c \cdot e^x \, dx = c \cdot \left[e^x \right]_0^\infty = \infty$ pro $c > 0$

$\int_0^\infty 0 \, dx = 0$ pro $c = 0$.

Nejde o hustotu pro žádné $c \in \mathbb{R}$

5. $f(x) = c \cdot e^{-x}$ pro $x \in (0, \infty)$

$f(x) \geq 0$ pro $c \geq 0$.

$1 = \int_0^\infty c \cdot e^{-x} dx = c \cdot \left[- e^{-x} \right]_0^\infty = c \cdot \left(0 - (-1) \right) =$

$= c \Rightarrow c = 1$

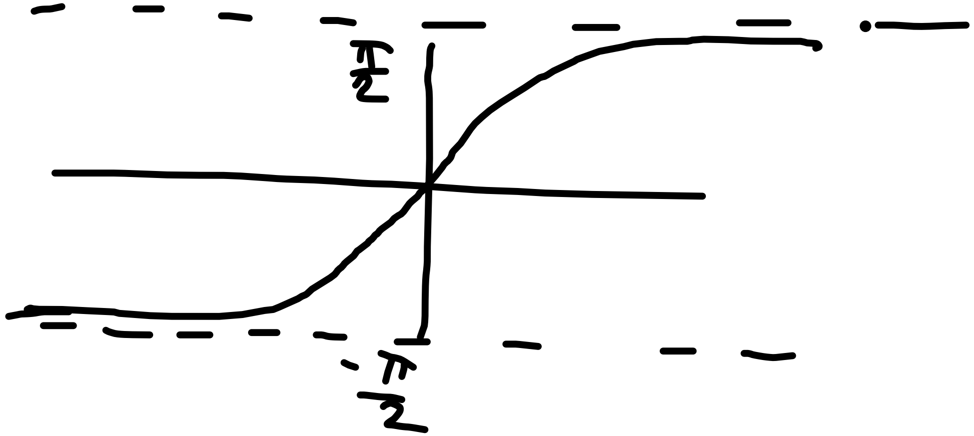
$f(x) = e^{-x}$ je hustota

ad 6. $f(x) = \frac{c}{1+x^2}$, kde $x \in (-\infty, \infty)$

$f(x) \geq 0$ pro $\underline{c \geq 0}$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{1+x^2}\,dx = c\left[\operatorname{arctg} x\right]_{-\infty}^{\infty} = c\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \pi \cdot c \Rightarrow c = \frac{1}{\pi}$$



$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ je

hustota nějakého rozdělení

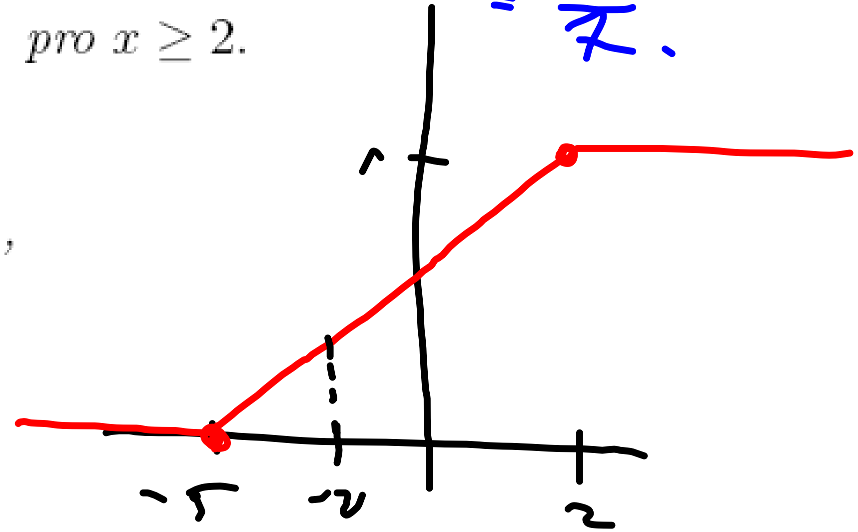
Příklad 64. *Náhodná veličina X má distribuční funkci*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq -5 \\ \frac{x+5}{7} & \text{pro } -5 \leq x < 2 \\ 1 & \text{pro } x \geq 2. \end{cases}$$

Určete:

1. *hustotu pravděpodobnosti* $f(x)$,
2. $P(-2 < X < 2)$,
3. $P(X = 2)$,
4. $P(-6 < X < 1)$.

ad 4.) $F(1) - F(-6) = \frac{6}{7}$.



ad 1) $f(x) = 0$ pro $x < -5$, $x > 2$

$f(x) = \left(\frac{x+5}{7}\right)' = \frac{1}{7}$ … $x \in (-5, 2)$

ad 2) $P(-2 < X < 2) = F(2) - F(-2) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$

ad 3) $P(X = 2) = F(2) - \lim_{x \to 2^-} F(x) = 1 - 1 = 0$