Konstrukce diskrétní pravděpodobnosti

3.1. Motivace: V Kolmogorovově axiomatické definici pravděpodobnosti se nespecifikuje jak na daném měřitelném prostoru (Ω, **A**) zkonstruovat pravděpodobnost P. Jednou z možností je zavedení tzv. diskrétní pravděpodobnosti. Používá se v situacích, kdy pouze spočetně mnoho možných výsledků náhodného pokusu má reálnou šanci na uskutečnění. Šance těchto výsledků se ohodnotí vahami a pravděpodobnost jevu se pak získá jakou součet těch vah možných výsledků, které jsou příznivé nastoupení daného jevu. Jestliže je možných výsledků pouze konečně mnoho a všechny mají stejnou šanci na uskutečnění, dostáváme klasickou pravděpodobnost jako speciální případ diskrétní pravděpodobnosti.

Konstrukce diskrétní pravděpodobnosti

3.2. Označení: Nechť $M \neq \emptyset, B \subseteq M, g: M \to (-\infty, \infty)$ je funkce, která je všude nulová s výjimkou nejvýše spočetné množiny $G \subseteq M$. Pak symbol $\sum_{x \in B} g(x)$ má tento význam:

a) Je-li $B \cap G = \emptyset$, pak $\sum_{x \in B} g(x) = 0$.

b) Je-li $B \cap G$ konečná množina, pak prvky tohoto průniku uspořádáme do konečné posloupnosti $\{x_1, \dots, x_n\}$ a $\sum_{x \in B} g(x) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)$.

c) Je-li $B \cap G$ spočetná množina, pak prvky tohoto průniku uspořádáme do spočetné posloupnosti $\{x_1, x_2, \dots\}$ a $\sum_{x \in B} g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)$, pokud tato suma absolutně konverguje. Není- li podmínka absolutní konvergence splněna, nemá uvedený symbol smysl.

Je-li $B = (-\infty, \infty)$ nebo $B = (-\infty, x\rangle$, pak píšeme $\sum_{x \in B} g(x) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x)$ $\quad \sum_{x \in B} g(x) = \sum_{t \leq x} g(t)$

Konstrukce diskrétní pravděpodobnosti

3.3. Definice (definice diskrétní pravděpodobnosti): Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, $\Gamma \subseteq \Omega$ nejvýše spočetná podmnožina základního prostoru. Funkce $\gamma : \Omega \to R$, která je kladná pouze na Γ a jinak je nulová a splňuje podmínku $\sum_{\omega\in\Omega} \gamma(\omega) = 1$, se nazývá váhová funkce. Reálná množinová funkce P: $\mathcal{A} \to$ R daná vzorcem

$\forall A \in \mathcal{A} : P(A) = \sum_{\omega\in A} \gamma(\omega)$ se nazývá diskrétní pravděpodobnost.

3.4. Věta: Diskrétní pravděpodobnost je pravděpodobnost ve smyslu axiomatické definice, tzn., že má vlastnosti P1 – P17.

Důkaz: Stačí ověřit platnost axiómů P2, P10, P15.

P2: $P(A) \geq 0$ – plyne z definice váhové funkce.

P10: $P(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} \gamma(\omega) = 1$ - splněno.

P15: $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ jsou neslučitelné $\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{\omega \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \gamma(\omega) = \sum_{\omega\in A_1} \gamma(\omega) + \sum_{\omega\in A_2} \gamma(\omega) + \ldots = P(A_1) + P(A_2) + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ - splněno.

Příklad

3.5. Příklad: Házíme kostkou, jejíž těžiště je posunuto z geometrického středu k onomu vrcholu, v němž se stýkají stěny s nejnižším ohodnocením. Vypočtěte pravděpodobnost, že padne sudé číslo.

Řešení: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$, $\mathsf{A} = \mathsf{A}_{\max} = \{A; A \subseteq \Omega\}$. V souladu se zadáním a vzhledem k symetrii úlohy volíme váhy $\gamma(\omega_4) = \gamma(\omega_5) = \gamma(\omega_6) = \frac{\vartheta}{3}$, $\frac{1}{2} < \vartheta < 1$, $\gamma(\omega_1) = \gamma(\omega_2) = \gamma(\omega_3) = \frac{1-\vartheta}{3}$.

$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}, P(A) = \gamma(\omega_2) + \gamma(\omega_4) + \gamma(\omega_6) = \frac{1-\vartheta}{3} + \frac{\vartheta}{3} + \frac{\vartheta}{3} = \frac{1+\vartheta}{3}$.

Např. pro $\vartheta = \frac{2}{3}$ dostáváme $P(A) = \frac{1+\frac{2}{3}}{3} = \frac{5}{9} = 0{,}\overline{5}$.

Klasická pravděpodobnost

3.6. Poznámka: Z matematického hlediska je přípustné zavést ještě možný výsledek ω_0 - poloha kostky na hraně. Tomuto možnému výsledku přiřadíme váhu $\gamma(\omega_0) = 0$. Tím se pravděpodobnostní prostor (Ω, $\mathcal{A}$, P) sice formálně změní, ale výsledky zůstanou stejné. Položíme-li $A_0 = \{\omega_0\}$, pak $P(A_0) = 0$. Jde o jev s pravděpodobností 0, nikoli však nemožný jev.

3.7. Definice (definice klasické pravděpodobnosti): Nechť (Ω, $\mathcal{A}$) je měřitelný prostor, Ω konečná množina.
Funkce P: $\mathcal{A}$ $\rightarrow$ R daná vzorcem

$$\forall A \in \mathcal{A} : P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

kde $m(A)$ je počet možných výsledků příznivých nastoupení jev u A a $m(\Omega)$ je počet všech možných výsledků, se nazývá klasická pravděpodobnost.

3.8. Věta: Klasická pravděpodobnost je pravděpodobnost ve smyslu axiomatické definice, tj. má vlastnosti P1 až P17. Kromě toho pro ni platí: $P(A) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$, $P(A) = 1 \Leftrightarrow A = \Omega$.

Důkaz: Klasická pravděpodobnost je speciálním případem diskrétní pravděpodobnosti s vahami $\gamma(\omega) = \frac{1}{m(\Omega)}$.

Poslední dvě implikace vyplývají z definice klasické pravděpodobnosti.

Příklad

Dřevenou, natřenou krychli o straně 4 cm rozřežeme na jednotkové krychličky. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná krychlička

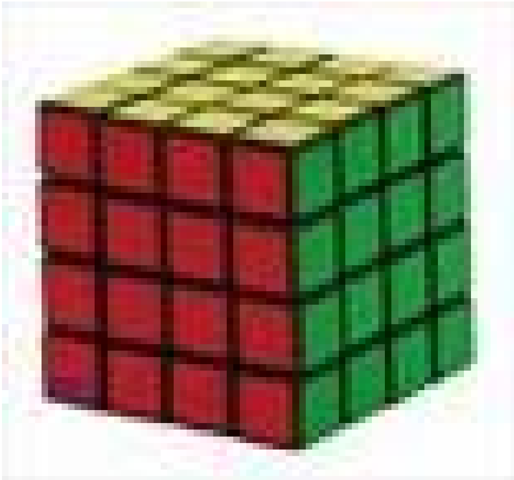
a) má právě 2 natřené stěny,

b) nemá žádnou natřenou stěnu?

Řešení:

$$P(A_1) = \frac{8 \cdot 3}{64} = \frac{3}{8}$$

$$P(A_2) = \frac{2^3}{64} = \frac{1}{8}$$



Příklad

1) Jaká je pravděpodobnost, že slovem náhodně sestaveným z písmen A, A, A, E, I, K, M, M, T, T bude MATEMATIKA?

Řešení: $$P(A) = \frac{3! \cdot 2! \cdot 2!}{10!} = \frac{1}{151200}$$

2) Jaká je pravděpodobnost, že z n lidí někteří dva slaví narozeniny ve stejný den (n < 365)?

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} = \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}$$

Přes pravděpodobnost 1/2 se dostaneme už při n = 23:

n	10	20	22	23	30	40	50	60
p	0,117	0,411	0,476	0,507	0,706	0,891	0,870	0,994

Příklad

3.9. Příklad: V dodávce 100 kusů výrobků nemá požadovaný průměr 10 kusů, požadovanou délku 20 kusů a současně nemá požadovaný průměr i délku 5 kusů. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek z této dodávky má požadovaný průměr i délku?

Řešení:

Jev A spočívá v tom, že výrobek má požadovaný průměr a jev B v tom, že výrobek má požadovanou délku. Počítáme

$$P(A \cap B) = P(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - [P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})] = 1 - \left(\frac{10}{100} + \frac{20}{100} - \frac{5}{100}\right) = 0{,}75$$

Pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek z dodávky má požadovaný průměr i délku, je 0,75.

Příklad

Jsou dány dvě různé rovnoběžné přímky *a*, *b*. Na *a* je *n* různých bodu $A_1, \ldots, A_n$, na *b* *m* různých bodu $B_1, \ldots, B_m$. Jaká je pravděpodobnost, že 3 náhodně vybrané body tvoří trojúhelník?

Řešení:

$$P(A)=\frac{\binom{n}{2}\binom{m}{1}+\binom{n}{1}\binom{m}{2}}{\binom{n+m}{3}}=\frac{\frac{mn(n-1)}{2}+\frac{nm(m-1)}{2}}{\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}}=$$

$$=\frac{3mn}{(m+n)(m+n-1)}$$

Příklad

Po číselné ose se posuneme o jedničku vpravo, nebo vlevo, podle toho, zda nám na minci padne rub, nebo líc. Začínáme v 0. Jaká je pravděpodobnost, že po 2n krocích budeme v 0?

Řešení: Pravděpodobnostním prostorem mohou být posloupnosti nul a jedniček délky 2n (označující kam v kterém kroku jdeme). Abychom po 2n-tém kroku stáli v nule, musíme jít v průběhu stejněkrát (tj. n krát) doleva a n krát doprava:

$$P(A) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

Např. pro n=5 (2n=10): $P(A) = \frac{\binom{10}{5}}{2^{10}} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1024} = \frac{63}{256} = 0{,}246$

Příklad

Čísla 1, . . . , n promícháme. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň jedno číslo bude na svém místě? Najděte její limitu při n →∞.

Řešení: Nechť jev A_i je „číslo i na svém místě“. Podle vzorce pro sjednocení

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = n\frac{1\cdot(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2}\frac{1\cdot 1\cdot(n-2)!}{n!} + \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}\frac{1\cdot 1\ldots 1}{n!} = -\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = -\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \to -e^{-1}+1.$$

Příklad

3.10. Příklad: Z množiny $\{a_1,\dots,a_n\}$ zvané základní soubor rozsahu n vybereme k-krát po jednom prvku, který vždy vrátíme zpět. Získáme uspořádanou k-tici $[a_{i_1},\dots,a_{i_k}]$, která se nazývá uspořádaný výběrový soubor rozsahu k s vracením. Předpokládáme, že v základním souboru je právě r prvků označeno, $r \le n$. Zavedeme jevy A_1, B_1, C_1 takto:

A_1 … jev, že každý z prvků základního souboru se ve výběrovém souboru ocitne nejvýše 1x,
B_1 … jev, že předem pevně daný prvek základního souboru se ve výběrovém souboru ocitne aspoň 1x,
C_1 … jev, že ve výběrovém souboru se ocitne právě x označených prvků, $x \le k$.

Řešení:

Ω_1 … množina všech uspořádaných k-tic utvořených z prvků $a_1,\dots,a_n$, kde se prvky mohou opakovat, $m(\Omega_1) = n^k$.

Jevu A_1 jsou příznivé ty k-tice, kde se prvky neopakují, tedy $m(A_1) = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$.

$$P(A_1) = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = \prod_{i=1}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)$$

$\overline{B_1}$ … jev, že předem pevně daný prvek základního souboru se do výběrového souboru vůbec nedostane.

Jevu $\overline{B_1}$ jsou příznivé ty k-tice, ve kterých se daný prvek vůbec nevyskytuje. Je zřejmé, že $m(\overline{B_1}) = (n-1)^k$. Pak

$$P(B_1) = 1 - P(\overline{B_1}) = 1 - \frac{(n-1)^k}{n^k} = 1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^k.$$

Jevu C_1 jsou příznivé ty k-tice, které mají na x místech označené prvky a na zbylých k-x místech neoznačené prvky. Pak $m(C_1) = r^x(n-r)^{k-x}\binom{k}{x}$, $P(C_1) = \dfrac{\binom{k}{x} r^x (n-r)^{k-x}}{n^k} = \binom{k}{x}\left(\frac{r}{n}\right)^x\left(1-\frac{r}{n}\right)^{k-x}$.

Příklad

3.11. Příklad: Za jinak stejných podmínek jako v př. 3.10. nevracíme vybrané prvky zpět do základního souboru (předpokládáme, že $k \le n, x \le r$). Získanou uspořádanou k-tici nazveme uspořádaný výběrový soubor rozsahu k bez vracení. Jevy A_2, B_2, C_2 jsou definovány stejně jako v př. 3.10. Vypočtěte jejich pravděpodobnosti.

Řešení:

Ω_2 … množina všech uspořádaných k-tic utvořených z prvků $a_1, \ldots, a_n$, kde se prvky nemohou opakovat,

$$m(\Omega_2) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

$$A_2 = \Omega_2, P(A_2) = 1$$

$$P(B_2) = 1 - P(\overline{B_2}) = 1 - \frac{\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}}{\frac{n!}{(n-k)!}} = 1 - \frac{n-k}{n} = \frac{k}{n}$$

$$P(C_2) = \frac{\frac{r!}{(r-x)!} \cdot \frac{(n-r)!}{(n-r-k+x)!} \cdot \binom{k}{x}}{\frac{n!}{(n-k)!}} = \frac{\frac{k!}{x!(k-x)!} \cdot \frac{r!}{(r-x)!} \cdot \frac{(n-r)!}{(n-r-k+x)!}}{\frac{n!}{(n-k)!}} = \frac{\binom{r}{x}\binom{n-r}{k-x}}{\binom{n}{k}}$$

Příklad

3.12. Příklad: Za jinak stejných podmínek jako v př. 3.11. považujeme za výběrový soubor rozsahu k bez vracení nikoliv uspořádanou k-tici, ale podmnožinu $\{a_{i_1},\ldots,a_{i_n}\}$. Vypočtěte pravděpodobnosti jevů A_3, B_3, C_3.

Řešení:

Ω_3 … množina všech neuspořádaných k-tic utvořených z prvků $a_1,\ldots,a_n$, kde se prvky nemohou opakovat,

$$m(\Omega_2)=\binom{n}{k}.$$

$$A_3=\Omega_3, P(A_3)=1$$

$$P(B_3)=1-P(\overline{B_3})=1-\frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{n}{k}}=1-\frac{\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}}=1-\frac{n-k}{n}=\frac{k}{n}$$

$$P(C_3)=\frac{\binom{r}{x}\binom{n-r}{k-x}}{\binom{n}{k}}$$

Dospěli jsme ke stejným výsledkům jako v příkladě 3.11., i když jsme použili jiný model. Je to způsobeno tím, že v př. 3.11. jsme použili variace bez opakování a v př. 3.12. kombinace bez opakování. Každé kombinaci $\{a_{i_1},\ldots,a_{i_k}\}$ odpovídá právě k! variací.

Příklad

3.13. Poznámka: Nemá smysl uvažovat o kombinacích s opakováním. Model by byl nerealistický, protože možné výsledky pokusu by neměly stejnou šanci na uskutečnění. Např. kombinaci $\{a_1,\dots,a_k\}$ odpovídá k! variací (s opakováním), zatímco kombinaci $\{a_1,\dots,a_1\}$ odpovídá pouze jediná variace s opakováním.

3.14. Příklad: Nechť r_n je počet předem označených prvků v základním souboru rozsahu n. Nechť rozsah k výběrového souboru je pevný a předpokládejme, že $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r_n}{n}=\vartheta$. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty}P(C_2)=P(C_1)$ při označení $\frac{r}{n}=\vartheta$.

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}P(C_2)=\lim_{n\to\infty}\frac{\binom{r_n}{x}\binom{n-r_n}{k-x}}{\binom{n}{k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{r_n!}{x!(r_n-x)!}\cdot\frac{(n-r_n)!}{(k-x)!(n-r_n-k+x)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}}=$$

$$=\binom{k}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{r_n(r_n-1)\cdot\ldots\cdot(r_n-x+1)(n-r_n)(n-r_n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r_n-k+x+1)}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}=$$

$$=\binom{k}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{r_n}{n}\left(\frac{r_n}{n}-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{r_n}{n}-\frac{x-1}{n}\right)\left(1-\frac{r_n}{n}\right)\left(1-\frac{r_n+1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{r_n}{n}-\frac{k-x-1}{n}\right)}{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}=$$

$$=\binom{k}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{k-x}=P(C_1)$$

Příklad

3.15. Příklad: Předpokládáme, že rozsah k výběrového souboru je pevný. Vypočtěte limity pravděpodobností jevů A_1, B_1, A_2, B_2 z příkladů 3.10. a 3.11. pro $n \to \infty$.

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} P(A_1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} P(A_2) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} P(B_1) = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right] = 1 - 1 = 0, \quad \lim_{n\to\infty} P(B_2) = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = 0$$

Závěr plynoucí z příkladů 3.14. a 3.15.: Pokud je rozsah výběrového souboru konstantní a rozsah základního souboru roste nade všechny meze, stírá se rozdíl mezi výběrovým souborem s vracením a bez vracení.

Stochasticky nezávislé jevy

4.1. Motivace: Při provádění pokusu se může stát, že z informace o nastoupení či nenastoupení jednoho jevu jsme schopni odvodit, zda jiný jev nastoupí či nenastoupí, tzn., že platí jedna z inkluzí $A \subseteq B, \overline{A} \subseteq B, A \subseteq \overline{B}, \overline{A} \subseteq \overline{B}$. V takovém případě hovoříme o deterministicky závislých jevech. Jejich protipólem jsou jevy stochasticky nezávislé – informace o nastoupení či nenastoupení jednoho jevu nijak neovlivní šance, s nimiž očekáváme nastoupení jiného jevu.
V popisné statistice jsme zavedli četnostní nezávislost dvou množin G_1, G_2 v daném výběrovém souboru pomocí multiplikativního vztahu: $p(G_1 \cap G_2) = p(G_1)p(G_2)$. V počtu pravděpodobnosti požadujeme pro stochasticky nezávislé jevy A_1, A_2 splnění multiplikativního vztahu: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$. Pro tři jevy budeme požadovat, aby i jevy $A_1 \cap A_2$ a A_3 byly stochasticky nezávislé, což vede ke vztahu $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$. Tak můžeme pokračovat pro libovolný počet jevů.

4.2. Definice: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Řekneme, že jevy $A, B \in \mathcal{A}$ jsou stochasticky nezávislé (vzhledem k P), jestliže $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

Stochasticky nezávislé jevy

4.3. Věta: Pro libovolné jevy A, B $\in \mathcal{A}$ platí:

a) $\varnothing$ a A jsou stochasticky nezávislé jevy.

b) Ω a A jsou stochasticky nezávislé jevy.

c) Jsou-li A, B stochasticky nezávislé jevy, pak jsou stochasticky nezávislé též jevy $\overline{A},B$ a $A,\overline{B}$ a $\overline{A},\overline{B}$.

Důkaz:

ad a) $P(\varnothing \cap A) = P(\varnothing)P(A) : 0 = 0 \cdot P(A) = 0$

ad b) $P(\Omega \cap A) = P(\Omega)P(A) : P(A) = 1 \cdot P(A) = P(A)$

ad c) $P(\overline{A} \cap B) = P(B - (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)[1 - P(A)] = P(\overline{A})P(B)$

Tvrzení pro jevy $A,\overline{B}$ se dokáže analogicky.

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = 1 - P(A) - P(B)[1 - P(A)] =$$
$$= [1 - P(A)][1 - P(B)] = P(\overline{A})P(\overline{B})$$

Stochasticky nezávislé jevy

4.4. Definice: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Jevy $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ jsou stochasticky nezávislé (vzhledem k P), jestliže platí systém multiplikativních vztahů:

$$\forall 1 \le i < j \le n: \quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\, P(A_j) \text{ (dvojmístný multiplikativní vztah)}$$

$$\forall 1 \le i < j < k \le n: \quad P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)\, P(A_j)\, P(A_k) \text{ (trojmístný multiplikativní vztah)}$$

$$\vdots$$

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \dots P(A_n) \text{ (n-místný multiplikativní vztah)}$$

Jevy $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ jsou stochasticky nezávislé (vzhledem k P), jestliže pro všechna přirozená n jsou stochasticky nezávislé jevy $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$.

4.5. Příklad: V osudí jsou 4 lístky s číslicemi 000, 011, 110 a 101. Označme A_i jev, že na náhodně vytaženém lístku je 1 na i-tém místě. Zjistěte, zda jevy A_1, A_2, A_3 jsou stochasticky nezávislé.

Řešení: $P(A_1) = \frac{1}{2}$, $P(A_2) = \frac{1}{2}$, $P(A_3) = \frac{1}{2}$, $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4}$, $P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4}$, $P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$. Vidíme, že dvoumístné multiplikativní vztahy jsou splněny, avšak trojmístný vztah nikoli, neboť $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$ a $P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}$. Jevy A_1, A_2, A_3 nejsou stochasticky nezávislé.

Příklad

Ukázka příkladu, kdy jsou jevy po dvou nezávislé, ale jsou celkově závislé. Uvažujme náhodný pokus „hod dvěmi mincemi“, kdy sledujeme zda na mincích padl líc (L) nebo (R). Množina všech možných výsledků (elementárních jevů) je tedy $\Omega = \{LL, LR, RL, RR\}$ a všechny elementární jevy jsou stejně pravděpodobné, tj. mají pravděpodobnost $\frac{1}{4}$.

Najděte pravděpodobnost a zjistěte zda jsou nezávislé a po dvou nezávislé jevy

(a) A_1 na první mince padne líc;

(b) A_2 na druhé minci padne líc;

(c) A_3 na obou mincích padne totéž.

Řešení: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{P}(\omega_i) = 1/4$ $A_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{P}(A_1) = 1/2$
$A_2 = \{\omega_1, \omega_3\}$, $\mathcal{P}(A_2) = 1/2$
$A_3 = \{\omega_1, \omega_4\}$, $\mathcal{P}(A_3) = 1/2$
jevy A_1 a A_2 jsou nezávislé, protože $A_1 \cap A_2 = \{\omega_1\}$ a

$$\mathcal{P}(A_1 \cap A_2) = 1/4 = 1/2 \cdot 1/2$$

jevy A_1 a A_3 jsou nezávislé, protože $A_1 \cap A_3 = \{\omega_1\}$ a

$$\mathcal{P}(A_1 \cap A_3) = 1/4 = 1/2 \cdot 1/2$$

jevy A_2 a A_3 jsou nezávislé, protože $A_2 \cap A_3 = \{\omega_1\}$ a

$$\mathcal{P}(A_2 \cap A_3) = 1/4 = 1/2 \cdot 1/2$$

jevy A_1,A_2 a A_3 jsou závislé, protože $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{\omega_1\}$ a

$$\mathcal{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/4 \neq 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2$$

Příklad

Mohou být neslučitelné (disjunktní) jevy A a B nezávislé?

Řešení: $0 = P(\emptyset) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

tedy disjunktní jevy mohou být nezávislé, jen když alespoň jeden z nich má nulovou pravděpodobnost.

Stochasticky nezávislé jevy

4.6. Příklad: Zjistěte, zda existuje jev, který je stochasticky nezávislý sám se sebou.
Řešení: $P(A \cap A) = P(A)P(A)$, tedy $P(A) = P(A)^2$. To je možné jen tak, že $P(A) = 0$ nebo $P(A) = 1$.

4.7. Věta:
a) Jestliže z třídy n stochasticky nezávislých jevů vybereme libovolnou podtřídu r jevů ($2 \le r \le n$), dostaneme opět třídu stochasticky nezávislých jevů.
b) Stochastická nezávislost se neporuší, jestliže některé (nebo i všechny) jevy nahradíme jevy opačnými.
c) Jestliže z třídy n stochasticky nezávislých jevů vybereme r disjunktních podtříd jevů ($2 \le r \le n$) a členy těchto podtříd libovolně sjednotíme nebo pronikneme, pak vzniklá sjednocení a průniky jsou opět stochasticky nezávislé jevy.
d) Neslučitelné jevy nemohou být stochasticky nezávislé (pokud nemají všechny nulovou pravděpodobnost).
e) Nemožný jev je stochasticky nezávislý s každým jevem.
f) Jistý jev je stochasticky nezávislý s každým jevem.

Příklad

4.8. Příklad: Firma investovala do tří nezávislých projektů. Pravděpodobnost zisku z těchto projektů je 0,4, 0,5 a 0,7. Jaká je pravděpodobnost, že firma bude mít zisk

a) právě jedenkrát (jev A)
b) alespoň jedenkrát (jev B)
c) právě dvakrát (jev C)
d) aspoň dvakrát (jev D)
e) ze všech tří projektů (jev E)
f) ze žádného projektu? (jev F)

Řešení:

Označme A_i jev, že firma bude mít zisk z i-tého projektu, i = 1, 2, 3.

ad a)

$$P(A) = P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3) =$$

$$= 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 = 10^{-3}(60+90+210) = 0{,}36$$

ad b)

$$P(B) = 1 - P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}) = 1 - P(\overline{A_1})\,P(\overline{A_2})\,P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}09 = 0{,}91$$

ad c)

$$P(C) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3}) + P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3) + P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) =$$

$$= 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 = 10^{-3}(60+140+210) = 0{,}41$$

ad d)

$$P(D) = P(C) + P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(C) + P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = 0{,}41 + 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 =$$

$$= 0{,}41 + 0{,}14 = 0{,}55$$

ad e)

$$P(E) = P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 = 0{,}14$$

ad f)

$$P(F) = P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}) = P(\overline{A_1})\,P(\overline{A_2})\,P(\overline{A_3}) = 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 = 0{,}09$$

Pravděpodobnost a statistika na webu

Michal Friesl; výukové texty (např. Pravděpodobnost a statistika, Posbírané příklady z pravděpodobnosti a statistiky,…):
http://home.zcu.cz/~friesl/Archiv/DldTeach.html

Blanka Šedivá; Pravděpodobnost a statistika:
http://home.zcu.cz/~sediva/pse/

Michal Čihák; výukové texty:
http://www.cihak.com/michal/

Petr Otipka, Vladislav Šmajstrla; Pravděpodobnost a statistika:
http://homen.vsb.cz/~oti73/cdpast1/

Jana Novovičová; Pravděpodobnost a matematická statistika:
http://euler.fd.cvut.cz/publikace/files/skripta3.pdf