

Neklasické logiky IV –

Modálna logika Temporálna logika

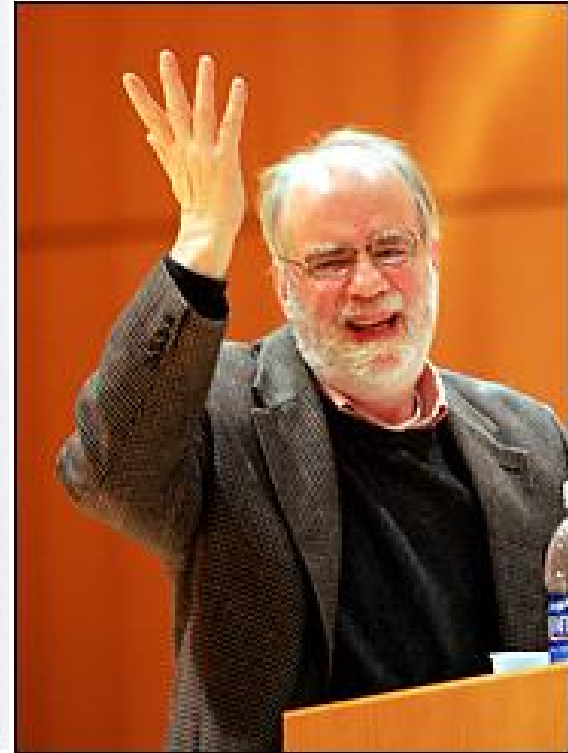
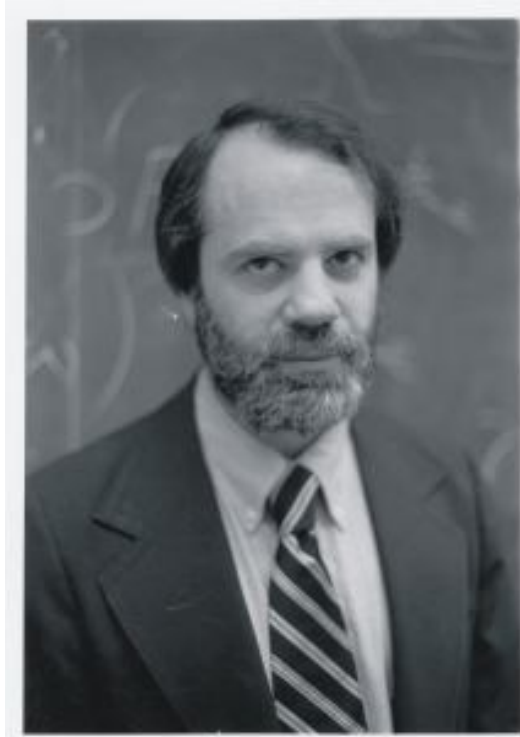
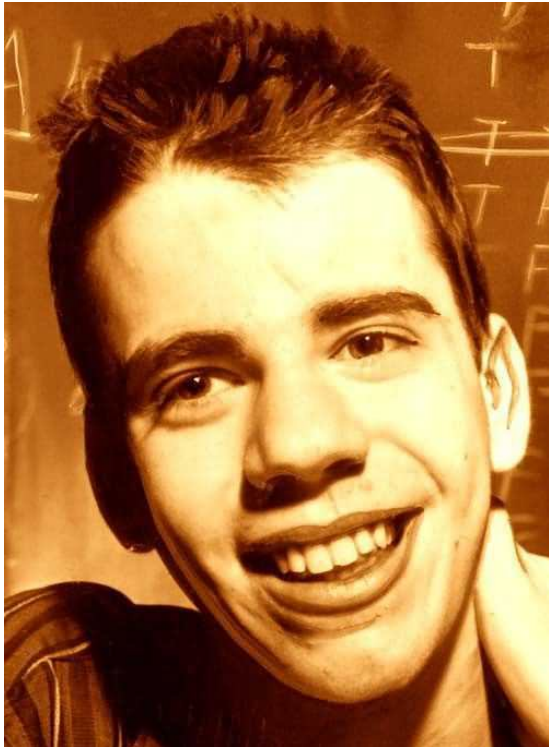
Úvodné poznámky

Modálna logika

- patrí medzi *neklasické logiky*, ktoré využívajú modálne spojky (tak unárne, ako aj binárne) pre kvalitatívnu špecifikáciu pravdivosti usudzovania.
- je to taká *modifikácia výrokovvej logiky*, ktorá obsahuje dve nové unárne spojky
 - „je nutné, aby...“
 - „je možné, aby...“.
- iné typy modálnych logík sú
 - *temporálna logika* (obsahuje modálne spojky časové charakteru ako napr. „budúci“ a „minulý“),
 - *deontická logika* (obsahuje modálne spojky morálneho charakteru ako napr. „je povinné, aby...“, „je povolené, aby...“),

Spoločným rysom modálnych logík je

- *Nefunkcionálny charakter* modálnych spojok, pravdivosť nejakého výroku φ , na ktorý je aplikovaná nejaká modálna spojka, $\clubsuit\varphi$, nie je plne určená len pravdivostnou hodnotou daného výroku φ (ako to napr. platí pre spojku negácie \neg v klasickej výrokovej logike, kde pravdivosť $\neg\varphi$ je plne určená pravdivosťou φ).
- Klasická tabuľková metóda pre pravdivostné vyhodnocovanie formúl je neaplikovateľná.



Evolution in time of Saul Kripke (*1940)

Kripkeho prístup k sémantickej interpretácii neklasických logík

- Americký filozof a logik Saul Kripke navrhol novú sémantickú interpretáciu, ktorá využíva aj iné možné svety, ako je len náš svet.
- Kripke vychádzal zo všeobecných filozofických úvah založených na predstave nemeckého filozofa 17. storočia Leibniza, ktorý sa domnieval, že Boh mohol stvoriť svet nekonečne mnohými spôsobmi.
- Pojem možného sveta inšpiroval Kripkeho pri tvorbe sémantiky modálnych výrokov. Problém určenia pravdivostnej hodnoty výroku „ φ je *vždy* pravdivé“, spočíva v tom, že pri jeho riešení sa musíme obracať aj na iné možné svety
 - *výrok φ je nutne pravdivý vtedy a len vtedy, ak φ je pravdivý vo všetkých možných svetoch*
 - *výrok φ je možné pravdivý vtedy a len vtedy, ak φ je pravdivý aspoň v jednom možnom svete.*

Modálne spojky „*nutne*“ a „*možne*“ majú podobnú interpretáciu, akú majú univerzálny resp. existenčný kvantifikátor. Rozdiel je však v tom, že kvantifikátory sú definované nad univerzom vecí alebo indivíduí, zatiaľ čo modálne spojky sa vzťahujú k možným svetom.

Kripkeho ideu si môžeme predstaviť ako školu, v ktorej sa nachádza množstvo tried, pričom v každej triede je tabuľa, na ktorej sú vypísané pravdivé výroky (napr. „Eva miluje Ivana“). Ak chceme poznať v danej triede, v ktorej sa nachádzame, pravdivostnú hodnotu nejakého modálneho výroku „*nutne* φ “, tak musíme skontrolovať platnosť tohto výroku φ vo všetkých ostatných triedach. Ak je v každej triede pravdivý, potom je aj „*nutne* φ “ pravdivý aj v danej triede. Podobne, ak chceme poznať pravdivostnú hodnotu „*možne* φ “ v danej triede, stačí nájsť aspoň jednu inú triedu, kde na tabuli je uvedený výrok φ , potom výrok „*možne* φ “ je pravdivý aj v danej triede.

- Výrok „*číslo 3 je prvočíslo*“ je pravdivý za každej situácie v každom možnom svete, t. j. je napísaný na tabuli v každej triede. Ak je tento výrok pravdivý v každom možnom svete, potom je nutne pravdivý.
- Výrok „*Havel je prezident*“ je pravdivý len v niektorých možných svetoch, potom tento výrok nie je nutne pravdivý ale len možné pravdivý.
- Výrok „*prvočíslo je deliteľné 2*“, ktorý nie je pravdivý v žiadnom možnom svete, t. j. je nutne nepravdivý.

Počiatky modálnej logiky

Modálna logika bola prvýkrát diskutovaná Aristotelom, ktorý bol asi prvý kto poukázal na skutočnosť, že nutnosť implikuje možnosť

ak (*p je nutné*), potom (*p je možné*)

Taktiež poukázal na možnosť definovať možnosť pomocou nutnosti a naopak

nie (p je možné) vtedy a len vtedy ak (p nie je nutné)
nie (p je nutné) vtedy a len vtedy ak (p nie je možné)

a taktiež zistil, že nasledujúce dva modálne výroky sú **platné**

ak ((ak p, potom q) je nutné), potom (ak (p je nutné), potom (q je nutné))
ak ((ak p, potom q) je nutné), potom (ak (p je možné), potom (q je možné))

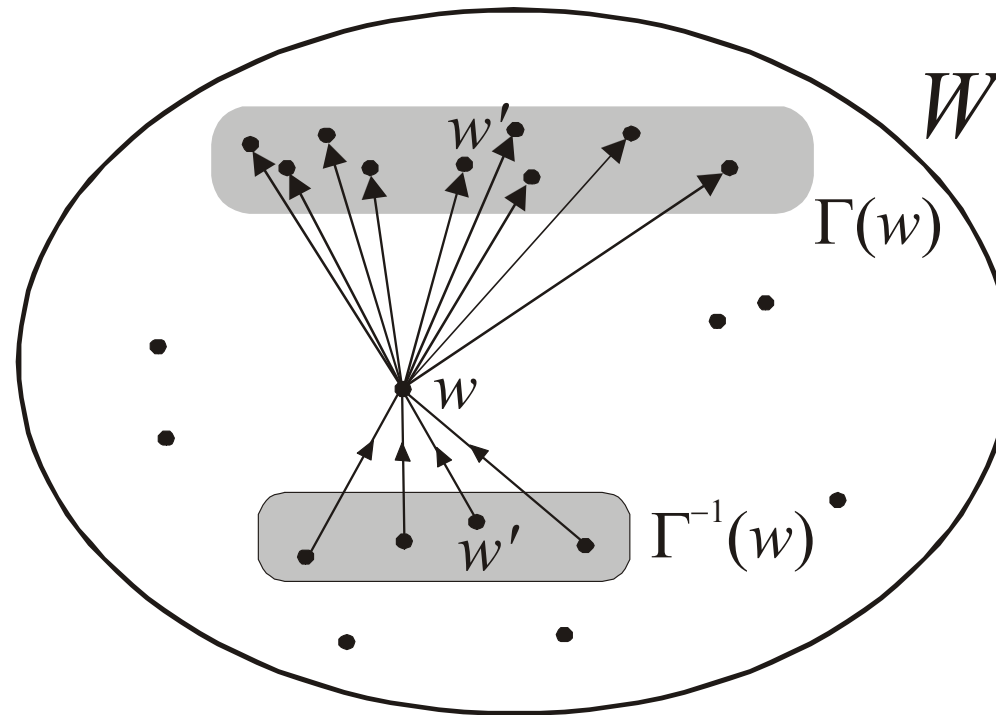
Základné pojmy Kripkovej sémantiky

Model M kripkeovskej sémantiky je definovaný ako usporiadaná trojica

$$M = (W, R, v)$$

- $W = \{w_1, w_2, \dots\}$ je neprázdna množina obsahujúca všetky alternatívne (alebo paralelne, možné,..) svety
- $R \subseteq W \times W = \{(w, w')\}$ je binárna relácia definovaná nad množinou W , jej zložky (usporiadané dvojice) (w, w') špecifikujú dostupnosť sveta w' zo sveta w .
- $v : W \times \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ je zobrazenie, ktoré ohodnotí každú atomickú formulu (výrokovú premennú $p, q, \dots, p', q', \dots \in \Omega$) pravdivostnou hodnotou, výraz $v(w, p) = 1(0)$ je interpretovaný tak, že atomická formula p je pravdivá (nepravdivá) vo svete w .

Špecifikácia relácie R pomocou množín $\Gamma(w)$ a $\Gamma^{-1}(w)$, ktoré obsahujú „susedné“ svety zo sveta w .



(1) Výrok p je *nutné* (označený $\Box p$), je pravdivý vo svete w vtedy a len vtedy, ak je pravdivý vo všetkých alternatívnych svetoch w' , ktoré sú dostupné z w

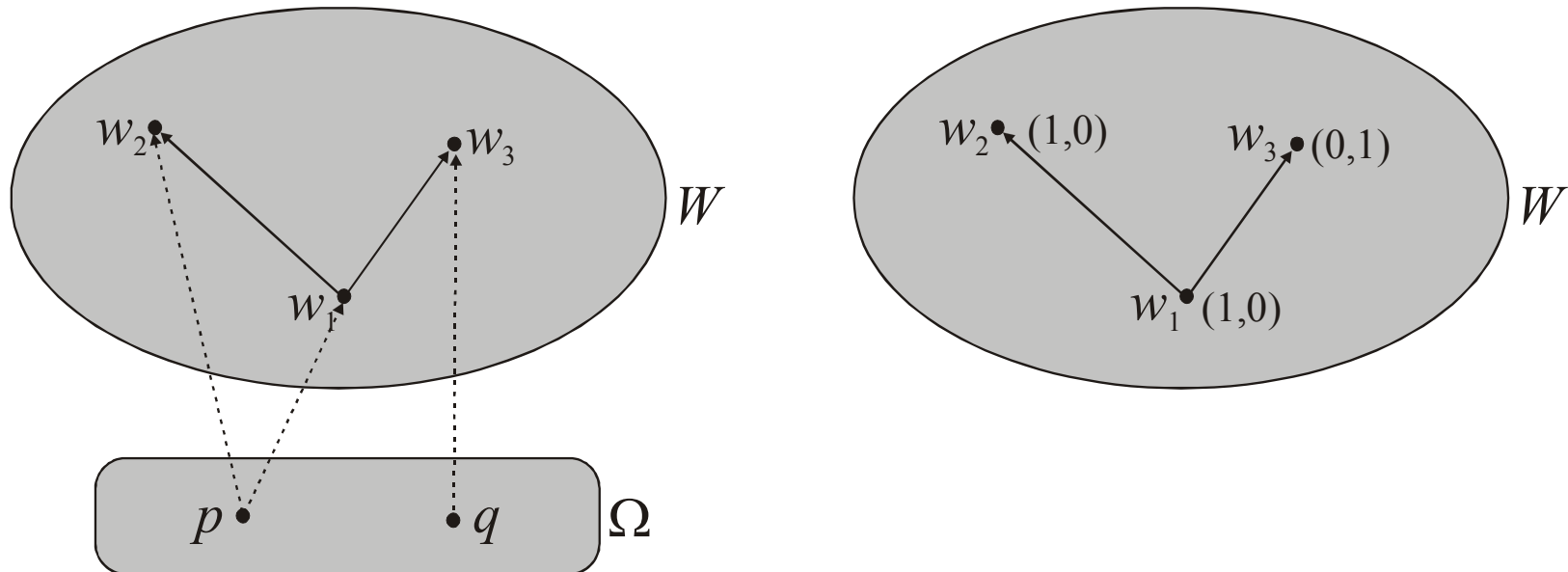
$$v(w, \Box p) = 1 \quad \text{vtt, ak v každom svete } w' \in \Gamma(w) \text{ platí } v(w', p) = 1$$
$$v(w, \Box p) = 0 \quad \text{vtt, ak existuje taký svet } w' \in \Gamma(w) \text{ kde } v(w', p) = 0$$

(2) Výrok p je *možné* (označený $\Diamond p$), je pravdivý vo svete w vtedy a len vtedy, ak je pravdivý aspoň v jednom alternatívnom svete w' , ktorý je dostupný zo sveta w

$$v(w, \Diamond p) = 1 \quad \text{vtt, ak existuje taký svet } w' \in \Gamma(w), \text{ kde } v(w', p) = 1$$
$$v(w, \Diamond p) = 0 \quad \text{vtt, ak v každom svete } w' \in \Gamma(w) \text{ platí } v(w', p) = 0$$

Príklad

$$\Omega = \{p, q\}, W = \{w_1, w_2, w_3\} \text{ a } R = \{(w_1, w_2), (w_1, w_3)\}$$



$$v(w_1, \Box p) = v(w_2, p) \wedge v(w_3, p) = 0 \wedge 1 = 0$$
$$v(w_1, \Diamond p) = v(w_2, p) \vee v(w_3, p) = 0 \vee 1 = 1$$

Definície

Formula φ je pravdivá v rámci modelu M a vo svete w je označená symbolom

$$\left(\models_w^M \varphi \right) =_{def} \left(v(w, \varphi) = 1 \right)$$

kde v je zobrazenie z modelu $M = (W, R, v)$. Negácia tejto skutočnosti je označená novým symbolom

$$\left(\not\models_w^M \varphi \right) =_{def} \left(v(w, \varphi) = 0 \right)$$

Ohodnotenie pravdivosti formuly φ v modeli M a vo svete w je rekurentne určené pomocou jej podformúl:

(1) Negácia

$$\begin{aligned} (v(w_1, \neg\varphi) = 1) & \text{ vtt } (v(w_1, \varphi) = 0) \\ (v(w_1, \neg\varphi) = 0) & \text{ vtt } (v(w_1, \varphi) = 1) \end{aligned}$$

(2) Konjunkcia

$$\begin{aligned} (v(w_1, \varphi \wedge \psi) = 1) & \text{ vtt } (v(w_1, \varphi) = 1 \text{ a } v(w_1, \psi) = 1) \\ (v(w_1, \varphi \wedge \psi) = 0) & \text{ vtt } (v(w_1, \varphi) = 0 \text{ alebo } v(w_1, \psi) = 0) \end{aligned}$$

(3) Disjunkcia

$$\begin{aligned} (v(w_1, \varphi \vee \psi) = 1) & \text{ vtt } (v(w_1, \varphi) = 1 \text{ alebo } v(w_1, \psi) = 1) \\ (v(w_1, \varphi \vee \psi) = 0) & \text{ vtt } (v(w_1, \varphi) = 0 \text{ a } v(w_1, \psi) = 0) \end{aligned}$$

(4) Implikácia

$$\begin{aligned} (v(w_1, \varphi \Rightarrow \psi) = 1) & \text{ vtt } (v(w_1, \varphi) = 0, \text{ alebo } v(w_1, \psi) = 1) \\ (v(w_1, \varphi \Rightarrow \psi) = 0) & \text{ vtt } (v(w_1, \varphi) = 1, \text{ a } v(w_1, \psi) = 0) \end{aligned}$$

(5) Modálna spojka \Box

$$\begin{aligned} (v(w_1, \Box\varphi) = 1) & \text{ vtt } (\forall w_2 \in \Gamma(w_1))(v(w_2, \varphi) = 1) \\ (v(w_1, \Box\varphi) = 0) & \text{ vtt } (\exists w_2 \in \Gamma(w_1))(v(w_2, \varphi) = 0) \end{aligned}$$

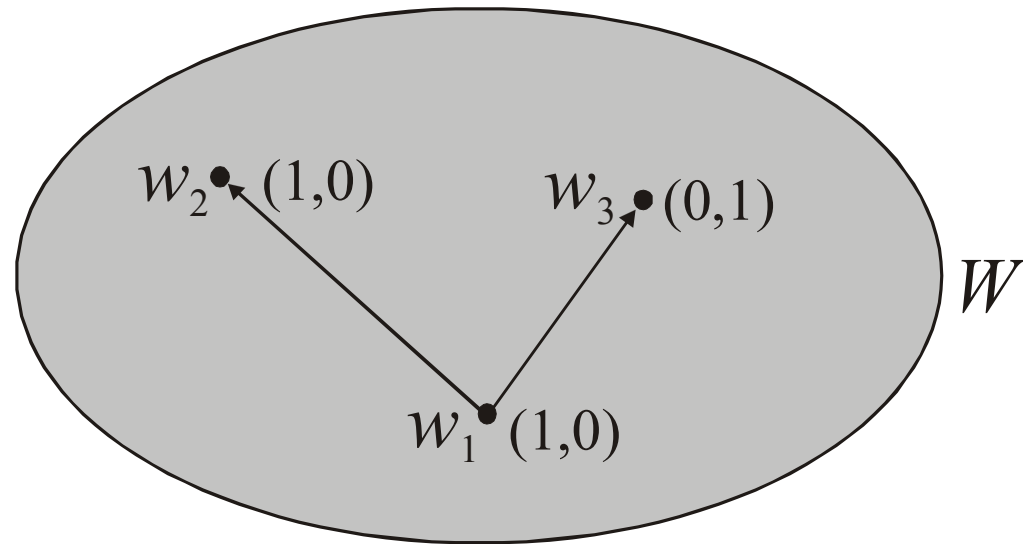
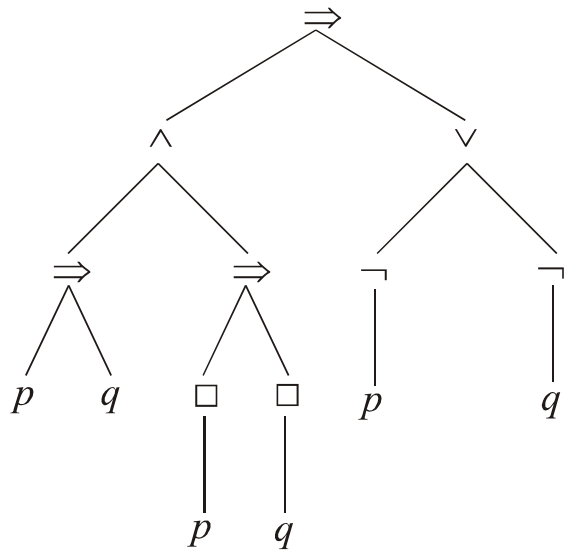
(6) Modálna spojka \Diamond

$$\begin{aligned} (v(w_1, \Diamond\varphi) = 1) & \text{ vtt } (\exists w_2 \in \Gamma(w_1))(v(w_2, \varphi) = 1) \\ (v(w_1, \Diamond\varphi) = 0) & \text{ vtt } (\forall w_2 \in \Gamma(w_1))(v(w_2, \varphi) = 0) \end{aligned}$$

Príklad

Určite pravdivosť formule

$$\varphi = ((p \Rightarrow q) \wedge (\Box q \Rightarrow \Box p)) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$$



(0) Pravdivostné hodnoty atomických formúl

$$v(p, w_1) = 1, v(p, w_2) = 1, v(p, w_3) = 0$$

$$v(q, w_1) = 0, v(q, w_2) = 0, v(q, w_3) = 1$$

(1) Vyhodnotenie modálnych výrokov $\Box p$ a $\Box q$

$$v(w_1, \Box p) = (v(w_2, p)) \wedge (v(w_3, p)) = 1 \wedge 0 = 0$$

$$v(w_1, \Box q) = (v(w_2, q)) \wedge (v(w_3, q)) = 0 \wedge 1 = 0$$

(2) Vyhodnotíme podformule $p \Rightarrow q$ a $\neg p \vee \neg q$

$$v(w_1, p \Rightarrow q) = (v(w_1, p)) \Rightarrow (v(w_1, q)) = 1 \Rightarrow 0 = 0$$

$$v(w_1, \Box p \Rightarrow \Box q) = (v(w_1, \Box p)) \Rightarrow (v(w_1, \Box q)) = 0 \Rightarrow 0 = 1$$

$$v(w_1, \neg p \vee \neg q) = (v(w_1, \neg p)) \vee (v(w_1, \neg q)) = 0 \vee 1 = 1$$

(3) Použitím oboch implikácií z predchádzajúceho kroku vyhodnotíme podformulu $(p \Rightarrow q) \wedge (\Box q \Rightarrow \Box p)$

$$v(w_1, (p \Rightarrow q) \wedge (\Box q \Rightarrow \Box p)) = (v(w_1, p \Rightarrow q)) \wedge (v(w_1, \Box q \Rightarrow \Box p)) = 0 \wedge 0 = 0$$

(4) V poslednom kroku vyhodnotíme formulu φ

$$\begin{aligned} v(w_1, \varphi) &= v(w_1, ((p \Rightarrow q) \wedge (\Box q \Rightarrow \Box p)) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)) = \\ &= (v(w_1, (p \Rightarrow q) \wedge (\Box q \Rightarrow \Box p))) \Rightarrow (v(w_1, \neg p \vee \neg q)) = 0 \Rightarrow 1 \end{aligned}$$

Môžeme teda konštatovať, že formula φ je v rámci modelu M a v jeho svete w_1 pravdivá, t.j. $\models_{w_1}^M \varphi$.

Definícia.

(1) Formula φ sa nazýva **pravdivá** v modele M ak je pravdivá v každom alternatívnom svete $w \in W$ z daného modelu

$$\left(\models^M \varphi\right) =_{def} \left(\forall w \in W\right) \left(\models_w^M \varphi\right)$$

(2) Formula φ sa nazýva **tautológia** ak je pravdivá v každom modele M

$$\left(\models \varphi\right) =_{def} \left(\forall M\right) \left(\models^M \varphi\right)$$

Falzifikácia kontradikčnosti formúl

Principiálny problém pre modálnu logiku je verifikácia toho, či daná formula φ je tautológiou, $\models \varphi$. Základná myšlienka použitej metódy (falzifikácie) spočíva v tom, že ukážeme, že $\not\models_w^M \varphi$ neplatí pre ľubovoľný model M a svet w , t.j. musí platiť $\models \varphi$, formálne

$$\forall M \forall w \left(\not\models_w^M \varphi \right) \Rightarrow \left(\models \varphi \right)$$

Príklad

Dokážte tautologičnosť formule $\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$

1. $v(w_1, \Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)) = 0$
2. $v(w_1, \Box(\varphi \Rightarrow \psi)) = 1$
3. $v(w_1, (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)) = 0$ (2, 3 vznikli z 1)
4. $v(w_2, \varphi \Rightarrow \psi) = 1$ (vznikol z 2 odstránením \Box)
5. $v(w_1, \Box\varphi) = 1$
6. $v(w_1, \Box\psi) = 0$ (5 a 6 vznikli z 3)
7. $v(w_2, \varphi) = 1$ (vzniklo z 5 odstránením \Box)
8. $v(w_2, \psi) = 0$ (vzniklo z 6 odstránením \Box)
6. $v(w_2, \varphi) = 0$ alebo $v(w_2, \psi) = 1$ (vzniklo z 4 odstránením implikácie)

Sémantické tablo dôkazu

$$v(w_1, \Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)) = 0$$

|

$$v(w_1, \Box(\varphi \Rightarrow \psi)) = 1$$

$$v(w_1, \Box\varphi \Rightarrow \Box\psi) = 0$$

|

$$v(w_2, \varphi \Rightarrow \psi) = 1$$

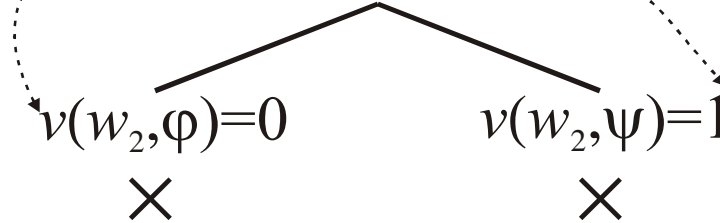
$$v(w_1, \Box\varphi) = 1$$

$$v(w_1, \Box\psi) = 0$$

|

$$v(w_2, \varphi) = 1$$

$$v(w_2, \psi) = 0$$



Príklad

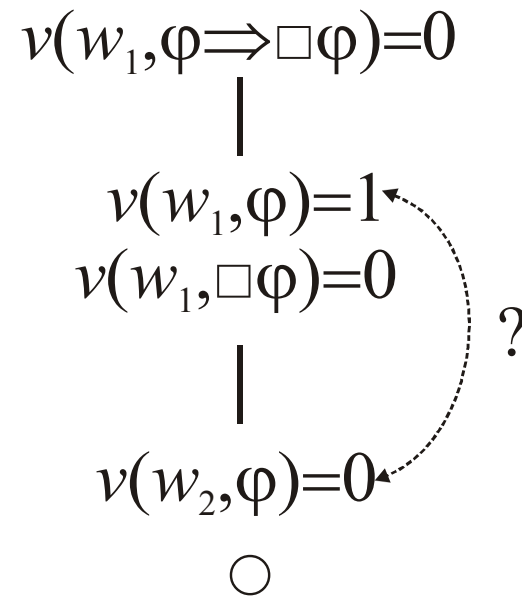
Dokážte, že formula $\varphi \Rightarrow \Box\varphi$ nie je tautológia .

1. $v(w_1, \varphi \Rightarrow \Box\varphi) = 0$
2. $v(w_1, \varphi) = 1$
3. $v(w_1, \Box\varphi) = 0$
4. $v(w_2, \varphi) = 0$

(1) $\models_{w_1}^M \varphi$, pre svet $w_1 \in W_M$

(2) $\not\models_{w_2}^M \varphi$, pre svet $w_2 \in \Gamma(w_1) \subseteq W_M$

Sémantické tablo pokusu falzifikácie formule $v(w_1, \varphi \Rightarrow \Box\varphi) = 0$.



Axiomatický výstavba modálnej logiky

Axiomatický systém výrokovej logiky je rozšírený o niektoré z ďalších axióm, ktoré už obsahujú modálne spojky

Axióm M: $\Diamond\varphi \equiv \neg\Box\neg\varphi$

Axióm K: $\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$

Axióm T: $\Box\varphi \Rightarrow \varphi$

Axióm E: $\Diamond\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi$

Axióm D: $\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$

Axióm 4: $\Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi$

Axióm B: $\neg\varphi \Rightarrow \Box\neg\Box\varphi$

V axiomatický systém modálnej logiky používa ako ďalšie pravidlo odvodzovania, okrem klasického modus ponens aj nové pravidlo

$$\frac{\varphi}{\Box\varphi}$$

Toto pravidlo je potrebné interpretovať takto: formula φ je tautológia, čiže je pravdivá pre ľubovoľný model M a jeho ľubovoľný svet w , t.j. $\models_w^M \varphi$. Pomocou tohto predpokladu (premisy) ľahko dokážeme, že aj $\Box\varphi$ je taktiež tautológia, pretože $\models_w^M \Box\varphi = (\forall w' \in \Gamma(w)) \models_{w'}^M \varphi$, ak použijeme východzí predpokladať pravdivosti φ pre každé M a w' , potom musí byť pravdivá aj $\Box\varphi$.

Postupná výstavba axiomatického systému Σ modálnej logiky

- (1) Σ je axiomatický systém výrokovej logiky (10 axióm a pravidlo modus ponenes)
- (2) Σ je rozšírený o všetky teorémy (zákony) výrokovej logiky.
- (3) Σ je rozšírený o formule, ktoré vznikajú z jeho formúl (teorémov výrokovej logiky) pomocou substitúcie tak, že premenné sú nahradené formulami obsahujúce modálne spojky (príklad: z teorému $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ je pomocou substitúcie $(p/\Box p, q/\Box q)$ novú formulu – tautológiu $\Box p \Rightarrow (\Box q \Rightarrow \Box p)$).
- (4) Σ je rozšírený o nové pravidlo „zovšeobecnenia“

$$\frac{\varphi}{\Box \varphi}$$

(5) Σ je rozšírený o vybrané axiómy modálnej logiky (M-B).

(6) Ďalšie formule v Σ sa vytvárajú štandardným postupom logického dôkazu, ak formula φ logicky vyplýva z Σ , potom

$$\vdash_{\Sigma} \varphi$$

Príklad

$$\vdash_{\Sigma} \varphi \Rightarrow \Diamond \varphi$$

1. $\vdash_{\Sigma} \Box \neg \varphi \Rightarrow \neg \varphi$ (axióm T)
2. $\vdash_{\Sigma} \neg \neg \varphi \Rightarrow \neg \Box \neg \varphi$ (kontrapozícia implikácie)
3. $\vdash_{\Sigma} \varphi \Rightarrow \neg \Box \neg \varphi$
4. $\vdash_{\Sigma} \varphi \Rightarrow \Diamond \varphi$

Príklad

$$\vdash_{\Sigma} \Box\varphi \Rightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$$

1. $\vdash_{\Sigma} \Diamond\neg\varphi \Rightarrow \neg\Box\neg\neg\varphi$ (axióm M, substitúcia $\varphi/\neg\varphi$)
2. $\vdash_{\Sigma} \Diamond\neg\varphi \Rightarrow \neg\Box\varphi$
3. $\vdash_{\Sigma} \neg\neg\Box\varphi \Rightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$
4. $\vdash_{\Sigma} \Box\varphi \Rightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$

Systémy modálnej logiky

1. Najslabší modálna logika je označená K, ktorá vznikne tak, že axiomatický systém Σ obsahuje len axióm K

$$\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$$

V tomto prípade relácia R je bez obmedzenia

2. Ak predpokladáme, že relácia R obsahuje ku každému svetu aspoň jeden alternatívny svet $\forall w \exists w' ((w, w') \in R)$, potom modálna logika D vznikne tak, že axiomatický systém Σ je rozšírený o axióm D

$$\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$$

3. Ak relácia R je reflexívna, $\forall w ((w, w) \in R)$, potom modálna logika T vznikne tak, že axiomatický systém Σ je rozšírený o axióm T

$$\Box\varphi \Rightarrow \varphi$$

4. Ak relácia R je nielen reflexívna, ale aj tranzitívna

$$\forall w \forall w' \forall w'' ((w, w'), (w', w'') \in R \Rightarrow (w, w'') \in R)$$

potom modálna logika S4 vznikne tak, že axiomatický systém Σ je rozšírený o axiomy T a 4

$$\Box\varphi \Rightarrow \varphi$$

$$\Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi$$

5. Ak je relácia R nielen reflexívna a tranzitívna, ale aj symetrická

$$\forall w \forall w' ((w, w') \in R \Rightarrow (w', w) \in R)$$

potom modálna logika S5 vznikne tak, že axiomatický systém Σ je rozšírený o axiómy T , 4 a E

$$\Box\varphi \Rightarrow \varphi$$

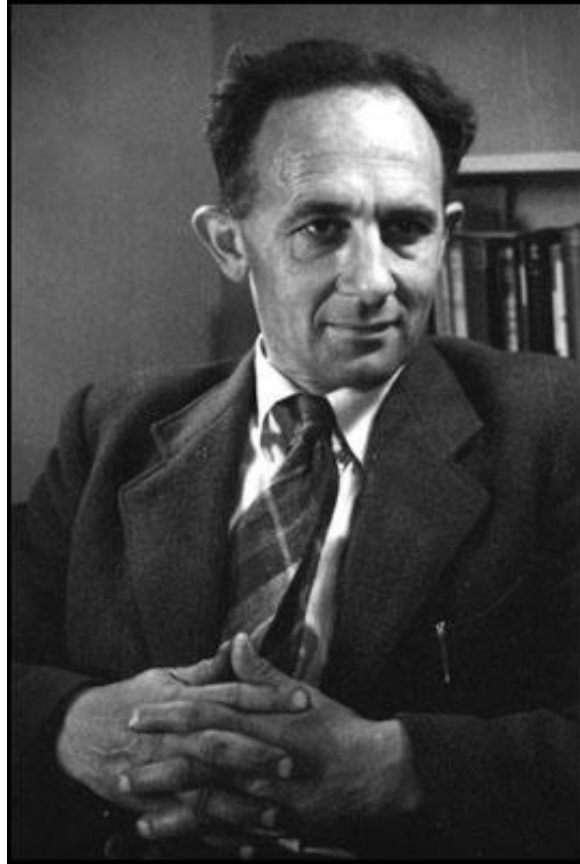
$$\Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi$$

$$\Diamond\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi$$

Záver. Kripkovská sémantika umožňuje jednoduchú klasifikáciu modálnych logík pomocou podmienok, ktoré sú požadované od relácie R .

Temporálna logika

- *Prirodzený jazyk taktiež obsahuje aj časové modality* ako napr. „vždy bude p “, „niekedy bude p “, alebo „v nasledujúcom okamžiku bude p “, kde p je nejaký „temporálny“ výrok, ktorý má vzťah k času, napr. môže meniť svoju pravdivostnú hodnotu v priebehu času.
- Nebudeme študovať temporálne spojky vzťahujúce sa do *minulosti*, pretože sú analógiou „budúcich“ temporálnych spojok.
- Temporálnou logikou ako prví sa zaoberal novozealandský teológ, filozof a logik *Arthur Prior* v polovici 20. storočia, ktorý ako skúmal logické vlastnosti temporálnych modalít „budúci“ a „minulý“.



Arthur Prior (1914-1969)

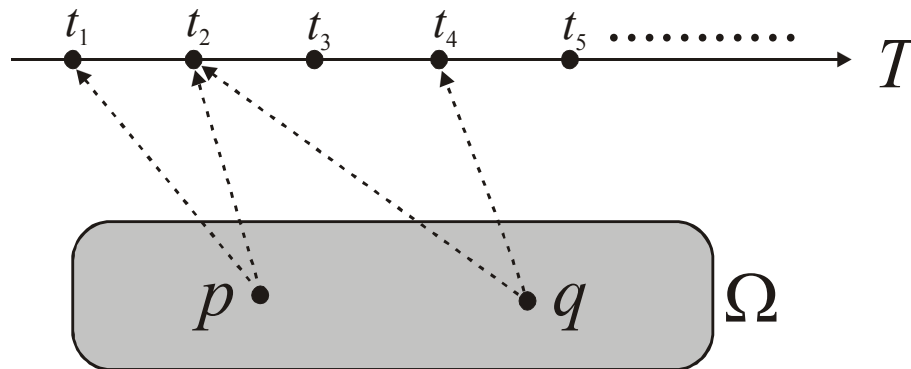
- **Temporálna logika** je efektívnym nástrojom skúmania procesov v informatike, kde jednotlivé stavy systému (počítača, programu, atď.) majú časovú následnosť a podmienenosť.
- **Kripkeho sémantika** pre temporálnu logiku poskytuje transparentnú metódu pre pravdivostné ohodnotenie formúl, ktoré špecifikujú stavy informatického systému.
- **Kripkeho model** $M = (T, v)$ je zjednodušene špecifikovaný lineárne usporiadanou množinou časových okamžikov (bodov), $T = \{t_1, t_2, t_3, \dots\}$, pričom $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \dots$
- **Zobrazenie** $v: \Omega \times T \rightarrow \{0,1\}$ ohodnotí každú výrokovú premennú p, q, \dots , $p', q', \dots \in \Omega$ pre nejaký časový okamžik $t \in T$ pravdivostnou hodnotou, ak $v(t, p) = 1(0)$, potom atomická formula p je v čase pravdivá (nepravdivá).

	p	q	r	...	p'	q'	r'	...
t_1	1	0	1	...	1	1	0	...
t_2	1	1	0	...	1	1	1	...
t_3	1	0	1	...	0	1	0	...
t_4	1	1	1	...	1	1	1	...
t_5	1	0	0	...	1	1	0	...
t_6	1	1	0	...	0	1	1	...
t_7	1	1	0	...	0	1	1	...
T			

Stav systému je špecifikovaný výrokovými premennými p , q , r , ..., ktorých pravdivostné hodnoty sa menia v čase.

Príklad

Predstavme si hypotetický systém, ktorého stavy sa menia v závislosti od diskretných časových krokov $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \dots$. Každý stav je formálne popísaný výrokov premennou z Ω , pričom ich pravdivostné hodnoty sa môžu meniť pre jednotlivé časové kroky



t	p	q
t_1	1	0
t_2	1	1
t_3	0	0
t_4	0	1
t_5	0	0
\vdots		

Unárne temporálne spojky

<i>spojka</i>	<i>význam</i>
$\Box\varphi$	<i>v budúcnosti vždy φ je splnené</i>
$\Diamond\varphi$	<i>v budúcnosti niekedy φ je splnené</i>
$\bigcirc\varphi$	<i>v nasledujúcom okamžiku φ je splnené</i>

$$v(t, \Box\varphi) = 1 \quad \text{vtt} \quad v(t', \varphi) = 1 \quad (\text{pre každé } t' \geq t)$$

$$v(t, \Diamond\varphi) = 1 \quad \text{vtt} \quad v(t', \varphi) = 1 \quad (\text{pre niektoré } t' \geq t)$$

$$v(t, \bigcirc\varphi) = 1 \quad \text{vtt} \quad v(t+1, \varphi) = 1$$

Skutočnosť, že premenná p je pravdivá v modele M a v čase t je určená takto

$$\left(\models_t^M p \right) =_{\text{def}} \left(v(t, p) = 1 \right)$$

Negáciou tohto vzťahu dostaneme

$$\left(\not\models_t^M p \right) =_{\text{def}} \left(v(t, p) = 0 \right)$$

Príklad

Uvažujme tieto dva výroky

$p = \text{Jano je študent}$

$q = \text{Jano je inžinier}$

budeme z nich vytvárať použitím temporálnych spojok nové výroky:

- (1) $p \wedge \bigcirc q = \text{Jano je študent a teraz bude inžinierom.}$
- (2) $p \wedge \square q = \text{Jano je študent a v budúcnosti isto bude inžinierom.}$
- (3) $p \wedge \diamond q = \text{Jano je študent a niekedy v budúcnosti bude inžinierom.}$
- (4) $\bigcirc p \wedge \diamond q = \text{Jano teraz ešte bude študentom a budúcnosti bude inžinierom.}$

Príklad

Pomocou temporálnych spojok budeme formulovať niektoré výroky vyskytujúce sa v špecifikáciách infromatických systémov.

- *Vzájomné vylúčenie*. Dva procesy A a B nie sú nikdy súčasne vykonávané:

$$\Box \neg (Execute(A) \wedge Execute(B))$$

- *Parciálne korektnosť*. Ak je výpočet ukončený, potom platia podmienky ukončenia

$$\Box (Finished \Rightarrow PostCondition)$$

- *Ukončenie a celková korektnosť*. Parciálna korektnosť spolu s ukončením poskytuje celkovú korektnosť

$$\Diamond Finished \wedge \Box (Finished \Rightarrow PostCondition)$$

- *Odozva na signál*. Vždy, ak systém príjme menovitý signál, potom okamžite zareaguje.

$$\Box (Trigger \Rightarrow \Diamond Response)$$

Ohodnotenie pravdivosti temporálnych elementárnych formúl v modele M a čase t je určené prostredníctvom týchto vzťahov

(1) Negácia

$$\begin{aligned} (v(t, \neg\varphi) = 1) \text{ vtt } (v(t, \varphi) = 0) \\ (v(t, \neg\varphi) = 0) \text{ vtt } (v(t, \varphi) = 1) \end{aligned}$$

(2) Konjunkcia

$$\begin{aligned} (v(t, \varphi \wedge \psi) = 1) \text{ vtt } ((v(t, \varphi) = 1) \wedge (v(t, \psi) = 1)) \\ (v(t, \varphi \wedge \psi) = 0) \text{ vtt } ((v(t, \varphi) = 0) \vee (v(t, \psi) = 0)) \end{aligned}$$

(3) Disjunkcia

$$\begin{aligned} (v(t, \varphi \vee \psi) = 1) \text{ vtt } ((v(t, \varphi) = 1) \vee (v(t, \psi) = 1)) \\ (v(t, \varphi \vee \psi) = 0) \text{ vtt } ((v(t, \varphi) = 0) \wedge (v(t, \psi) = 0)) \end{aligned}$$

(4) Implikácia

$$\begin{aligned} (v(t, \varphi \Rightarrow \psi) = 1) vtt & \left((v(t, \varphi) = 0) \vee (v(t, \psi) = 1) \right) \\ (v(t, \varphi \Rightarrow \psi) = 0) vtt & \left((v(t, \varphi) = 1) \wedge (v(t, \psi) = 0) \right) \end{aligned}$$

(5) Modálna spojka \circ

$$\begin{aligned} (v(t, \circ\varphi) = 1) vtt & (v(t+1, \varphi) = 1) \\ (v(t, \circ\varphi) = 0) vtt & (v(t+1, \varphi) = 0) \end{aligned}$$

(6) Modálna spojka \square

$$\begin{aligned} (v(t, \square\varphi) = 1) vtt & \left(\forall (t' \geq t) (v(t', \varphi) = 1) \right) \\ (v(t, \square\varphi) = 0) vtt & \left(\exists (t' \geq t) (v(t', \varphi) = 0) \right) \end{aligned}$$

(7) Modálna spojka \diamond

$$\begin{aligned} (v(t, \diamond\varphi) = 1) vtt & \left(\exists (t' \geq t) (v(t', \varphi) = 1) \right) \\ (v(t, \diamond\varphi) = 0) vtt & \left(\forall (t' \geq t) (v(t', \varphi) = 0) \right) \end{aligned}$$

Definícia

Formula φ je pravdivá v modeli M a v čase t je určená takto

$$\left(\models_t^M \varphi\right) =_{def} \left(v(t, \varphi) = 1\right)$$

Formula φ sa nazýva tautológia vtedy a len vtedy, ak je pravdivá v každom modeli M pre ľubovoľný čas t ,

$$\left(\models \varphi\right) =_{def} \left(\forall M\right)\left(\forall t \in T\right)\left(\models_t^M \varphi\right)$$

Medzi modálnymi spojками \Box a \Diamond (vždy a niekedy) platí táto vzájomná väzba, ktorá priamo plynie z ich definície

$$\Diamond p \equiv \neg \Box \neg p$$

$$\Box p \equiv \neg \Diamond \neg p$$

Sémantické tablá v temporálnej logiky

Príklad

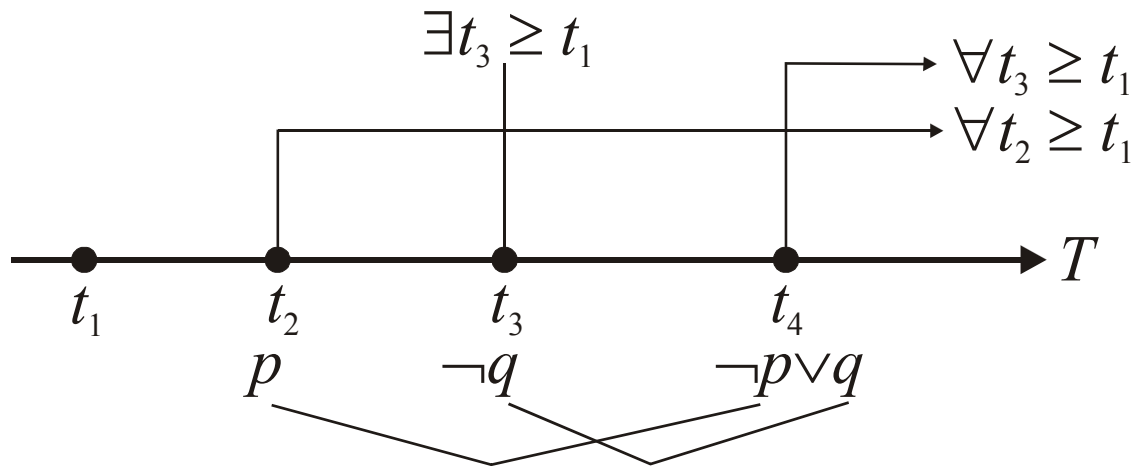
Dokážte, že formula $\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)$ je v temporálnej logike tautológia.

1. $v(t_1, \Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)) = 0$
2. $v(t_1, \Box(p \Rightarrow q)) = 1$
3. $v(t_1, \Box p \Rightarrow \Box q) = 0$ (2 a 3 z 1)
4. $v(t_1, \Box p) = 1$ (z 3)
5. $v(t_1, \Box q) = 0$ (z 3)
6. $v(t_2, p) = 1 \quad \forall t_2 \geq t_1$ (z 4)
7. $v(t_3, q) = 0 \quad \exists t_3 \geq t_1$ (z 5)
8. $v(t_4, p \Rightarrow q) = 1 \quad \forall t_4 \geq t_1$ (z 2)
9. $v(t_4, p) = 0 \quad \vee \quad v(t_4, q) = 1 \quad \forall t_4 \geq t_1$ (z 8)

$$(v(t_2, p) = 1) \wedge (v(t_3, q) = 0) \wedge ((v(t_4, p) = 0) \vee (v(t_4, q) = 1))$$

$$\left((v(t_2, p) = 1) \wedge (v(t_3, q) = 0) \wedge (v(t_4, p) = 0) \right) \vee$$

$$\left((v(t_2, p) = 1) \wedge (v(t_3, q) = 0) \wedge (v(t_4, q) = 1) \right)$$



Príklad

$$\varphi \Rightarrow (\Box(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi) \Rightarrow \Box\varphi)$$

Formula má zaujímavú interpretáciu: ak v čase t platí formula φ a súčasne vždy platí aj v nasledujúcom čase, potom musí platiť aj každom čase $t' \geq t$. Pomocou jednoduchých úvah dokážeme, že táto formula je tautológia, budeme ju interpretovať ako pravidlo modus ponens

1. premisa : φ

2. premisa : $\Box(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi)$

záver : $\Box\varphi$

φ_t

$\forall (t' \geq t)(\varphi_{t'} \Rightarrow \varphi_{t'+1})$

$\forall (t'' \geq t)(\varphi)_t$

Druhá premisa sa môže rozpísať takto

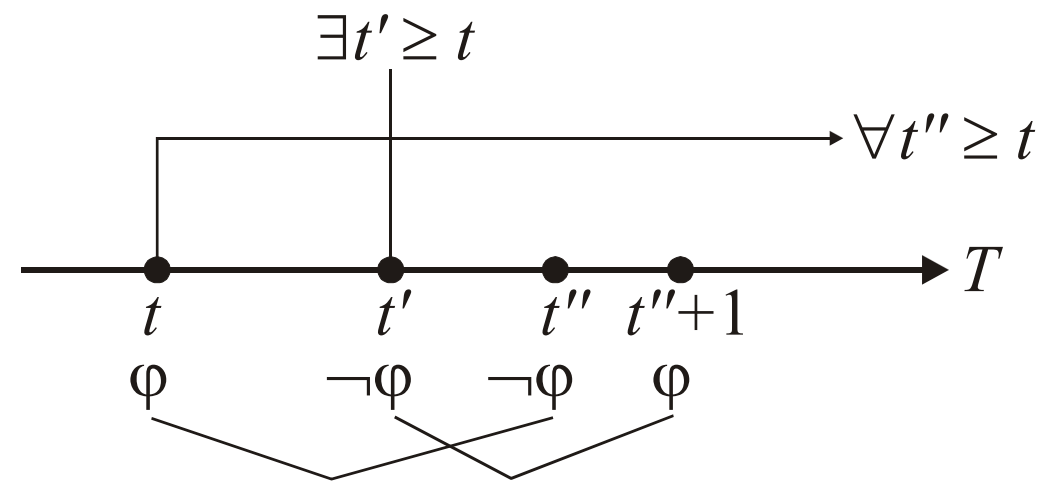
$$\begin{array}{l} \varphi_t \\ \varphi_t \Rightarrow \varphi_{t+1} \\ \varphi_{t+1} \Rightarrow \varphi_{t+2} \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_{t'} \Rightarrow \varphi_{t'+1} \\ \dots\dots\dots \\ \hline (\Box\varphi)_t \end{array}$$

Aplikovaním postupnosti modus ponens dostaneme, že formula φ je platná nielen v čase t (1. premisa), ale aj v časoch $t+1, t+2, \dots$, t.j. platí formula $(\Box\varphi)_t$.

Dokážeme formulu pomocou sémantického tabla

1. $v(t, \varphi \Rightarrow (\Box(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi) \Rightarrow \Box\varphi)) = 0$
2. $\boxed{v(t, \varphi) = 1}$
3. $v(t, \Box(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi) \Rightarrow \Box\varphi) = 0$
4. $v(t, \Box(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi)) = 1$
5. $v(t, \Box\varphi) = 0$
6. $\boxed{v(t', \varphi) = 0} \quad (\exists t' \geq t)$
7. $v(t'', \varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi) = 1 \quad (\forall t'' \geq t)$
8. $v(t'', \varphi) = 0 \quad \vee \quad v(t'', \bigcirc\varphi) = 1 \quad (\forall t'' \geq t)$
9. $\boxed{v(t'', \varphi) = 0} \quad \vee \quad \boxed{v(t'' + 1, \varphi) = 1} \quad (\forall t'' \geq t)$

$$\begin{aligned}
 & \left((v(t, \varphi) = 1) \wedge (v(t', \varphi) = 0) \wedge (v(t'', \varphi) = 0) \right) \vee \\
 & \left((v(t, \varphi) = 1) \wedge (v(t', \varphi) = 0) \wedge (v(t'' + 1, \varphi) = 1) \right)
 \end{aligned}$$



V klasickej výrokovej logike platí, že formula ψ je tautologickým dôsledkom množiny formúl $S = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$, $S \models \psi$, vtedy a len vtedy, ak formula $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi$ je tautológia.

V temporálnej logike táto vlastnosť „tautologický dôsledok“ má trochu inú podobu.

Veta

Formula ψ je tautologickým dôsledkom množiny formúl $S = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$, $S \models \psi$, vtedy a len vtedy, ak formula

$$\Box\varphi_1 \wedge \Box\varphi_2 \wedge \dots \wedge \Box\varphi_n \Rightarrow \psi$$

je tautológia.

Veta

Ak formula φ je tautológia vo výrokovej logike, potom formula ψ , ktorá vznikne substitúciou atomických formúl formulami temporálnej logiky, $\psi = \varphi(p_1/\chi_1, p_2/\chi_2, \dots)$, je tautológiou v temporálnej logike.

Príklad

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

substitúcia: $p/\Box\varphi$ a $q/\Diamond\psi$

$$\neg(\Box\varphi \wedge \Diamond\psi) \equiv (\neg\Box\varphi \vee \neg\Diamond\psi)$$

Najdôležitejšie „zákony“ (tautológie) temporálnej logiky

1. Zákony duality


$$\neg \bigcirc \varphi \equiv \bigcirc \neg \varphi$$

$$\neg \square \varphi \equiv \diamond \neg \varphi$$

$$\neg \diamond \varphi \equiv \square \neg \varphi$$

Spojka \bigcirc je autoduálna, spojky \square a \diamond sú navzájom duálne.

Sémantické tablo pre formulu $\neg\bigcirc\varphi \equiv \bigcirc\neg\varphi$

1. $v(t, \neg\bigcirc\varphi \Rightarrow \bigcirc\neg\varphi) = 0$
 2. $v(t, \neg\bigcirc\varphi) = 1$
 3. $v(t, \bigcirc\neg\varphi) = 0$ (2 a 3 z 1)
 4. $v(t, \bigcirc\varphi) = 0$ (odstránenie negácie v 2)
 5. $v(t+1, \neg\varphi) = 0$ (odstránenie spojky \bigcirc v 3)
 6. $v(t+1, \varphi) = 1$ (odstránenie negácie v 5)
 7. $v(t+1, \varphi) = 0$ (odstránenie spojky \bigcirc v 4)
- 

2. Zákony reflexivity

$$\Box\varphi \Rightarrow \varphi$$

$$\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$$

Tieto zákony vyjadrujú intuitívnu skúsenosť, že „budúcnosť“ obsahuje aj „prítomnosť“.

3. Zákony o „sile“ temporálnych spojok.

$$\Box\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi$$

$$\bigcirc\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$$

$$\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$$

$$\Diamond\Box\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi$$

Dokážeme formulu $\diamond\Box\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi$


1. $v(t, \diamond\Box\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi) = 0$
2. $v(t, \diamond\Box\varphi) = 1$ (odstránenie implikácie v 1)
3. $v(t, \Box\Diamond\varphi) = 0$ (odstránenie implikácie v 1)
4. $v(t', \Box\varphi) = 1$ ($\exists t' \geq t$) (odstránenie spojky \diamond v 2)
5. $\boxed{v(t'', \varphi) = 1}$ ($\exists t' \geq t'', \forall t'' \geq t'$) (odstránenie spojky \Box v 4)
6. $v(t', \Diamond\varphi) = 0$ ($\forall t' \geq t$) (odstránenie spojky \Box v 3)
7. $\boxed{v(t'', \varphi) = 0}$ ($\forall t' \geq t, \exists t'' \geq t'$) (odstránenie spojky \diamond v 6)

4. Zákony idempotentnosti.

$$\Box\Box\varphi \Rightarrow \Box\varphi$$

$$\Diamond\Diamond\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$$

Dokážeme formulu $\Box\Box\varphi \Rightarrow \Box\varphi$

1. $v(t, \Box\Box\varphi \Rightarrow \Box\varphi) = 0$
 2. $v(t, \Box\Box\varphi) = 1$
 3. $v(t, \Box\varphi) = 0$
 4. $v(t', \Box\varphi) = 1 \quad (\forall t' \geq t)$
 5. $\boxed{v(t'', \varphi) = 1} \quad (\forall t'' \geq t')$
 6. $\boxed{v(t''', \varphi) = 0} \quad (\forall t''' \geq t)$
- 

5. Zákony komutativnosti.

$$\Box\bigcirc\varphi \Rightarrow \bigcirc\Box\varphi$$

$$\Diamond\bigcirc\varphi \Rightarrow \bigcirc\Diamond\varphi$$

Dokážeme formulu $\Diamond\bigcirc\varphi \Rightarrow \bigcirc\Diamond\varphi$

1. $v(t, \Diamond\bigcirc\varphi \Rightarrow \bigcirc\Diamond\varphi) = 0$
2. $v(t, \Diamond\bigcirc\varphi) = 1$
3. $v(t, \bigcirc\Diamond\varphi) = 0$
4. $v(t', \bigcirc\varphi) = 1 \quad (\exists t' \geq t)$
5. $\boxed{v(t'+1, \varphi) = 1} \quad (\exists t' \geq t)$
6. $v(t+1, \Diamond\varphi) = 0$
7. $\boxed{v(t'', \varphi) = 0} \quad (\exists t'' \geq t+1)$

6. Zákony distributívnosti.

$$\bigcirc(\varphi \Rightarrow \psi) \equiv (\bigcirc\varphi \Rightarrow \bigcirc\psi)$$

$$\bigcirc(\varphi \wedge \psi) \equiv (\bigcirc\varphi \wedge \bigcirc\psi)$$

$$\bigcirc(\varphi \vee \psi) \equiv (\bigcirc\varphi \vee \bigcirc\psi)$$

$$\square(\varphi \wedge \psi) \equiv (\square\varphi \wedge \square\psi)$$

$$\diamond(\varphi \vee \psi) \equiv (\diamond\varphi \vee \diamond\psi)$$

$$\square(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\square\varphi \Rightarrow \square\psi)$$

$$(\square\varphi \vee \square\psi) \Rightarrow \square(\varphi \vee \psi)$$

$$(\diamond\varphi \Rightarrow \diamond\psi) \Rightarrow \diamond(\varphi \Rightarrow \psi)$$

$$\diamond(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\diamond\varphi \wedge \diamond\psi)$$

7. Zákony rekurzívnej ekvivalentnosti.

$$\Box\varphi \equiv \varphi \wedge \bigcirc\Box\varphi$$

$$\Diamond\varphi \equiv \varphi \wedge \bigcirc\Diamond\varphi$$

Opakovaným dosadením ľavej strany do pravej strany dostaneme alternatívne určenie formuly $\Box\varphi$

$$\Box\varphi \equiv \varphi \wedge \bigcirc\varphi \wedge \bigcirc\bigcirc\varphi \wedge \dots$$

$$\Diamond\varphi \equiv \varphi \vee \bigcirc\varphi \vee \bigcirc\bigcirc\varphi \wedge \dots$$

Dokážeme formulu $\Box\varphi \equiv \varphi \wedge \bigcirc\Box\varphi$

1. $v(t, \varphi \wedge \bigcirc\Box\varphi) = 1$
2. $v(t, \varphi) = 1$
3. $v(t, \bigcirc\Box\varphi) = 1$ (2 a 3 vznikli z 1)
4. $v(t+1, \Box\varphi) = 1$ (odstránenie spojky \bigcirc v 3)
5. $v(t', \varphi) = 1$ ($\forall t' \geq t+1$) (odstránenie spojky \Box v 4)
6. $v(t', \varphi) = 1$ ($\forall t' \geq t$) (spojenie 2 a 5)
7. $v(t, \Box\varphi) = 1$ (zavedenie spojky \Box v 6)

8. Zákony monotónnosti.

$$\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$$

$$\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Diamond\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)$$

$$\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\bigcirc\varphi \Rightarrow \bigcirc\psi)$$

Relácia tautologického vyplývania $\varphi \vDash \psi$ je ekvivalentná implikácii $\Box\varphi \Rightarrow \psi$.
Z vyššie uvedených zákonov vyplývajú zákony monotónnosti

$$(\varphi \Rightarrow \psi) \vDash (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$$

$$(\varphi \Rightarrow \psi) \vDash (\Diamond\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)$$

$$(\varphi \Rightarrow \psi) \vDash (\bigcirc\varphi \Rightarrow \bigcirc\psi)$$

9. Zákon o indukci.

$$\Box(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \Box\varphi)$$

Táto formula je priamo odvoditeľná z formuly $\varphi \Rightarrow (\Box(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi) \Rightarrow \Box\varphi)$ študovanej v príklade 12.10.

1. $\varphi \Rightarrow (\Box(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi) \Rightarrow \Box\varphi)$
2. $\neg\varphi \vee (\neg\Box(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi) \vee \Box\varphi)$
3. $\neg\Box(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi) \vee (\neg\varphi \vee \Box\varphi)$
4. $\neg\Box(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi) \vee (\varphi \Rightarrow \Box\varphi)$
5. $\Box(\varphi \Rightarrow \bigcirc\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \Box\varphi)$