Predikátová logika 1.řádu

Teorie logického programování

- PROLOG: PROgramming in LOGic, část predikátové logiky 1.řádu
  - fakta: `rodic(petr,petrik)`, $\forall X\, a(X)$
  - klauzule: $\forall X \forall Y$ `rodic(X,Y)` $\Rightarrow$ `predek(X,Y)`
- Predikátová logika I. řádu (PL1)
  - soubory objektů: lidé, čísla, body prostoru, ...
  - syntaxe PL1, sémantika PL1, pravdivost a dokazatelnost
- Rezoluce ve výrokové logice, v PL1
  - dokazovací metoda
- Rezoluce v logickém programování
- Backtracking, řez, negace vs. rezoluce

Predikátová logika I. řádu (PL1)

Abeceda $\mathcal{A}$ **jazyka** $\mathcal{L}$ PL1 se skládá ze symbolů:

- **proměnné** X, Y, ... označují libovolný objekt z daného oboru
- **funkční symboly** f, g, ... označují operace (příklad: +, $\times$)
  - **arita** = počet argumentů, n-**ární** symbol, značíme f/n
  - nulární funkční symboly – **konstanty**: označují význačné objekty (příklad: 0, 1, ...)
- **predikátové symboly** p,q, ... pro vyjádření vlastností a vztahů mezi objekty
  - **arita** = počet argumentů, n-**ární** symbol, značíme p/n příklad: $<$, $\in$
- **logické spojky** $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\equiv$
- **kvantifikátory** $\forall$, $\exists$
  - logika I. řádu používá **kvantifikaci pouze pro individua** (odlišnost od logik vyššího řádu)
  - v logice 1. řádu nelze: v $\mathbb{R} : \forall A \subseteq \mathbb{R}, \forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- **závorky**:),(

Jazyky PL1

- Specifikace jazyka $\mathcal{L}$ je definována funkčními a predikátovými symboly symboly tedy určují oblast, kterou jazyk popisuje
- **Jazyky s rovností**: obsahují predikátový symbol pro rovnost „="

Příklady

- jazyk teorie uspořádání
  - jazyk s =, binární prediátový symbol $<$
- jazyk teorie množin
  - jazyk s =, binární predikátový symbol $\in$
- jazyk elementární aritmetiky
  - jazyk s =, nulární funkční symbol 0 pro nulu,
    unární funkční symbol s pro operaci následníka,
    binární funkční symboly pro sčítání + a násobení $\times$

Term, atomická formule, formule

- **Term** nad abecedou $\mathcal{A}$
  - každá proměnná z $\mathcal{A}$ je term
  - je-li f/n z $\mathcal{A}$ a $t_1, \ldots, t_n$ jsou termy, pak $f(t_1, \ldots, t_n)$ je také term
  - každý term vznikne konečným počtem užití přechozích kroků f(X, g(X,0))
- **Atomická formule (atom)** nad abecedou $\mathcal{A}$
  - je-li p/n z $\mathcal{A}$ a $t_1, \ldots, t_n$ jsou termy, pak $p(t_1, \ldots, t_n)$ je atomická formule f(X) < g(X,0)
- **Formule** nad abecedou $\mathcal{A}$
  - každá atomická formule je formule
  - jsou-li F a G formule, pak také $(\neg F), (F \wedge G), (F \vee G), (F \Rightarrow G), (F \equiv G)$ jsou formule
  - je-li X proměnná a F formule, pak také $(\forall X\ F)$ a $(\exists X\ F)$ jsou formule
  - každá formule vznikne konečným počtem užití přechozích kroků (∃X ((f(X) = 0) ∧ p(0)))

Interpretace

- **Interpretace** $\mathcal{I}$ jazyka $\mathcal{L}$ nad abecedou $\mathcal{A}$ je dána
  - neprázdnou množinou $\mathcal{D}$ (také značíme $|\mathcal{I}|$, nazývá se **univerzum**) a
  - zobrazením, které
    - každé konstantě $c \in \mathcal{A}$ přiřadí nějaký **prvek** $\mathcal{D}$
    - každému funkčnímu symbolu $f/n \in \mathcal{A}$ přiřadí n-ární **operaci** nad $\mathcal{D}$
    - každému predikátovému symbolu $p/n \in \mathcal{A}$ přiřadí n-ární **relaci** nad $\mathcal{D}$
- Příklad: uspořádání na $\mathbb{R}$
  - jazyk: predikátový symbol $mensi/2$
  - interpretace: univerzum $\mathbb{R}$; zobrazení: $mensi(x, y) := x < y$
- Příklad: elementární aritmetika nad množinou $\mathbb{N}$ (včetně 0)
  - jazyk: konstanta $zero$, funční symboly $s/1$, $plus/2$
  - interpretace:
    - univerzum $\mathbb{N}$; zobrazení: $zero := 0$, $s(x) := 1 + x$, $plus(x, y) := x + y$

Sémantika formulí

- **Ohodnocení proměnné** $\varphi(X)$: každé proměnné X je přiřazen prvek $|\mathcal{I}|$
- **Hodnota termu** $\varphi(t)$: každému termu je přiřazen prvek univerza
  - příklad: nechť $\varphi(X) := 0$
    $\varphi(plus(s(zero), X)) = \varphi(s(zero)) + \varphi(X) = (1 + \varphi(zero)) + 0 = (1 + 0) + 0 = 1$
- Každá **dobře utvořená formule** označuje **pravdivostní hodnotu** (PRAVDA, NEPRAVDA) v závislosti na své struktuře a interpretaci

  Pravdivá formule $\mathcal{I} \models_\varphi Q$: formule Q označena PRAVDA

  Neravdivá formule $\mathcal{I} \not\models_\varphi Q$: formule Q označena NEPRAVDA

  - příklad: $p/1$ predikátový symbol, tj. $p \subseteq |\mathcal{I}|$ $\quad p := \{\langle 1\rangle, \langle 3\rangle, \langle 5\rangle, \ldots\}$

    $\mathcal{I} \models p(zero) \wedge p(s(zero))$ iff $\mathcal{I} \models p(zero)$ a $\mathcal{I} \models p(s(zero))$

    iff $\langle \varphi(zero)\rangle \in p$ a $\langle \varphi(s(zero))\rangle \in p$

    iff $\langle \varphi(zero)\rangle \in p$ a $\langle (1 + \varphi(zero))\rangle \in p$

    iff $\langle 0\rangle \in p$ a $\langle 1\rangle \in p$

    $\langle 1\rangle \in p$ ale $\langle 0\rangle \notin p$, tedy formule je nepravdivá v $\mathcal{I}$

Model

- Interpretace se nazývá **modelem** formule, je-li v ní tato formule pravdivá
  - interpretace množiny $\mathbb{N}$ s obvyklými operacemi je modelem formule (1 + s(0) = s(s(0)))
  - interpretace, která se liší přiřazením s/1: s(x):=x není modelem této formule
- **Teorie** $\mathcal{T}$ jazyka $\mathcal{L}$ je množina formulí jazyka $\mathcal{L}$, tzv. **axiomů**
  - ¬ s(X) = 0 je jeden z axiomů teorie elementární aritmetiky
- **Model teorie**: libovolná interpretace, která je modelem všech jejích axiomů
  - všechny axiomy teorie musí být v této interpretaci pravdivé
- **Pravdivá formule v teorii** $\mathcal{T} \models F$: pravdivá v každém z modelů teorie $\mathcal{T}$
  - říkáme také formule **platí v teorii** nebo je **splněna v teorii**
  - formule 1 + s(0) = s(s(0)) je pravdivá v teorii elementárních čísel
- **Logicky pravdivá formule** $\models F$**:** libovolná interpretace je jejím modelem
  - nebo-li F je pravdivá v každém modelu libovolné teorie
  - formule G ∨ ¬ G je logicky pravdivá, formule 1 + s(0) = s(s(0)) není logicky pravdivá

Zkoumání pravdivosti formulí

- Zjištění pravdivosti provádíme důkazem

  Důkaz: libovolná posloupnost $F_1, \ldots, F_n$ formulí jazyka $\mathcal{L}$, v níž každé F_i je buď axiom teorie jazyka $\mathcal{L}$ nebo lze F_i odvodit z předchozích F_j $(j < i)$ použitím určitých **odvozovacích pravidel**
- Odvozovací pravidla – příklady
  - **pravidlo modus ponens**: z formulí F a $F \Rightarrow G$ lze odvodit G
  - **rezoluční princip**: z formulí $F \vee A$, $G \vee \neg A$ odvodit $F \vee G$
- F je **dokazatelná z formulí** $A_1, \cdots, A_n$ $\quad A_1, \cdots, A_n \vdash F$

  existuje-li důkaz F z $A_1, \cdots, A_n$
- Dokazatelné formule v teorii $\mathcal{T}$ nazýváme **teorémy** teorie $\mathcal{T}$

Korektnost a úplnost

- **Uzavřená formule**: neobsahuje volnou proměnnou (bez kvantifikace)
  - ∀Y ((0 < Y) ∧ (∃X (X < Y))) je uzavřená formule
  - (∃X (X < Y)) není uzavřená formule
- Množina odvozovacích pravidel se nazývá **korektní**, jestliže pro každou množinu uzavřených formulí $\mathcal{P}$ a každou uzavřenou formuli F platí:

  jestliže $\mathcal{P} \vdash F$ pak $\mathcal{P} \models F$ (jestliže je něco dokazatelné, pak to platí)

  Odvozovací pravidla jsou **úplná**, jestliže

  jestliže $\mathcal{P} \models F$ pak $\mathcal{P} \vdash F$ (jestliže něco platí, pak je to dokazatelné)
- PL1: úplná a korektní dokazatelnost, tj.
  pro teorii $\mathcal{T}$ s množinou axiomů $\mathcal{A}$ platí: $\mathcal{T} \models F$ **právě když** $\mathcal{A} \vdash F$