

# IB112 Základy matematiky

Řešení soustavy lineárních rovnic, matice, vektory

Jan Strejček

- *Soustava lineárních rovnic*
- *Vektor a matice*
  - násobení matic
  - maticový zápis soustavy lineárních rovnic
  - schodovitý tvar
- *Řešení soustavy lineárních rovnic*
  - Gaussova eliminace
  - Zpětná substituce
- *Geometrický význam lineárních rovnic*
  - s dvěma neznámými
  - s třemi neznámými

# Soustava lineárních rovnic

## Definice (Lineární rovnice)

*Lineární rovnici* o  $n$  neznámých  $x_1, x_2, \dots, x_n$  rozumíme rovnicí tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

kde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jsou *koeficienty* a  $b$  je *absolutní člen*.

## Příklad

■  $x + 3 = 2y - 4 \quad \longrightarrow \quad x - 2y = -7$

■ lze chápat i jako rovnicí nad 3 neznámými:  $x - 2y + 0z = -7$

## Definice (Soustava lineárních rovnic)

Je-li dáno  $m$  rovnic o  $n$  neznámých  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , hovoříme o *soustavě lineárních rovnic* nebo *systému lineárních rovnic*.

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

*Řešením* soustavy rozumíme  $n$ -tici čísel  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , po jejichž dosazení za proměnné  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se levá strana každé rovnice vyhodnotí na odpovídající pravou stranu.

## Příklad

$$\begin{array}{rclcl} 2x & -3y & & = & 7 \\ x & & +2z & = & 1 \\ 3x & +3y & +2z & = & 14 \end{array}$$

## Příklad

$$\begin{array}{rclcrcl} 2x & -3y & & = & 7 \\ x & & +2z & = & 1 \\ 3x & +3y & +2z & = & 14 \end{array}$$

## Řešení

- Soustava má jediné řešení  $(5, 1, -2)$ .
- Jinak zapsáno:  $x = 5, y = 1, z = -2$

## Motivační příklad 2

### Příklad

$$2x - 3y = 7$$

$$x + 2z = 1$$

$$3x - 3y + 2z = 8$$



## Příklad

$$\begin{array}{rcl} 2x & -3y & = 7 \\ x & & +2z = 1 \\ 3x & -3y & +2z = 8 \end{array}$$

## Řešení

- Soustava má řešení  $(5, 1, -2)$ .
- Existují další řešení:  $(-1, -3, 1)$ ,  $(2, -1, -\frac{1}{2})$ ,  $(11, 5, -5)$ , ...

### Příklad

$$\begin{array}{rcl} 2x & -3y & = 7 \\ x & & +2z = 1 \\ 3x & -3y & +2z = 8 \end{array}$$

### Řešení

- Soustava má řešení  $(5, 1, -2)$ .
- Existují další řešení:  $(-1, -3, 1)$ ,  $(2, -1, -\frac{1}{2})$ ,  $(11, 5, -5)$ , ...
- Řešením je každá trojice  $(t, \frac{2t-7}{3}, \frac{1-t}{2})$ , kde  $t$  je libovolné.
- Řešení je tedy nekonečně mnoho.
- Tato situace obvykle nastává, je-li rovnic méně než proměnných (v tomto příkladu třetí rovnice nepřidává žádnou informaci, je pouze součtem prvních dvou rovnic).

## Příklad

$$\begin{array}{rcl} 2x & -3y & = 7 \\ x & & +2z = 1 \\ 3x & -3y & +2z = 9 \end{array}$$

# Motivační příklad 3

## Příklad

$$\begin{array}{rcl} 2x & -3y & = 7 \\ x & & +2z = 1 \\ 3x & -3y & +2z = 9 \end{array}$$

## Řešení

- Neexistuje žádné řešení: součtem prvních dvou rovnic dostáváme

$$3x - 3y + 2z = 8,$$

což odporuje třetí rovnici.

- Vyřešením soustavy rovnic rozumíme nalezení **všech** řešení.
- Obvyklým postupem je převod soustavy na jednodušší soustavu se stejnou množinou řešení.

## Definice (Ekvivalence soustav lineárních rovnic)

*Soustavy lineárních rovnic se nazývají **ekvivalentní**, mají-li stejnou množinu řešení.*

Následujícími úpravami získáme vždy ekvivalentní soustavu lineárních rovnic:

- 1 výměna libovolných dvou rovnic soustavy
- 2 vynásobení obou stran libovolné rovnice nenulovým číslem  $c$
- 3 přičtení  $c$ -násobku  $i$ -té rovnice k  $j$ -té rovnici ( $i \neq j$ )

Každá z uvedených úprav je vratná. Původní soustavu dostaneme

- 1 opakováním výměny rovnic.
- 2 vynásobením stejné rovnice číslem  $\frac{1}{c}$ .
- 3 k  $j$ -té rovnici přičteme  $(-c)$ -násobek  $i$ -té rovnice.

# Poznámky k úpravám soustavy

Obecně nelze kombinovat více úprav v jednom kroku (mohlo by to vést k neekvivalentní soustavě rovnic):

$$\begin{array}{rcl} 2x & -3y & = 7 \\ x & & +2z = 1 \\ 3x & +3y & +2z = 14 \end{array}$$

Současným přičtením 2. rovnice k 3. a 3. rovnice k 2. dostaneme

$$\begin{array}{rcl} 2x & -3y & = 7 \\ 4x & +3y & +4z = 15 \\ 4x & +3y & +4z = 15 \end{array}$$

Tato soustava není ekvivalentní: původní soustava má jedno řešení, upravená soustava jich má nekonečně mnoho.

# Vektory a matice



## Definice (Vektor)

*Vektor* je uspořádaná  $n$ -tice prvků.

- Vektor se zapisuje do řádku či do sloupce jedním z následujících způsobů (vpravo jsou *sloupcové vektory*):

$$\begin{array}{cccc} (-3, 2, 8) & (-3 & 2 & 8) & \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ (x_1, x_2, x_3) & (x_1 & x_2 & x_3) & & \end{array}$$

- Vektory stejného typu lze sčítat po složkách:

$$(-3, 2, 8) + (5, -5, 0) = (2, -3, 8)$$

- Násobení vektoru číslem:

$$5 \cdot (-3, 2, 8) = (-15, 10, 40)$$

## Definice (Matice)

*Maticí* typu  $m/n$  rozumíme obdélníkové schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Zápis  $A = (a_{ij})$  znamená, že prvky matice  $A$  označujeme jmény tvaru  $a_{ij}$  dle uvedeného schématu.

## Definice (Součin matic)

*Součinem matic*  $A = (a_{ij})$  typu  $m/n$  a  $B = (b_{jk})$  typu  $n/o$  je matice  $C = (c_{ik})$  typu  $m/o$  splňující

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

## Příklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

## Definice (Součin matic)

*Součinem matic*  $A = (a_{ij})$  typu  $m/n$  a  $B = (b_{jk})$  typu  $n/o$  je matice  $C = (c_{ik})$  typu  $m/o$  splňující

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

## Příklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -9 \\ -11 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$

# Maticový zápis soustavy lineárních rovnic

Soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Ize zapsat pomocí matic následovně:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Označíme-li matici a vektory pořadě  $A$ ,  $x$ ,  $b$ , dostáváme rovnici

$$A \cdot x = b.$$

# Maticový zápis soustavy lineárních rovnic

Soustavu lineárních rovnic lze ještě úsporněji reprezentovat tzv. *rozšířenou maticí soustavy*:

$$(A | b) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

## Příklad

$$\begin{array}{rclcl} 2x & -3y & & = & 7 \\ x & & +2z & = & 1 \\ 3x & +3y & +2z & = & 14 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 14 \end{array} \right)$$

# Schodovitý tvar matice

## Definice (Schodový tvar matice)

*Vedoucí prvek  $i$ -tého řádku matice je největší nenulový prvek na  $i$ -tém řádku (nulový řádek nemá vedoucí prvek). Matice je v (řádkově) schodovitém tvaru, jestliže*

- 1 za nulovým řádkem následují už jen nulové řádky a
- 2 vedoucí prvek v každém nenulovém řádku je v pravějším sloupci než vedoucí prvky všech předcházejících řádků.

## Příklad

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 17 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 17 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 17 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Vedoucí prvky jsou červené.
- Pouze matice vlevo je ve schodovitém tvaru.

# Řešení soustavy lineárních rovnic



Dříve zmíněné úpravy soustavy lineárních rovnic, které zachovávají ekvivalenci, přesně odpovídají následujícím *elementárním řádkovým transformacím* provedeným na rozšířené matici soustavy.

## Definice (Elementární řádkové transformace)

*Elementární řádkové transformace matic jsou*

- 1 *výměna dvou řádků matice,*
- 2 *vynásobení jednoho řádku nenulovým číslem,*
- 3 *přičtení násobku některého řádku k jinému řádku.*

## Věta (Gaussova eliminace)

*Každou matici lze pomocí konečně mnoha elementárních řádkových úprav převést na řádkově schodovitý tvar.*

### Důkaz

Převod do schodovitého tvaru lze provést následujícím algoritmem.

- 1 Nechť  $j$ -tý sloupec je nejlevější nenulový sloupec matice. Vyměníme řádky tak, aby na prvním řádku byl v  $j$ -tém sloupci nenulový prvek  $a_{1j}$ .
- 2 K ostatním řádkům, které mají v tomto sloupci nenulový prvek  $a_{ij}$  přičteme  $(-\frac{a_{ij}}{a_{1j}})$ -násobek prvního řádku. Tím vynulujeme celý  $j$ -tý sloupec až na  $a_{1j}$ .
- 3 Tím jsme dostali první řádek do požadovaného tvaru. Opakovanou aplikací kroků 1 a 2 na zbylé řádky převedeme matici do požadovaného tvaru. □

# Řešení soustavy lineárních rovnic

Postupujeme následovně:

- 1 Zapišeme soustavu pomocí rozšířené matice soustavy  $(A | b)$ .
- 2 Rozšířenou matici převedeme Gaussovou eliminací na matici  $(A' | b')$  ve schodovitém tvaru. Jelikož eliminace používá pouze elementární úpravy, reprezentuje výsledná rozšířená matice ekvivalentní soustavu lineárních rovnic.
- 3 Z rozšířené matice  $(A' | b')$  vyčteme kolik řešení má soustava rovnic. Rozlišujeme tři situace:
  - Matice  $(A' | b')$  obsahuje řádek tvaru  $(0 \ 0 \ \dots \ 0 | k)$ , kde  $k$  je nenulové číslo. Tento řádek odpovídá rovnici  $0 = k$  a soustava proto nemá řešení. V opačných případech soustava má řešení a nastává jeden z následujících případů.
  - Matice  $A'$  má v každém sloupci nějaký vedoucí prvek. Pak má soustava právě jedno řešení.
  - V matici  $A'$  existuje sloupec, ve kterém není vedoucí prvek. Pak má soustava nekonečně mnoho řešení.
- 4 Řešení spočítáme pomocí tzv. *zpětné substituce*.

# Zpětná substituce

- Necht'  $(A' | b')$  je matice ve schodovitém tvaru neobsahující řádek tvaru  $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ k)$  s nenulovým  $k$ .
- Proměnné odpovídající sloupcům matice  $A'$  bez vedoucího prvku nahradíme parametrem. Tyto proměnné mohou nabývat libovolné hodnoty. Hodnoty ostatních proměnných jsou v každém řešení závislé na konkrétních hodnotách parametrů.
- Každý neprázdný řádek

$$(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ a'_{ij} \ a'_{i(j+1)} \ \dots \ a'_{in} \ | \ b'_i)$$

převédeme na rovnici

$$x_j = \frac{1}{a'_{ij}} \cdot (b'_i - a'_{i(j+1)}x_{j+1} \ \dots \ - a'_{in}x_n)$$

tyto rovnice postupně odspodu řešíme dosazením níže spočítaných hodnot a parametrů.

## Příklad 1

$$2x_1 - 3x_2 = 7$$

$$x_1 + 2x_3 = 1$$

$$3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9$$

## Příklad 1

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & -3x_2 & & = & 7 \\ x_1 & & +2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 9 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 9 \end{array} \right)$$

## Příklad 1

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & -3x_2 & = 7 \\ x_1 & & +2x_3 = 1 \\ 3x_1 & -3x_2 & +2x_3 = 9 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 9 \end{array} \right) \quad \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right)$$

- Uvedená soustava lineárních rovnic nemá řešení.

## Příklad 2

$$2x_1 - 3x_2 = 7$$

$$x_1 + 2x_3 = 1$$

$$3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8$$



## Příklad 2

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & -3x_2 & & = & 7 \\ x_1 & & +2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 8 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 8 \end{array} \right)$$

## Příklad 2

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & -3x_2 & = 7 \\ x_1 & & +2x_3 = 1 \\ 3x_1 & -3x_2 & +2x_3 = 8 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 8 \end{array} \right) \quad \longrightarrow$$
  
$$\longrightarrow \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

## Příklad 2

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & -3x_2 & = 7 \\ x_1 & & +2x_3 = 1 \\ 3x_1 & -3x_2 & +2x_3 = 8 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 8 \end{array} \right) \rightarrow$$
$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 - 2x_3 \\ x_2 = \frac{1}{-3}(5 + 4x_3) \end{array}$$

## Příklad 2

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & -3x_2 & = 7 \\ x_1 & & +2x_3 = 1 \\ 3x_1 & -3x_2 & +2x_3 = 8 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 8 \end{array} \right) \rightarrow$$
$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 - 2x_3 \\ x_2 = \frac{1}{-3}(5 + 4x_3) \end{array} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 - 2t \\ x_2 = \frac{1}{-3}(5 + 4t) \\ x_3 = t \end{array}$$

- Řešením je tedy každá trojice  $(1 - 2t, \frac{1}{-3}(5 + 4t), t)$  kde  $t$  je libovolné.
- To je totéž jako  $(t, \frac{2t-7}{3}, \frac{1-t}{2})$ .

## Příklad 3

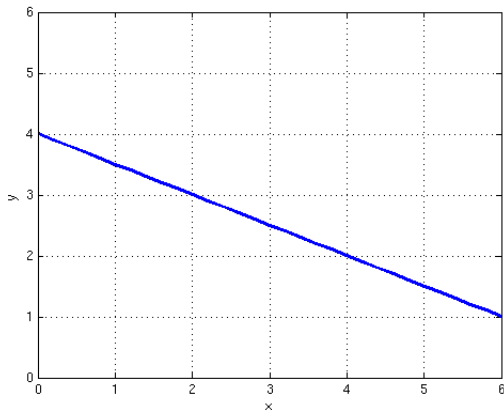
$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & -3x_2 & & = & 7 \\ x_1 & & +2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 14 \end{array} \longrightarrow \dots$$

- Gaussova eliminační metoda je velmi efektivní při ručním řešení malých soustav rovnic i pro počítačové řešení větších soustav (stovky až tisíce rovnic).
- Pro rozsáhlejší soustavy existují efektivnější algoritmy.

## Geometrický význam lineárních rovnic

# Lineární rovnice o dvou neznámých

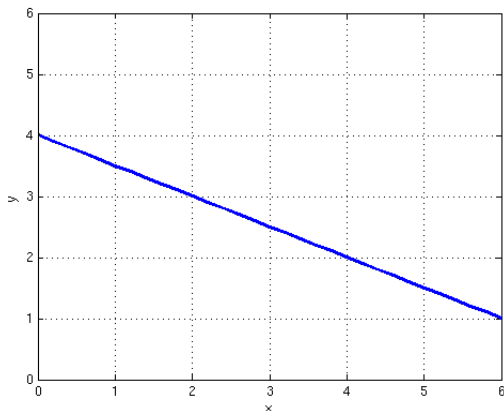
- Lineární rovnice o dvou neznámých má nekonečně mnoho řešení, které tvoří *přímku* v dvojrozměrném prostoru.
- Řešením  $x + 2y = 8$  je každá dvojice tvaru  $(t, 4 - \frac{t}{2})$ .





# Soustava lineárních rovnic o dvou neznámých

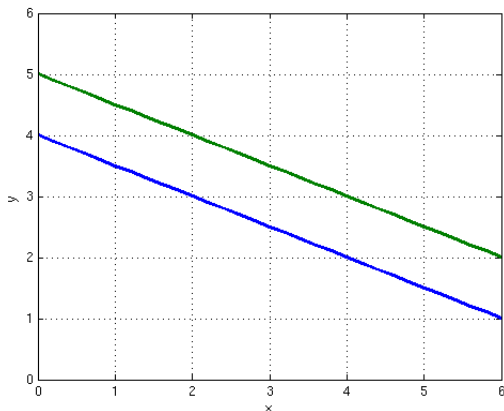
- Řešením soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik odpovídajících přímek.



■  $x + 2y = 8$

# Soustava lineárních rovnic o dvou neznámých

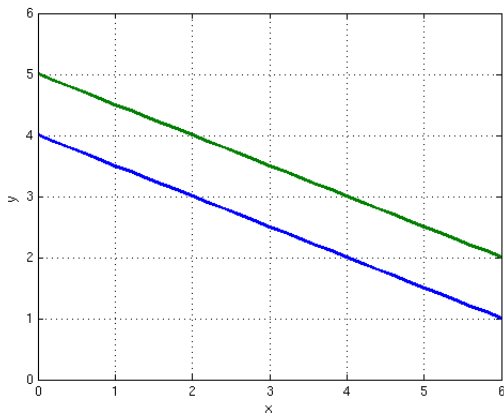
- Řešením soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik odpovídajících přímek.



■  $x + 2y = 8$   
■  $x + 2y = 10$

# Soustava lineárních rovnic o dvou neznámých

- Řešením soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik odpovídajících přímek.



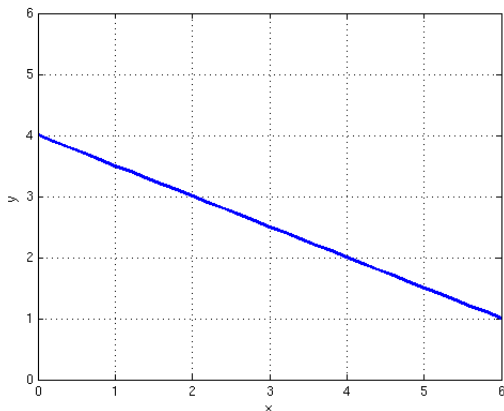
■  $x + 2y = 8$

■  $x + 2y = 10$

*nemá řešení*

# Soustava lineárních rovnic o dvou neznámých

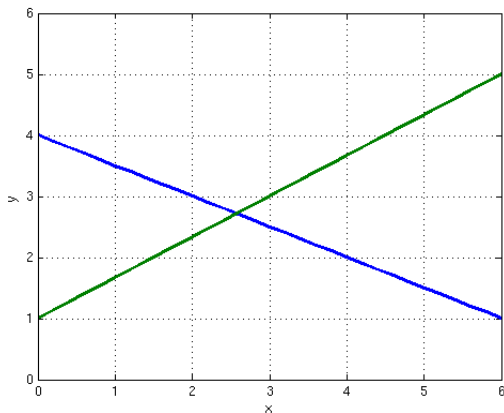
- Řešením soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik odpovídajících přímek.



■  $x + 2y = 8$

# Soustava lineárních rovnic o dvou neznámých

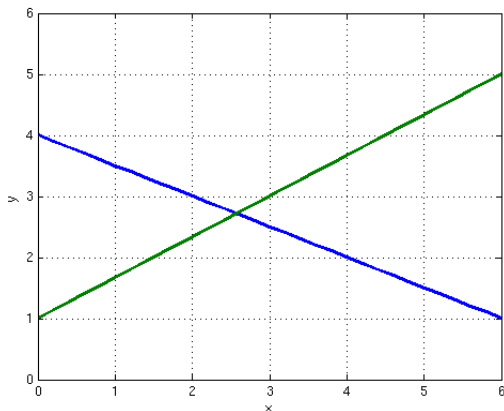
- Řešením soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik odpovídajících přímek.



■  $x + 2y = 8$   
■  $2x - 3y = -3$

# Soustava lineárních rovnic o dvou neznámých

- Řešením soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik odpovídajících přímek.



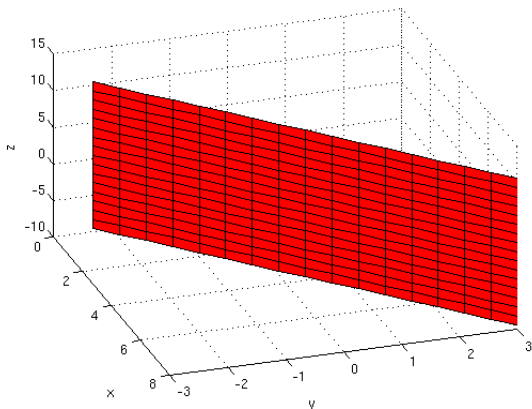
■  $x + 2y = 8$

■  $2x - 3y = -3$

*má řešení*  $(\frac{18}{7}, \frac{19}{7})$

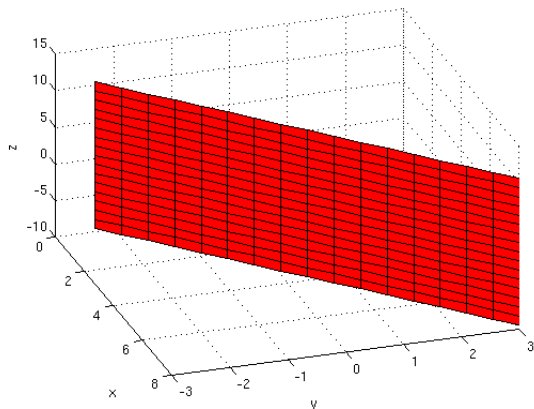
# Lineární rovnice o třech neznámých

- Lineární rovnice o třech neznámých má nekonečně mnoho řešení, které tvoří *rovinu* v trojrozměrném prostoru.
- Řešením  $2x - 3y + 0z = 7$  je každá trojice tvaru  $(t, \frac{2t-7}{3}, r)$ .



# Soustava lineárních rovnic o třech neznámých

- Řešením soustavy lineárních rovnic o třech neznámých je průnik odpovídajících rovin.

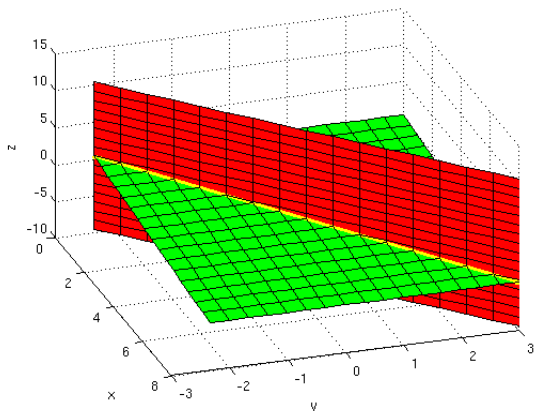


■  $2x - 3y = 7$



# Soustava lineárních rovnic o třech neznámých

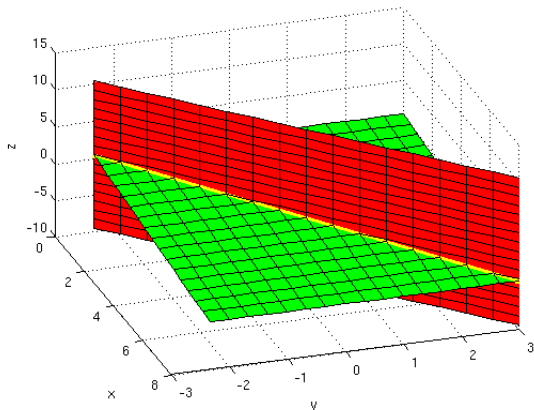
- Řešením soustavy lineárních rovnic o třech neznámých je průnik odpovídajících rovin.



$$\begin{aligned} \color{red}{\blacksquare} & 2x - 3y = 7 \\ \color{green}{\blacksquare} & x + 2z = 1 \end{aligned}$$

# Soustava lineárních rovnic o třech neznámých

- Řešením soustavy lineárních rovnic o třech neznámých je průnik odpovídajících rovin.



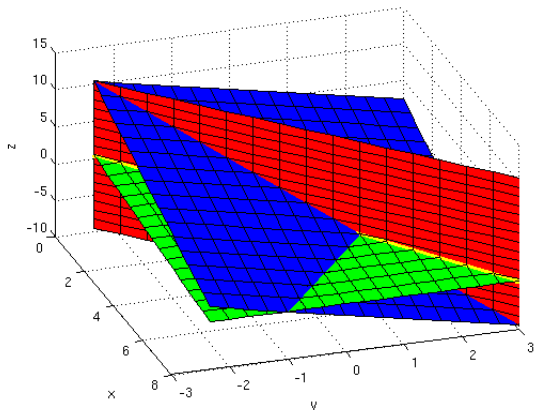
$$\begin{aligned} \blacksquare & 2x - 3y = 7 \\ \blacksquare & x + 2z = 1 \end{aligned}$$

*řešení tvoří přímku*

$$\blacksquare \left( t, \frac{2t-7}{3}, \frac{1-t}{2} \right)$$

# Soustava lineárních rovnic o třech neznámých

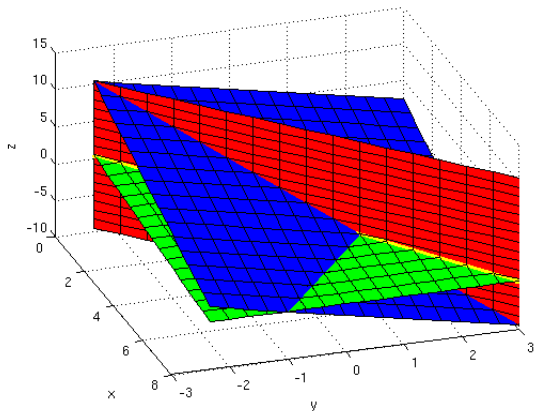
- Řešením soustavy lineárních rovnic o třech neznámých je průnik odpovídajících rovin.



■  $2x - 3y = 7$   
■  $x + 2z = 1$   
■  $3x + 3y + 2z = 14$

# Soustava lineárních rovnic o třech neznámých

- Řešením soustavy lineárních rovnic o třech neznámých je průnik odpovídajících rovin.



$$\begin{aligned} \blacksquare & 2x - 3y = 7 \\ \blacksquare & x + 2z = 1 \\ \blacksquare & 3x + 3y + 2z = 14 \end{aligned}$$

*jediné řešení je*  
 $(5, 1, -2)$

- Všechna řešení soustavy lineárních rovnic o třech neznámých mohou tvořit:
  - rovinu (typicky pokud máme jednu rovnici)
  - přímku (typicky pokud máme dvě rovnice)
  - bod (typicky pokud máme tři rovnice)
- Soustava také nemusí mít žádné řešení (typicky pokud máme více jak tři rovnice nebo pokud nějaké dvě rovnice odpovídají rovnoběžným rovinám).