Potřebné vzorce z goniometrie.

1. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$
2. $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$
3. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x = \cos 2x + \sin^2 x = \cos 2x + (1-\cos^2 x) \Leftrightarrow 2\cos^2 x = \cos 2x + 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{(1+\cos 2x)}{2}$

Použití příslušného vzorce budeme značit indexem u rovností.

Fourierova řada vzhledem k ortogonálnímu systému $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ má na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ tvar:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

kde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

pro $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

pro $n \in \mathbb{N}$.

Cvičení 1 *Rozviňnte do Fourierovy řady funkci* $\cos^2(x)$ *na intervalu* $\langle -\pi, \pi\rangle$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\cos 0x\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\mathrm{d}x =^3 \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}x) = \frac{1}{2\pi}([x]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}) = 1$$

Spočítáme pro obecné $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\cos nx\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx + \cos 2x\cos nx\mathrm{d}x) = \frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\cos nx\mathrm{d}x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\cos nx\mathrm{d}x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\cos nx\mathrm{d}x =^1$$

$$=^1 \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(n-2)x+\cos(n+2)x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4\pi}(\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-2)x\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+2)x\mathrm{d}x) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}(\left[\frac{\sin(n-2)x}{n-2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\sin(n+2)x}{n+2}\right]_{-\pi}^{\pi})$$

Pro $n = 2$ výraz nedává smysl, dále počítáme pouze pro $n \neq 2$.

$$= \frac{1}{4\pi}(\left[\frac{\sin(n-2)x}{n-2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\sin(n+2)x}{n+2}\right]_{-\pi}^{\pi}) = 0$$

Nyní musíme prozkoumat případ, kdy $n = 2$:

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\cos 2x\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x + \cos^2 2x\mathrm{d}x) = \frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 2x\mathrm{d}x) =^3$$

$$=^3 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos 4x + 1}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4\pi}(\int_{-\pi}^{\pi}\cos 4x\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}1\mathrm{d}x) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}(\left[\frac{\sin 4x}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} + [x]_{-\pi}^{\pi}) = \frac{1}{4\pi}[x]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}$$

Výpočet b_n by probíhal analogicky jen s použitím vztahu (2). Případně si stačí uvědomit, že $\cos^2 x$ je sudá funkce a proto $b_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Máme tedy $a_0 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N} - \{2\}$ a $b_m = 0$ pro všechna $m \in \mathbb{N}$. Fourierova řada funkce $\cos^2 x$ na intervalu $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ je pak:

$$\cos^2 x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

(...což je vlastně vzorec (3).)