Spočtěte limitu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}$. (1) Nejprve si uveďme, že jistě $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \ln n! \in [0,\infty]$, tj. je nezáporným číslem nebo nekonečno. (2) Z (1) vyplývá, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n^2]{n!}} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \ln n!} \geq \mathrm{e}^0 = 1$. (3) Zřejme pro velké n platí $n! \leq n^n$. (4) Počítejme již samotnou limitu: $1 \leq_{(2)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!} \leq_{(3)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n^n} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n^2]{n^n}} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \ln n^n} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} \ln n} = |\mathrm{L\,'Hospital}| = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1}} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \mathrm{e}^0 = 1$. Protože na začátku i na konci nerovností jsou 1, jsou všechny nerovnosti rovnosti, a proto hledaná limita je rovna 1.

Podobný trik se dá udělat později, ne hned na začátku: $1 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n^2]{n!}} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \ln n!} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \ln i} \leq \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \ln n} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} \ln n}$, dále už stejně jak v (4). (Použili jsme $\ln i \leq \ln n$ pro všechna $1 \leq i \leq n$ a logaritmus součinu je součet logaritmů).

NELZE postupovat ani takto, jak jsem si nejprve myslel: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n^2]{n!}} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \ln n!} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \ln i} = \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \ln i} = \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{\infty} 0} = \mathrm{e}^0 = 1$.