Obsah

I. Určitý integrál

I.1. Existence určitých integrálů

• Zjistěte, zda existují určité integrály :

***Příklad* 1.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+3}{x^2+1}\,dx$

Řešení : Ano existuje, protože funkce $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1}$ je spojitá na intervalu $\langle 0,1\rangle$. ■

***Příklad* 2.** $\displaystyle\int_1^{10} \frac{x^2+3}{x^3-3x^2-4x}\,dx$

Řešení : Neexistuje, protože funkce $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^3-3x^2-4x} = \dfrac{x^2+3}{x(x+1)(x-4)}$ není spojitá v bodě $x = 4$ $\big(x \in (1,10)\big)$ a $\lim\limits_{x\to 4\pm} f(x) = \pm\infty$. ■

***Příklad* 3.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^{2x}-1}{x}\,dx$

Řešení : Integrál existuje. Funkce $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{x}$ sice není spojitá v bodě $x = 0$ $\big(x \in (-1,1)\big)$, avšak $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = 2$. ■

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x}\,dx$ [ano , $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x} = 0$]

5. $\displaystyle\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$ [ano]

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-2\cos x}\,dx$ [ne , $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}\pm} \frac{1}{1-2\cos x} = \pm\infty$]

I.2. Výpočet integrálu podle definice

• Přímo z definice integrálu vypočtěte :

***Příklad* 7.** $\displaystyle\int_a^b e^x\,dx$

Řešení : Zvolíme dělení intervalu $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, na n stejných dílů délky $\Delta x_i = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, takže $x_1 = a+\Delta x, \ldots x_i = a+i\Delta x, x_n = a+n\Delta x = b$. Za ξ_i zvolíme levé koncové body částečných intervalů $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, tj. $\xi_i = x_{i-1} = a+(i-1)\Delta x$. Vyšetřujeme funkci $f(x) = e^x$.

Potom pro integrální součet platí $s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} e^{\xi_i}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} e^{a+(i-1)\Delta x}\Delta x =$
$\sum_{i=1}^{n} e^a \cdot e^{(i-1)\Delta x} \cdot \Delta x = e^a \cdot \Delta x(1 + e^{\Delta x} + e^{2\Delta x} + \dots + e^{(n-1)\Delta x}) =$ (v závorce je součet geometrické řady) $e^a \cdot \Delta x \dfrac{e^{n\Delta x} - 1}{e^{\Delta x} - 1} = \Delta x \dfrac{e^{a+n\Delta x} - e^a}{e^{\Delta x} - 1} = \Delta x \dfrac{e^b - e^a}{e^{\Delta x} - 1}$. Nyní $\int_a^b e^x\, dx =$
$= \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}(e^b - e^a) = e^b - e^a$, což je hodnota $\int_a^b e^x\, dx = \Big[e^x\Big]_a^b =$
$= e^b - e^a$. ∎

POZNÁMKA : Vzhledem k tomu, že integrál existuje, nemůže jiný způsob dělení intervalu vést k jinému výsledku.

POZNÁMKA : Použili jsme vzorce : $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ a $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Příklad **8.** $\int_a^b x\, dx$

Řešení : Hodnoty Δx_i a ξ_i zvolíme jako v předcházejícím příkladě. Pak je $f(x) = x$, a tedy $s_n = \sum_1^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_1^n \xi_i \cdot \Delta x_i = \sum_1^n (a + (i-1)\Delta x) \cdot \Delta x = (a + (a + \Delta x) +$
$+(a + 2\Delta x) + \dots + (a + (n-1)\Delta x)) \cdot \Delta x = \dfrac{a + (a + (n-1)\Delta x)}{2} \cdot n \cdot \Delta x =$
$= \dfrac{a+b}{2} \cdot n \cdot \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$; $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$. Můžeme to porovnat s výsledkem podle Newtonovy-Leibnizovy formule: $\int_a^b x\, dx = \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_a^b = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$. ∎

POZNÁMKA : Použili jsme vzorec pro součet aritmetické řady $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

I.3. Newtonova-Leibnizova formule

• Pomocí Newtonovy-Leibnizovy formule vypočtěte integrály :

Příklad **9.** $\int_0^{\pi/4} \dfrac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx$

Řešení : $I = \int_0^{\pi/4} \dfrac{1 + 1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/4} \left(\dfrac{2}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \Big[2\,\mathrm{tg}\, x - x\Big]_0^{\pi/4} =$
$= 2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = 2 - \dfrac{\pi}{4}$. ∎

Příklad **10.** $\int_3^8 \sqrt{1+x}\, dx$

Řešení : $I = \int_3^8 (1+x)^{1/2}\, dx = \dfrac{2}{3}\Big[(1+x)^{3/2}\Big]_3^8 = \dfrac{2}{3} \cdot (9\sqrt{9} - 4\sqrt{4}) = \dfrac{38}{3}$. ∎

Příklad **11.** $\int_0^2 \dfrac{x-3}{x^2+4}\, dx$

Řešení : $I = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2x}{x^2+4}\,dx - 3\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\ln(x^2+4)\Big]_0^2 - \frac{3}{2}\Big[\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big]_0^2 =$

$= \frac{1}{2}\cdot(\ln 8 - \ln 4) - \frac{3}{2}\cdot \operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{2}\cdot \ln 2 - \frac{3\pi}{8}.$ ■

***Příklad* 12.** $\displaystyle\int_2^5 \frac{5x+1}{x^2+x-2}\,dx$

Řešení : Integrovanou funkci nejdříve rozložíme na parciální zlomky a integrál vypočteme :

$\frac{5x+1}{x^2+x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}\,,\quad 5x+1 = A(x+2) + B(x-1)$

$x = 1:\ 6 = 3A \longrightarrow A = 2\,;\quad x = -2:\ -9 = -3B \longrightarrow B = 3$

$$I = \int_2^5 \left(\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}\right)dx = \Big[2\ln|x-1| + 3\ln|x+2|\Big]_2^5 =$$

$= 2\ln 4 + 3\ln 7 - 2\ln 1 - 3\ln 4 = 3\ln 7 - \ln 4 = \ln\frac{343}{4}.$

POZOR ! Tentýž integrál na jiném intervalu $\langle a, b\rangle$ nemusí existovat, bude-li $\langle a, b\rangle$ obsahovat aspoň jedno z čísel $x = -2$ nebo $x = 1$. ■

***Příklad* 13.** $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\frac{x}{2}\,dx$

Řešení : Zde využijeme, že funkce $f(x) = \cos^2\frac{x}{2}$ je sudá, tj. $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

$I = 2\int_0^{\pi/2} \cos^2\frac{x}{2}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos x}{2}\,dx = \Big[x + \sin x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + 1.$ ■

***Příklad* 14.** $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \sin x\,dx$

Řešení : Nyní využijeme to, že funkce $f(x) = x^2\sin x$ je lichá, tj. $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$ ■

***Příklad* 15.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \left|\frac{1}{2} - \cos x\right| dx$

Řešení : Odstraníme absolutní hodnotu: $\frac{1}{2} - \cos x \geq 0$ pro $x \in \langle\frac{\pi}{3}, \pi\rangle$ a $\frac{1}{2} - \cos x < 0$ pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{3}),$ takže pro daný integrál platí :

$I = \int_0^{\pi/3} -\left(\frac{1}{2} - \cos x\right)dx + \int_{\pi/3}^{\pi}\left(\frac{1}{2} - \cos x\right)dx = \Big[\sin x - \frac{1}{2}x\Big]_0^{\pi/3} + \Big[\frac{1}{2}x - \sin x\Big]_{\pi/3}^{\pi} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}.$ ■

16. $\displaystyle\int_{-4}^{4} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$ $[2\ln 3]$ **17.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx$ $[\ln 3]$

18. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^x}{e^x+e}\,dx$ $\left[\ln\frac{2e}{1+e}\right]$ **19.** $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^2-x}\,dx$ $\left[2\ln\frac{4}{3}\right]$

I.4. Věta o střední hodnotě integrálů

• Pomocí věty o střední hodnotě odhadněte hodnoty integrálů :

Příklad **20.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

Řešení : Použijeme Větu o střední hodnotě : *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou spojité v $\langle a,b\rangle$ a nechť $g(x)$ má stále stejné znaménko pro všechna $x \in \langle a,b\rangle$. Potom existuje číslo $c \in \langle a,b\rangle$ takové, že* $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$

V našem případě $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x^3}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{1+c^3}}\int_0^1 x^9\,dx = \frac{1}{\sqrt{1+c^3}}\cdot\frac{1}{10}$, kde $c \in \langle 0,1\rangle$, což nám umožňuje odhadnout $\displaystyle\frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1}{10\sqrt{1+c^3}} < \frac{1}{10}$; a tedy $\displaystyle\frac{1}{10\sqrt{2}} \le I \le \frac{1}{10}.$ ■

Příklad **21.** $\displaystyle\int_0^2 e^{x^2}\,dx$

Řešení : $\displaystyle I = e^{c^2}\cdot\int_0^2 dx = e^{c^2}\cdot 2,\quad c\in\langle 0,2\rangle,\quad$ tedy $2 \le I \le 2e^4$. ■

Příklad **22.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$

Řešení : $\displaystyle I = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+c}\cdot\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+c}\cdot\frac{1}{n+1} = 0$ pro všechna $c\in\langle 0,1\rangle$. ■

23. $\displaystyle\int_1^{10}\frac{e^{-x}}{x}\,dx$ $\qquad\left[\frac{e^9-1}{10e^{10}} \le I \le \frac{e^9-1}{e^{10}}\right]$

24. $\displaystyle\int_0^{0.5}\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}\,dx$ $\qquad\left[\frac{1}{2\sqrt{1-0.5^n}} \le I \le \frac{1}{2}\right]$

25. $\displaystyle\int_1^4\frac{\cos x}{x^3}\,dx$ $\qquad\left[0 \le I \le \frac{15}{32}\right]$

I.5. Metoda per partes

• Vypočtěte integrály pomocí metody per partes :

Příklad **26.** $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|x|\cos x\,dx$

Řešení : Integrovaná funkce je sudá. Tedy $\displaystyle I = 2\int_0^{\pi/2}|x|\cos x\,dx = 2\int_0^{\pi/2}x\cos x\,dx =$

$$= \begin{vmatrix} u = x, & v' = \cos x \\ u' = 1, & v = \sin x \end{vmatrix} = 2\Big[x\sin x\Big]_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 2\cdot\frac{\pi}{2} + 2\Big[\cos x\Big]_0^{\pi/2} = \pi - 2.$$

■

***Příklad* 27.** $\displaystyle\int_0^{e-1} \ln(x+1)\, dx$

Řešení : $I = \begin{vmatrix} u = \ln(x+1), & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x+1}, & v = x \end{vmatrix} = \Big[x\ln(x+1)\Big]_0^{e-1} - \displaystyle\int_0^{e-1} \frac{x}{x+1}\, dx = (e-1)\ln e -$

$$- \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1}\, dx = e - 1 - \Big[x - \ln(x+1)\Big]_0^{e-1} = e - 1 - (e - 1 - \ln e) = 1.$$

■

***Příklad* 28.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin x \, dx$

Řešení : $I = \begin{vmatrix} u = e^{2x}, & v' = \sin x \\ u' = 2e^{2x}, & v = -\cos x \end{vmatrix} = -\Big[e^{2x}\cos x\Big]_0^{\pi/2} + 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\, dx =$

$$= \begin{vmatrix} u = e^{2x}, & v' = \cos x \\ u' = 2e^{2x}, & v = \sin x \end{vmatrix} = 1 + 2\Big[e^{2x}\sin x\Big]_0^{\pi/2} - 4\int_0^{\pi/2} e^{2x}\sin x\, dx.$$

Dostali jsme rovnici $I = 1 + 2e^{\pi} - 4I$, ze které $5I = 1 + 2e^{\pi}$.

Výsledek daného příkladu je $I = \frac{1}{5}(1 + 2e^{\pi})$. ■

***Příklad* 29.** $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$

Řešení :

- ⋆ pro $n = 0$ je $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$;
- ⋆ pro $n = 1$ je $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1$;
- ⋆ pro $n = 2$ je $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\Big[x - \frac{\sin 2x}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$;
- ⋆ pro $n \ge 3$ je $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cdot \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1 - \cos^2 x)\, dx =$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\, dx - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cdot \cos x \cdot \cos x\, dx = \begin{vmatrix} u = \cos x, & v' = \sin^{n-2} \cdot \cos x \\ u' = -\sin x, & v = \frac{1}{n-1}\sin^{n-1} x \end{vmatrix} =$$

$$= I_{n-2} - \Big[\frac{\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n-1}\Big]_0^{\pi/2} - \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx.$$

Dostaneme rovnici $I_n = I_{n-2} - 0 - \frac{1}{n-1} I_n$, ze které vypočteme $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

Provedeme diskuzi :

$$\text{Pro} \begin{cases} n = 2k \text{ je } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}; \\ n = 2k+1 \text{ je } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot 1. \end{cases}$$

Tím jsme odvodili tzv. **Wallisovy formule.**

Tentýž výsledek platí i pro $\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$, jelikož $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$. ∎

30. $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x\,dx$ $\left[\frac{16}{35}\right]$

31. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^8 x\,dx$ $\left[\frac{35\pi}{128}\right]$

32. $\int_0^{\pi} \cos^6 x\,dx$ $\left[\frac{5\pi}{16}\right]$

33. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^9 x\,dx$ $[0]$

34. $\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arctg} x\,dx$ $\left[\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

35. $\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx$ $\left[2 - \frac{2}{e}\right]$

36. $\int_0^1 y \cdot \ln(x+y)\,dx,\ (y > 0)$ $[y(y+1)\ln(y+1) - y^2 \ln y - y]$

I.6. Substituční metoda

• Vypočtěte integrály substituční metodou :

***Příklad* 37.** $\int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$

Řešení : Použijeme substituci $\left[\begin{array}{l|ll} 1+\ln x = t & x_1 = 1 & \longrightarrow t_1 = 1 \\ \frac{dx}{x} = dt & x_2 = e^3 & \longrightarrow t_2 = 4 \end{array}\right]$ a dostaneme

$$I = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}}\,dt = 2\Big[\sqrt{t}\Big]_1^4 = 2 \cdot (2-1) = 2. \qquad ∎$$

***Příklad* 38.** $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^2} \cdot \sin\frac{1}{x}\,dx$

Řešení : Po substituci $\left[\begin{array}{l|ll} \frac{1}{x} = t & x_1 = \frac{1}{\pi} & \longrightarrow t_1 = \pi \\ -\frac{dx}{x^2} = dt & x_2 = \frac{2}{\pi} & \longrightarrow t_2 = \frac{\pi}{2} \end{array}\right]$ obdržíme

$$I = -\int_{\pi}^{\pi/2} \sin t\,dt = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin t\,dt = \Big[-\cos t\Big]_{\pi/2}^{\pi} = 1\,. \qquad ∎$$

***Příklad* 39.** $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$

Řešení : Po substituci $\left[\begin{array}{l|ll} x^2 = t & x_1 = 0 & \longrightarrow t_1 = 0 \\ 2x\,dx = dt & x_2 = 1 & \longrightarrow t_2 = 1 \end{array}\right]$ získáme

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{arctg} t\Big]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}. \qquad ∎$$

***Příklad* 40.** $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

Řešení : Použijeme substituci $\left[\begin{array}{l|l} x = 2\sin t & x_1 = 0 \longrightarrow t_1 = 0 \\ dx = 2\cos t\,dt & x_2 = 2 \longrightarrow t_2 = \pi/2 \end{array}\right]$ a dostaneme

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t\,dt = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = 4\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= 2\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi\,. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 41.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x^2+4)^2}\,dx$

Řešení : Zvolíme substituci $\left[\begin{array}{l|l} x^2+4 = t & x_1 = 1 \longrightarrow t_1 = 5 \\ 2x\,dx = dt & x_2 = 2 \longrightarrow t_2 = 8 \end{array}\right]$ a potom

$$I = \frac{1}{2}\int_5^8 \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{t}\right]_5^8 = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{80}. \qquad \blacksquare$$

42. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 3}}\,dx$ $\quad [\ln\sqrt{3}\,]$

43. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$ $\quad \left[\frac{\pi}{4}\right]$

44. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $\quad \left[\frac{\pi}{72}\right]$

45. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^5 x \cdot \cos x\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{48}\right]$

46. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin^3 x\,dx$ $\quad \left[\frac{5}{24}\right]$

47. $\displaystyle\int_0^{1/2} x^2\sqrt{1-4x^2}\,dx$ $\quad \left[\frac{\pi}{128}\right]$

48. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}+1}\,dx$ $\quad [2(2-\ln 2)]$

49. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$ $\quad \left[\frac{\sqrt{3}\pi}{9}\right]$

I.7. Nevlastní integrál

Nechť pro každé $t \in \langle a; b)$ existuje integrál $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$. Potom symbol

$$(1) \quad \int_a^{\infty} f(x)\,dx, \quad \textit{resp.} \quad (2) \quad \int_a^b f(x)\,dx, \ \textit{kde} \lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty,$$

*nazýváme **nevlastní integrál vlivem meze**, resp. **nevlastní integrál vlivem funkce**. Integrál* (1), *resp.* (2) *nazýváme **konvergentní**, jestliže*

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx, \quad \textit{resp.} \quad \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx, \quad \textit{je vlastní.}$$

*Je-li zmíněná limita nevlastní nebo neexistuje, pak nazýváme integrál **divergentní**.*

• Vypočtěte nevlastní integrály :

***Příklad* 50.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Řešení : Jde o nevlastní integrál vlivem meze. $I = \lim\limits_{a\to\infty} \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{a\to\infty} \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^a =$
$= \lim\limits_{a\to\infty} \operatorname{arctg} a = \frac{\pi}{2}$. Nevlastní integrál tedy konverguje a rovná se $\frac{\pi}{2}$. ■

***Příklad* 51.** $\int_1^\infty x \ln x \, dx$

Řešení : $I = \lim\limits_{a\to\infty} \int_1^a x \ln x \, dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & v' = x \\ u' = \frac{1}{x}, & v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \lim\limits_{a\to\infty} \Big[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x\Big]_1^a - \frac{1}{2} \lim\limits_{a\to\infty} \int_1^a x \, dx =$
$= \lim\limits_{a\to\infty} \left(\frac{a^2}{2} \ln a - \frac{1}{4}\Big[x^2\Big]_1^a\right) = \lim\limits_{a\to\infty} \left(\frac{a^2}{2} \ln a - \frac{1}{4} \cdot a^2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \lim\limits_{a\to\infty} \frac{a^2}{2} \cdot \left(\ln a - \frac{1}{2}\right) =$
$= \infty$. Daný integrál diverguje. ■

***Příklad* 52.** $\int_{-\infty}^0 x e^x \, dx$

Řešení : $I = \lim\limits_{a\to\infty} \int_{-a}^0 x e^x \, dx = \left| \begin{matrix} u = x, & v' = e^x \\ u' = 1, & v = e^x \end{matrix} \right| = \lim\limits_{a\to\infty} \left(\Big[xe^x - e^x\Big]_{-a}^0\right) =$
$= \lim\limits_{a\to\infty} (-1 + a \cdot e^{-a} + e^{-a}) = -1 + \lim\limits_{a\to\infty} \frac{a+1}{e^a} \, \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \overset{l'H}{=} -1 + \lim\limits_{a\to\infty} \frac{1}{e^a} = -1 + 0 = -1.$
■

***Příklad* 53.** $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

Řešení : $\int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(x+1) + C$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \, dx = \int_{-\infty}^a f(x) \, dx + \int_a^\infty f(x) \, dx$$

$I = \lim\limits_{t\to-\infty} \int_t^a f(x) \, dx + \lim\limits_{t\to\infty} \int_a^t f(x) \, dx = \lim\limits_{t\to-\infty} \Big[\operatorname{arctg}(x+1)\Big]_t^a + \lim\limits_{t\to\infty} \Big[\operatorname{arctg}(x+1)\Big]_a^t =$
$= \operatorname{arctg}(a+1) - \lim\limits_{t\to-\infty} \operatorname{arctg}(t+1) + \lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{arctg}(t+1) - \operatorname{arctg}(a+1) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} =$
$= \pi$. Integrál je konvergentní. ■

***Příklad* 54.** $\int_0^\infty (x-1) \sin x \, dx$

Řešení : $I = \lim\limits_{a\to\infty} \int_0^a (x-1) \sin x \, dx = \left| \begin{matrix} u = x - 1, & v' = \sin x \\ u' = 1, & v = -\cos x \end{matrix} \right| =$
$= \lim\limits_{a\to\infty} \left(-\Big[(x-1)\cos x\Big]_0^a + \Big[\sin x\Big]_0^a\right) = \lim\limits_{a\to\infty} (-(a-1)\cos a - 1 + \sin a)$.
Protože neexistuje limita, integrál diverguje. ■

***Příklad* 55.** $\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \ln x}$

Řešení : Tento integrál je nevlastní vlivem funkce . Tedy
$I = \lim\limits_{\epsilon\to0+} \int_{1+\epsilon}^e \frac{dx}{x \ln x} = \lim\limits_{\epsilon\to0+} \Big[\ln|\ln x|\Big]_{1+\epsilon}^e = \lim\limits_{\epsilon\to0+} \Big(\ln\ln e - \ln\ln(1+\epsilon)\Big) =$
$= -\lim\limits_{\epsilon\to0+} \ln\ln(1+\epsilon) = +\infty$. Daný integrál tedy diverguje. ■

Příklad 56. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2-1}$

Řešení : Opět máme nevlastní integrál vlivem funkce.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_0^{1-\epsilon}\frac{dx}{x^2-1} = \lim_{\epsilon\to 0+}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_0^{1-\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{2}\ln\frac{\epsilon}{2-\epsilon} - \ln 1 =$$

$=-\infty$. Integrál diverguje. (Použili jsme vzorce $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.) ■

Příklad 57. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

Řešení : Nejdříve spočítáme neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} =$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \sqrt{x-1}=t & x=1+t^2 \\ x-1=t^2 & dx=2tdt \end{array}\right] = \int \frac{2t\,dt}{t(1+t^2)} = 2\operatorname{arctg} t = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + C.$$

Daný integrál je nevlastní jak vlivem funkce tak i vlivem meze. Proto rozdělíme interval např. $\langle 1,+\infty) = \langle 1,2\rangle \cup (2,\infty)$ a potom

$$I = \int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^\infty f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{1+\epsilon}^2 f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_2^t f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0+}\left[2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right]_{1+\epsilon}^2 + \lim_{t\to+\infty}\left[2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right]_2^t = 2\operatorname{arctg} 1 - 2\lim_{\epsilon\to 0+}\operatorname{arctg}\sqrt{\epsilon} +$$

$$+2\lim_{t\to+\infty}\operatorname{arctg}\sqrt{t-1} - 2\operatorname{arctg} 1 = \pi\ .$$ ■

58. $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx$ [1/2]

59. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^3}$ [-1/2]

60. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}$ [1]

61. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ [$\pi^2/8$]

62. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^k}$ [$\frac{1}{k-1}$ pro $k>1$; pro $k\le 1$ integrál diverguje]

63. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{2|x|}{x^2+1}\,dx$ [∞ , tj. integrál diverguje]

I.8. Funkce definované Riemannovým integrálem

• Určete $\dfrac{d\Phi}{dx}$ pro funkci $\Phi(x)$:

Příklad 64. $\Phi(x) = \displaystyle\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt$, kde proměnná x probíhá některý interval I, na němž jsou funkce $g_1(x), g_2(x)$ diferencovatelné a funkce $f(t)$ je spojitá pro $t \in \langle g_1(x), g_2(x)\rangle$ a pro všechna $x\in I$.

Řešení : Předpokládejme, že existuje funkce $F(t)$ primitivní k $f(t)$, tj. $F'(t)=f(t)$, pak

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{d}{dx}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} = \frac{d}{dx}\Big(F(g_2(x)) - F(g_1(x))\Big) =$$
$$= F'(g_2(x))\cdot g_2'(x) - F'(g_1(x))\cdot g_1'(x) = f(g_2(x))\cdot g_2'(x) - f(g_1(x))\cdot g_1'(x).$$

V případě, že $g_1(x) = a$ je $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))\cdot g'(x)$. ■

***Příklad* 65.** $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^{ax} \frac{\sin t}{t}\,dt,\ a > 0$

Řešení : Podle předchozího příkladu, kde $g_1(x) = 0,\ g_2(x) = g(x) = ax,\ f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$,

je $\displaystyle\frac{d\Phi}{dx} = \frac{d}{dx}\int_0^{ax}\frac{\sin t}{t}\,dt\Big[= f(g(x))\cdot g'(x)\Big] = \frac{\sin ax}{ax}\cdot a = \frac{\sin ax}{x}$. ■

66. $\Phi(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \ln t\,dt,\ x > 0$ $\quad[(9x^2 - 4x)\ln x]$

67. $\Phi(x) = \displaystyle\int_x^0 \sqrt{1+t^4}\,dt$ $\quad\left[-\sqrt{1+x^4}\right]$

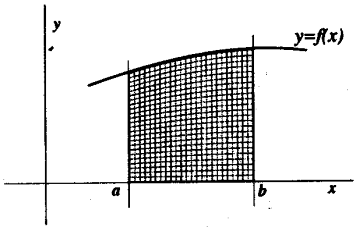
68. $\Phi(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{\sqrt{x}} \sin t^2\,dt,\ x > 0$ $\quad\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}\right]$

69. $\Phi(x) = \displaystyle\int_{\ln x}^{x} e^{t^2}\,dt,\ x > 0$ $\quad\left[e^{x^2} - \frac{1}{x}e^{\ln^2 x}\right]$

I.9. Plošný obsah rovinných obrazců

Je-li obrazec ohraničen přímkami $y = 0,\ x = a,\ x = b$ a křivkou $y = f(x)$, kde $f(x) \geq 0$ pro $x \in \langle a, b\rangle$, pak pro plošný obsah P tohoto obrazce platí :

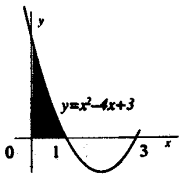
$$P = \int_a^b f(x)\,dx.$$



• Stanovte plošné obsahy obrazců ohraničených křivkami :

***Příklad* 70.** $y = x^2 - 4x + 3,\quad x = 0,\quad y = 0$

Řešení : Rovnici dané křivky zapíšeme ve tvaru $y = (x-1)(x-3)$.

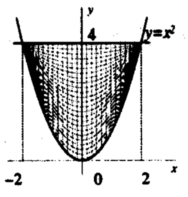


Z obrázku je vidět, že obsah je

$$P = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\,dx =$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3}.$$ ■

***Příklad* 71.** $y = x^2,\quad y = 4$

Řešení :

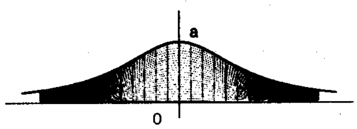


$$P = \int_{-2}^{2} 4\,dx - \int_{-2}^{2} x^2\,dx = 2\int_0^2 4\,dx -$$
$$-2\int_0^2 x^2\,dx = 8\Big[x\Big]_0^2 - 2\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^2 = \frac{32}{3}.$$

■

***Příklad* 72.** $y = \dfrac{a^3}{x^2+a^2}, \quad y = 0, \quad a > 0$

Řešení :

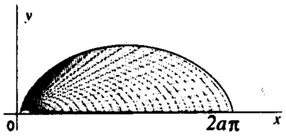


$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^3}{x^2+a^2}\,dx = 2a^3 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} =$$
$$= 2a^3 \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+a^2} = 2a^3 \lim_{b\to\infty} \frac{1}{a}\Big[\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big]_0^b =$$
$$= 2a^2 \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = 2a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = a^2\pi.$$

■

***Příklad* 73.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $y = 0$. Řečeno slovy : stanovte plošný obsah obrazce ohraničeného osou x a jedním obloukem **cykloidy**.

Řešení : Jelikož křivka je zadána parametricky, použijeme následující zápis :



$$P = \int_a^b y\,dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot \dot{x}(t)\,dt, \text{ kde } x(t_1) = a, x(t_2) = b.$$

Potom $P = \displaystyle\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt =$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt = a^2 \int_0^{2\pi} \Big(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\Big)\,dt =$$
$$= a^2\Big[t - 2\sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\frac{\sin 2t}{2}\Big]_0^{2\pi} = a^2 \cdot \frac{3}{2}\cdot 2\pi = 3\,a^2\pi.$$

■

74. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $\quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ $\quad [\pi ab]$

75. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $\quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ $\quad \left[\frac{3}{4}a^2\right]$

76. $x = y^2$, $xy = 1$, $x = 4y$ $\quad [1/6 + \ln 2]$

77. $xy = 2$, $y = 2x^2$, $y = 8$, $(x \geq 0)$ $\quad [28/3 - \ln 16]$

POZNÁMKA : **Plošným obsahům rovinných obrazců se budeme podrobněji věnovat v kapitole pojednávající o dvojném integrálu.**

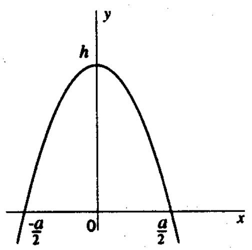
I.10. Objem a povrch rotačních těles

Mějme těleso vzniklé rotací kolem osy x obrazce ohraničeného osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ a křivkou $y = f(x)$, kde $f(x) \geq 0$, $x \in \langle a, b)$. Potom pro objem V a plošný obsah povrchu S tohoto tělesa platí

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx, \quad S = 2\pi \int_a^b f(x)\,\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Příklad 78. Souměrná parabolická úseč se základnou a a výškou h rotuje kolem základny tj. tětivy paraboly. Stanovte objem vzniklého tělesa.

Řešení :



Parabolickou úseč umístíme do souřadnicové soustavy tak, aby osou rotace byla osa x . Nyní sestavíme rovnici této paraboly : vrchol paraboly je v bodě $[0, h]$, tj. $y - h = 2px^2$ a parabola prochází bodem $\left[\frac{a}{2}, 0\right]$. Z této podmínky vypočteme parametr

$$0 - h = 2p \cdot \frac{a^2}{4} \longrightarrow p = \frac{-2h}{a^2}.$$

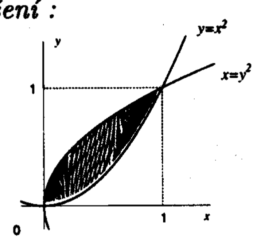
Tím jsme obdrželi rovnici paraboly $y = h - 4\,\frac{h}{a^2}\,x^2$ a hledaný objem bude

$$V = \pi \int_{-a/2}^{a/2} (h - \frac{4h}{a^2}x^2)^2\,dx = 2\pi \int_0^{a/2} h^2(1 - \frac{8x^2}{a^2} + \frac{16x^4}{a^4})\,dx =$$

$$= 2\pi h^2 \Big[x - \frac{8}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{16}{a^4}\cdot\frac{x^5}{5}\Big]_0^{a/2} = \frac{8}{15}\pi h^2 a\,. \qquad \blacksquare$$

Příklad 79. Obrazec ohraničený parabolami $y = x^2$, $y^2 = x$ se otáčí kolem osy x. Jaký je objem takto vzniklého tělesa?

Řešení :



$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^1 x\,dx - \pi \int_0^1 x^4\,dx =$$

$$= \pi\Big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\Big]_0^1 = \frac{3\pi}{10}. \qquad \blacksquare$$

Příklad 80. Obrazec ohraničený jedním obloukem cykloidy dané parametrickými rovnicemi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ a osou x rotuje kolem osy x. Určete objem a plošný obsah povrchu tohoto rotačního tělesa.

Řešení :

$$V = \pi \int_0^{2\pi} y^2\dot{x}\,dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\,dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-3\cos t+\frac{3(1+\cos 2t)}{2} - (1-\sin^2 t)\cos t)\,dt = \pi\,a^3\,\frac{5}{2}\,2\pi = 5\pi^2 a^3.$$

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} y\cdot\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\,dt = \left|\begin{array}{c} \dot{x} = a(1-\cos t),\quad \dot{y} = a\sin t \\ (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = a^2(2 - 2\cos t) \end{array}\right| =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{2}\,a\,\sqrt{1-\cos t}\,dt = 2\sqrt{2}\,a^2\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\,dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\,a^2\pi \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\sin^3\frac{t}{2}\,dt = 8a^2\pi \int_0^{2\pi} \Big(1 - \cos^2\frac{t}{2}\Big)\cdot\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 8\,a^2\pi\Big[-2\cos\frac{t}{2} + \frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\Big]_0^{2\pi} = \frac{64}{3}\,a^2\pi. \qquad \blacksquare$$

Příklad 81. Obrazec ohraničený jedním obloukem cykloidy a osou x rotuje kolem osy y. Jaký je objem takto vzniklého rotačního tělesa?

Řešení : Objem se v tomto případě spočítá pomocí vzorce $V_y = 2\pi \int_a^b xy\,dx =$

$$= \left[\begin{array}{c} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{c} dx = a(1-\cos t)dt \\ 0 \le t \le 2\pi \end{array} \right] = 2\pi \int_0^{2\pi} a(t-\sin t)\cdot a^2(1-\cos t)^2\,dt =$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} \Big(t(1-\cos t)^2 - (1-\cos t)^2 \sin t \Big)\,dt = 2\pi a^3 (I_1 + I_2),\text{ kde}$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} t\,(1-\cos t)^2\,dt = \left| \begin{array}{ll} u = t, & v' = (1-\cos t)^2 \\ u' = 1, & v = \frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4} \end{array} \right| =$$

$$= \left[t\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4}\right)dt = \frac{3}{2}\cdot 4\pi^2 - \frac{3}{4}\cdot 4\pi^2 = 3\pi^2,$$

$$I_2 = -\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \sin t\,dt = -\left[\frac{1}{3}\cdot(1-\cos t)^3\right]_0^{2\pi} = 0$$

Po dosazení je $\quad V_y = 2\pi a^3 \cdot (3\pi^2 + 0) = 6\pi^3 a^3.$ ■

***Příklad* 82.** Oblouk OP křivky $y = \sqrt{x^3}$, kde $O = [0,0]$ a P je jistý bod křivky, rotuje kolem osy x a potom kolem osy y . Jak je třeba volit bod P, aby objemy obou takto vzniklých rotačních těles byly stejné?

Řešení : Označme souřadnice bodu $P = \left[b, \sqrt{b^3}\right]$. Potom

$$V_x = \pi \int_0^b y^2\,dx = V_y = 2\pi \int_0^b xy\,dx,$$

$$y = x^{3/2}, \qquad V_x = \pi \int_0^b x^3\,dx = \pi\frac{b^4}{4}, \qquad V_y = 2\pi \int_0^b x\cdot x^{3/2}\,dx = 2\pi\cdot\frac{2}{7}\cdot b^{7/2}.$$

Z rovnice $\dfrac{\pi b^4}{4} = \dfrac{4\pi b^{7/2}}{7}$ obdržíme $b = \left(\dfrac{16}{7}\right)^2.$ ■

• Stanovte objem a plošný obsah povrchu tělesa vzniklého rotací křivky kolem osy x :

83. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\quad t \in \langle 0,\pi\rangle$ $\qquad \left[V = \frac{32}{105}\pi a^3,\ S = \frac{12}{5}\pi a^2\right]$

84. $y^2 = x,\quad 1 \le x \le 4$ $\qquad \left[V = \frac{15}{2}\pi,\ S = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right]$

• Stanovte objem tělesa vzniklého rotací kolem osy y obrazce ohraničeného danou křivkou a osou x.

85. $y = \sin x,\quad x \in \langle 0,\pi\rangle$ $\qquad [2\pi^2]$

86. $y = x^3 - x,\quad x \in \langle 1,2\rangle$ $\qquad \left[\frac{116\pi}{15}\right]$

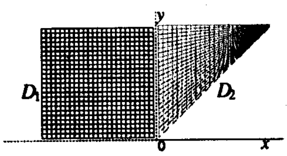
II. Diferencální počet funkcí více proměnných

II.1. Definiční obor funkce dvou proměnných

- Určete definiční obor funkcí a zakreslete jej :

Příklad **87**. $z = \dfrac{\ln(x^2y)}{\sqrt{y-x}}$

Řešení : Proměnné x a y musí splňovat současně tyto podmínky :

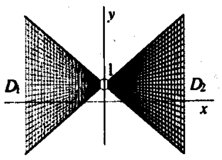


$$x^2y > 0 \longrightarrow y > 0, \quad x \neq 0$$
$$y - x > 0 \longrightarrow y > x$$
$$\mathcal{D}_1 = \{[x,y] \in E_2 : x < 0, y > 0\},$$
$$\mathcal{D}_2 = \{[x,y] \in E_2 : x > 0, y > x\}.$$

Pro definiční obor dané funkce dostaneme $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ ■

Příklad **88**. $z = \arcsin \dfrac{y-1}{x}$

Řešení :



Proměnné x a y musí splňovat současně tyto podmínky :

$$-1 \leq \frac{y-1}{x} \leq 1 \quad \text{a} \quad x \neq 0 \,.$$

Takže platí : $x > 0 : \quad -x \leq y - 1 \leq x \longrightarrow -x + 1 \leq y \leq x + 1$

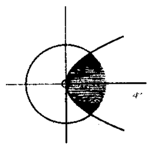
$x < 0 : \quad -x \geq y - 1 \geq x \longrightarrow -x + 1 \geq y \geq x + 1$

$\mathcal{D}_1 = \{[x,y] \in E_2 : x < 0, \quad x + 1 \leq y \leq 1 - x\},$

$\mathcal{D}_2 = \{[x,y] \in E_2 : x > 0, \quad 1 - x \leq y \geq x + 1\}.$

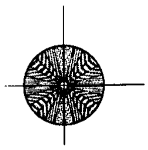
Pro definiční obor dané funkce dostaneme $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. ■

89. $z = \dfrac{\sqrt{x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$



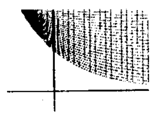
[$0 \neq x^2 + y^2 < 1;\ x \geq y^2$]

90. $z = \sqrt{\ln \dfrac{16}{x^2+y^2}}$



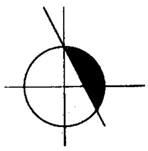
[$x^2 + y^2 \leq 16,\ [x,y] \neq [0,0]$]

91. $z = 3 - 7\ln(x + \ln y)$



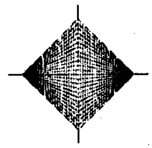
[$y > e^{-x}$]

92. $z = \sqrt{2x + y - 4} + \sqrt{16 - x^2 - y^2}$



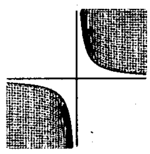
[$x^2 + y^2 \leq 16;\ y \geq 4 - 2x$]

93. $z = \dfrac{3}{\sqrt{1-|x|-|y|}}$



$[|x| + |y| < 1]$

94. $z = \sqrt{xy-4}$



$[xy \geq 4]$

II.2. Limita funkce

• Vyšetřete limity funkce v bodě :

***Příklad* 95.** $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

Řešení : Využijeme skutečnost, že $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} (x^2+y^2) = 0$ a provedeme substituci $t = x^2+y^2$. Potom $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ ■

***Příklad* 96.** $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}$

Řešení : Připomeneme si známou větu :

Existuje-li dvojná limita , pak existují limity dvojnásobné a jsou si rovny.

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = A \implies \lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y)) = \lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y)) = A$$

Odtud plyne

$$\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y)) \neq \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) \implies \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) \text{ neexistuje.}$$

Tedy konkrétně :

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} \frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1 \\ &\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}) = \lim_{y\to 0}\frac{-2y^2}{y^2} = -2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{vyšetřovaná limita neexistuje .}$$

■

***Příklad* 97.** $\displaystyle\lim_{\substack{[x,y]\to[1,1] \\ [x,y]\in M}} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$, $[x,y] \in M$, kde $M = \{[x,y] \in E_2 \,;\, x-y \neq 0\}$

Řešení : Jde o neučitý výraz "$\frac{0}{0}$", ale nabízí se elementární úprava, kterou provedeme

$$= \lim_{\substack{[x,y]\to[1,1] \\ [x,y]\in M}} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \lim_{\substack{[x,y]\to[1,1] \\ [x,y]\in M}} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)} =$$

$$\lim_{\substack{[x,y]\to[1,1] \\ [x,y]\in M}} \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{3}{4}.$$

■

98. $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ [neexistuje]

99. $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{e^{2(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2}$ [2]

100. $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\operatorname{tg}(x^2+y^4)}{3(x^2+y^4)}$ $[\frac{1}{3}]$

101. $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{xy}{|xy|}$ [neexistuje]

II.3. Spojitost funkce

***Příklad* 102.** Vyšetřete spojitost funkce $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2+1}-1}, & [x,y] \neq [0,0] \\ 2, & [x,y] = [0,0] \end{cases}$

v bodě $[0,0]$.

Řešení: Funkce $f(x,y)$ je spojitá v bodě $[x_0,y_0]$, právě když $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

V našem případě $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2+1}-1} = |\tfrac{0}{0}| = \left[\begin{smallmatrix}\text{substituce}\\ x^2y^2=t\end{smallmatrix}\right] = \lim\limits_{t\to0} \dfrac{t}{\sqrt{t+1}-1} \overset{l'H}{=}$

$= \lim\limits_{t\to0} \dfrac{1}{\frac{1}{2\sqrt{t+1}}} = 2 = f(0,0) \longrightarrow$ daná funkce $f(x,y)$ je spojitá v bodě $[0,0]$. ■

103. Ukažte, že funkce $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & [x,y] \neq [0,0] \\ 0, & [x,y] = [0,0] \end{cases}$ není spojitá

v bodě $[0,0]$. [*Návod :* Použijte dvojnásobné limity.]

• Určete množiny, na nichž jsou dané funkce definované a spojité :

104. $f(x,y) = \dfrac{x^2+x-12}{x^2+y^4+1}$ $[E_2]$

105. $f(x,y,z) = e^{z^2+x} \cdot \sin(x+y)$ $[E_3]$

106. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2-2y}$ $[E_2 - \{y = \frac{x^2}{2}\}]$

107. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ [E_2, lze dodefinovat $f(0,0) = \lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$]

108. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\ln\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$ $[E_3 - [0,0,0] \cup \{x^2+y^2+z^2=1\}]$

109. $f(x,y,z) = \dfrac{\sin(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2+y^2+z^2}$ [E_3, lze dodefinovat $f(0,0,0) = 0$]

110. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{|xy|+|z|}$ $[E_3 - \{z=0\} \cap \{xy=0\}]$

111. $f(x,y,z) = \dfrac{y+4}{x^2y-xy+4x^2-4x}$ $[E_3 - \{x=0\} \cup \{x=1\}]$

II.4. Parciální derivace

- Najděte parciální derivace prvního řádu daných funkcí podle jejich proměnných.

  Použijeme označení : $f'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ a $f'_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

***Příklad* 112.** $f(x,y) = (2x-3y)^4$

Řešení : $f'_x = 4(2x-3y)^3 \cdot 2$, $f'_y = 4(2x-3y)^3 \cdot (-3)$ ■

***Příklad* 113.** $f(x,y) = 5x^4y^2 + \dfrac{x}{y} + 2x^2 - 3y$

Řešení : $f'_x = 20x^3y^2 + \dfrac{1}{y} + 4x$, $f'_y = 10x^4y - \dfrac{x}{y^2} - 3$ ■

***Příklad* 114.** $f(x,y) = y^{x^2+3}, \quad y > 0$

Řešení : $f'_x = y^{x^2+3} \cdot \ln y \cdot 2x$, $f'_y = (x^2+3) \cdot y^{x^2+2}$ ■

***Příklad* 115.** $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$, pro $|x| > |y|$

Řešení : $f'_x = y \cdot \dfrac{-2x}{2(x^2-y^2)^{3/2}} = \dfrac{-xy}{(x^2-y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$

$$f'_y = \frac{\sqrt{x^2-y^2} - y \cdot \dfrac{-2y}{2\sqrt{x^2-y^2}}}{x^2-y^2} = \frac{x^2-y^2+y^2}{(x^2-y^2)\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{x^2}{(x^2-y^2)\sqrt{x^2-y^2}}.$$

■

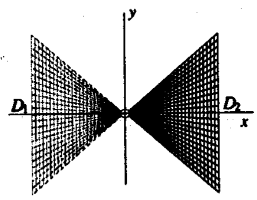
***Příklad* 116.** $f(x,y,z) = (x^y)^z$

Řešení : $f(x,y,z) = x^{yz}$, $f'_x = yzx^{yz-1}$, $f'_y = x^{yz} \cdot \ln x \cdot z$, $f'_z = x^{yz} \cdot \ln x \cdot y$.

■

***Příklad* 117.** Určete obor diferencovatelnosti funkce $f(x,y) = x\sqrt{x^2-y^2}$.

Řešení : $f'_x = \sqrt{x^2-y^2} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $f'_y = \dfrac{-xy}{\sqrt{x^2-y^2}}$.



Z teorie víme, že spojitost parciálních derivací je postačující podmínkou pro diferencovatelnost funkcí. Tedy hledaný obor musí splňovat podmínku

$$x^2 - y^2 > 0 \longrightarrow |y| < |x|.$$

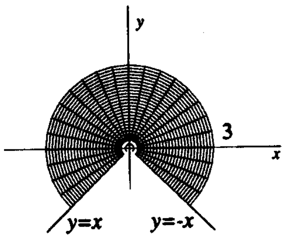
$\mathcal{D}_1 = \{[x,y] \in E_2 : x < 0, y \in (x,-x)\}$,

$\mathcal{D}_2 = \{[x,y] \in E_2 : x > 0, y \in (-x,x)\}$.

■

***Příklad* 118.** Je dána funkce $f(x,y) = \ln(|x|+y) + \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$. Určete

a) definiční obor (včetně grafického znázornění), b) hodnotu $f(A)$, kde $A = [-1,2]$, c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)$.



a) $$|x| + y > 0 \longrightarrow y > -|x|$$
$$9 - x^2 - y^2 > 0 \longrightarrow x^2 + y^2 < 9$$

b) $$f(-1,2) = \ln(|-1| + 2) + \frac{1}{\sqrt{9-1-4}} = \ln 3 + \frac{1}{2}$$

c) $$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \left(\frac{(-x)'}{|x|+y} + \frac{2x}{2\sqrt{(9-x^2-y^2)^3}}\right)\Big|_A = -\frac{11}{24}.$$

■

119. Dokažte, že funkce $z = f(x,y) = y^2 \sin(x^2 - y^2)$ vyhovuje diferenciální rovnici $y^2 z'_x + xyz'_y = 2xz$ pro všechna $[x,y] \in E_2$.

[*Návod* : Stačí spočítat z'_x, z'_y a do rovnice dosadit]

• Vypočtěte parciální derivace dané funkce v bodě A :

120. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, $A = [2,0]$ — $[z'_x(A) = 1,\ z'_y(A) = 0]$

121. $z = \dfrac{y}{x}$, $A = [3,2]$ — $[z'_x(A) = -2/9,\ z'_y(A) = 1/3]$

122. $f = x^2 e^y \sin z$, $A = [1,0,\pi/6]$ — $[f'_x(A) = 1,\ f'_y(A) = 1/2,\ f'_z(A) = \sqrt{3}/2]$

123. $f = \ln(x^2 - y + 3z)$, $A = [2,1,1]$ — $[f'_x(A) = 2/3,\ f'_y(A) = -1/6,\ f'_z(A) = 1/2]$

II.5. Totální diferenciál a tečná rovina

***Příklad* 124**. Je dána funkce $f(x,y) = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$. Napište totální diferenciál df a určete obor diferencovatelnosti funkce f.

Řešení : Totální diferenciál $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,dy$ tj. $df = \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{y^2}\right)dy$ je funkce, pro kterou musí být splněny podmínky $x \neq 0, y \neq 0$. Dostaneme tyto množiny :

$$\mathcal{D}_1 = \{[x,y] \in E_2 : x < 0, y < 0\},\quad \mathcal{D}_2 = \{[x,y] \in E_2 : x < 0, y > 0\},$$
$$\mathcal{D}_3 = \{[x,y] \in E_2 : x > 0, y < 0\},\quad \mathcal{D}_4 = \{[x,y] \in E_2 : x > 0, y > 0\}.$$

■

***Příklad* 125**. Určete totální diferenciál a přírůstek funkce $z = \dfrac{y}{x}$ v bodě $A = [2,1]$ pro $\Delta x = 0.1$ a $\Delta y = 0.2$. Porovnejte je.

Řešení : Totální diferenciál v bodě A je $dz(A) = \dfrac{\partial z}{\partial x}(A)\,dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}(A)\,dy.$

Přitom $dz = -\dfrac{y}{x^2}\,dx + \dfrac{1}{x}\,dy, dz(A) = -\dfrac{1}{4}\,dx + \dfrac{1}{2}\,dy$. Zvolíme-li $dx = \Delta x = 0.1$ a $dy = \Delta y = 0.2$, pak obdržíme hledaný diferenciál $dz = -\dfrac{1}{4}\cdot 0.1 + \dfrac{1}{2}\cdot 0.2 = 0.075$, přičemž přírůstek $\Delta z = z(x_0 + \Delta y, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0) = z(2.1, 1.2) - z(2,1) = 0.071$. Čím větší jsou přírůstky Δx a Δy, tím více se liší dz a Δz. ■

***Příklad* 126.** Pomocí totálního diferenciálu vypočítejte přibližný přírůstek funkce $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ při změně x od $x_1 = 1$ do $x_2 = 1.2$ a y od $y_1 = -3$ do $y_2 = -3.1$.

Řešení : Přírůstek přibližně nahradíme diferenciálem tj.

$\Delta z \doteq dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}(A) \cdot dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}(A) \cdot dy$, kde $A[1, -3]$, $dx = 0.2$, $dy = -0.1$.

Spočítáme

$$\frac{\partial z}{\partial x}(A) = \left(\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)\right)\Big|_A = \frac{3}{10}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(A) = \left(\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x}\right)\Big|_A = \frac{1}{10}.$$

Potom $dz = \dfrac{3}{10} \cdot 0.2 + \dfrac{1}{10} \cdot (-0.1) = 0.06 - 0.01 = 0.05$. ■

***Příklad* 127.** Vypočítejte přibližnou hodnotu výrazu $\ln(\sqrt{9.03} - \sqrt{0.99} - 1)$ pomocí totálního diferenciálu.

Řešení : Položme $z(x, y) = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{y} - 1)$, $x_0 = 9$, $y_0 = 1$, pak $dx = 0.03$, $dy = -0.01$.
Použijeme vztah

$$\Delta z = z(x + x_0, y + y_0) - z(x_0, y_0) \doteq \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy,$$

ze kterého dostaneme

$$z(x + x_0, y + y_0) \doteq z(x_0, y_0) + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy.$$

Připravme si :

$z(x_0, y_0) = \ln(\sqrt{9} - \sqrt{1} - 1) = 0$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}(A) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y} - 1} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\Big|_{(9,1)} = \dfrac{1}{6}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}(A) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y} - 1} \cdot \dfrac{-1}{2\sqrt{y}}\right)\Big|_{(9,1)} = -\dfrac{1}{2}$. Nyní dosadíme a vypočteme hledanou hodnotu $\quad \ln(\sqrt{9.03} - \sqrt{0.99} - 1) \doteq \dfrac{1}{6} \cdot 0.03 - \dfrac{1}{2} \cdot (-0.01) = 0.025$. ■

***Příklad* 128.** Vypočítejte přibližnou hodnotu výrazu $0,98^{3,04}$ pomocí totálního diferenciálu.

Řešení : $z(x, y) = x^y$, $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, tj. $A = [1, 3]$, $dx = -0.02$, $dy = 0.04$, takže

$$z(0.98, 3.04) \doteq z(A) + \frac{\partial z}{\partial x}(A) \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}(A) \cdot dy =$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x\right] = 1 + 3 \cdot (-0.02) + 0 = 0.94. \quad ■$$

***Příklad* 129.** Najděte rovnici tečné roviny τ a normály n plochy $z = 2x^2 - 4y^2$ v bodě $A = [2, 1, ?]$.

Řešení : Tečná rovina τ má rovnici

$$\tau : \quad z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0),$$

kde $A = [x_0, y_0, z_0]$, a $z_0 = z(x_0, y_0)$. V daném případě $z_0 = 2 \cdot 4 - 4 \cdot 1 = 4$ $\longrightarrow$

$$A = [2,1,4], \quad \frac{\partial z}{\partial x}(A) = (4x)\Big|_A = 8, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(A) = (-8y)\Big|_A = -8 \quad \longrightarrow$$

$$\tau: \quad z - 4 = 8(x-2) - 8(y-1) \longrightarrow 8x - 8y - z - 4 = 0.$$

Normála n je přímka procházející bodem A, jejímž směrovým vektorem je normálový vektor roviny τ. Tedy $n : [x,y,z] = [2,1,4] + t(8,-8,-1)$. ■

***Příklad* 130.** Najděte rovnici tečné roviny τ plochy $z = x^2 + xy - y^2 + x + 3$ rovnoběžné s danou rovinou $\varrho : 5x - 3y - z = 0$.

Řešení : Musíme najít bod A, v němž $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 5$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -3$. Z toho dostaneme soustavu rovnic $\begin{cases} 2x + y + 1 = 5, \\ x - 2y = -3. \end{cases}$ Odtud $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = z(x_0,y_0) = 3$, takže $A = [1,2,3]$. Rovnice tečné roviny τ : $5x - 3y - z + d = 0$, $A \in \tau$ $\longrightarrow$ $\tau : 5x - 3y - z + 4 = 0$. ■

• Vypočítejte přibližné hodnoty daných výrazů pomocí totálního diferenciálu :

131. $\sqrt[3]{7.95} \cdot \sqrt{8.96}$ [5.9742] **132.** $\dfrac{\sqrt[4]{0.97}}{1.02^3 \cdot \sqrt[3]{0.99}}$ [0.936]

133. $\sqrt{4.04} \cdot \ln 1.02 \cdot \operatorname{arctg} 0.9$ [0.0314]

• Najděte rovnici tečné roviny τ a normály n plochy $z = f(x,y)$ v bodě A :

134. $z = 4\sqrt{x^2+y^2}$, $A = [3,4,?]$ $[12x + 16y - 5z = 0;\ [x,y,z] = [3,4,20] + t(12,16,-5)]$

135. $z = xy$, $A = [0,0,?]$ $[z = 0;\ [x,y,z] = t(0,0,1)]$

136. $z = x^2 \cdot \cos\dfrac{1}{y}$, $A = [1, \dfrac{2}{\pi}, ?]$ $\left[z = \frac{\pi^2}{4}\left(y - \frac{2}{\pi}\right);\ [x,y,z] = \left[1, \frac{2}{\pi}, 0\right] + t\left(0, \frac{\pi^2}{4}, -1\right)\right]$

137. $z = \dfrac{1}{x}\arcsin y$, $A = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, ?\right]$ $\left[\pi x - 2\sqrt{2}\,y + z - \pi + 2 = 0;\ [x,y,z] = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}\right] + t(\pi, -2\sqrt{2}, 1)\right]$

• Najděte rovnici tečné roviny τ plochy $z = z(x,y)$ rovnoběžné s rovinou ϱ :

138. $z = 2x^2 - y^2$, $\varrho : 8x - 6y - z - 15 = 0$ $[\tau : 8x - 6y - z + 1 = 0]$

139. $z = \ln(x^2 + 2y^2)$, $\varrho : 2x - z + 5 = 0$ $[\tau : 2x - z - 2 = 0]$

140. $z = x^2 - y^2 + 6xy + 2x$, $\varrho : 4x + 6y - z = 0$ $[\tau : 4x + 6y - z - 1 = 0]$

II.6. Derivace a diferenciály vyšších řádů

***Příklad* 141.** Najděte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y) = xy^3 - y \cdot e^{x+y^2}$.

Řešení : $f'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = y^3 - y \cdot e^{x+y^2}, \quad f'_y = 3xy^2 - e^{x+y^2} - y \cdot e^{x+y^2} \cdot 2y = 3xy^2 - e^{x+y^2}(1+2y^2),$

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial x} = -y \cdot e^{x+y^2},$$

$$f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial y} = 6xy - 2ye^{x+y^2}(1+2y^2) - e^{x+y^2}4y = 6xy - e^{x+y^2}(6y+4y^3),$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial y} = 3y^2 - e^{x+y^2} - ye^{x+y^2} \cdot 2y = 3y^2 - e^{x+y^2}(1+2y^2),$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial x} = 3y^2 - e^{x+y^2}(1+2y^2).$$

Vidíme, že pro uvažovanou funkci f platí $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ ve všech bodech $[x,y] \in E_2$. ∎

***Příklad* 142.** Ukažte, že funkce $u = \operatorname{arctg}(2x - t)$ vyhovuje parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial t} = 0 \ \text{ v } \ E_2.$$

Řešení : $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2}{1+(2x-t)^2}, \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{-2 \cdot 2(2x-t) \cdot 2}{[1+(2x-t)^2]^2} = \dfrac{-8(2x-t)}{[1+(2x-t)^2]^2},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{-2 \cdot 2(2x-t) \cdot (-1)}{[1+(2x-t)^2]^2} = \frac{4(2x-t)}{[1+(2x-t)^2]^2}.$$

Po dosazení je zřejmé, že rovnice platí ve všech bodech $[x,t] \in E_2$. ∎

***Příklad* 143.** Dokažte, že $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0,0)$, jestliže

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-2y^2}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

Řešení : Snadno se přesvědčíme, že funkce f je v bodě $[0,0]$ spojitá : $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Derivace $f'_x(0,y)$, $f'_y(x,0)$, $f''_{xy}(0,0)$, $f''_{yx}(0,0)$ vypočítáme pomocí příslušných definic :

$$f'_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hy\frac{h^2-2y^2}{h^2+y^2} - 0}{h} = -2y,$$

$$f'_y(x,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,k) - f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{xk\frac{x^2-2k^2}{x^2+k^2} - 0}{k} = x,$$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f'_x(0,k) - f'_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-2k}{k} = -2,$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_y(h,0) - f'_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1,$$

$$f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0).$$ ∎

- Najděte diferenciály uvedeného řádu :

***Příklad* 144.** $z = \sin(2x + y), \quad d^2 z = ?$

Řešení : Diferenciál n-tého řádu $d^n f = \left(dx \cdot \frac{\partial}{\partial x} + dy \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f$, potom

$$d^2 z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 =$$
$$= -4\sin(2x+y)\,(dx)^2 - 4\sin(2x+y)\,dx\,dy - \sin(2x+y)\,(dy)^2 =$$
$$= -\sin(2x+y)\,(2dx+dy)^2.$$
■

***Příklad* 145.** $z = x^3 - y^3 - xy + y^2, \quad d^3 z = ?$

Řešení :
$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}(dx)^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dx\,(dy)^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(dy)^3$$
$$z'_x = 3x^2 - y, \qquad z'_y = -3y^2 - x + 2y,$$
$$z''_{xx} = 6x, \qquad z''_{yy} = -6y + 2, \qquad z''_{xy} = -1,$$
$$z'''_{xxx} = 6, \qquad z'''_{yyy} = -6, \qquad z'''_{xxy} = z'''_{xyy} = 0,$$
$$d^3 z = 6(dx)^3 - 6(dy)^3.$$
■

***Příklad* 146.** $u = e^{2x-3y}, \quad d^2u(A) = ?,\ d^3u(A) = ?,\ d^n u(A) = ?,\ A = [0,0]$

Řešení :
$$d^2u(A) = \left(e^{2x-3y}(2dx - 3dy)^2\right)\Big|_A = (2dx - 3dy)^2,$$
$$d^3u(A) = \left(e^{2x-3y}(2dx - 3dy)^3\right)\Big|_A = (2dx - 3dy)^3,$$
$$d^n u(A) = \left(e^{2x-3y}(2dx - 3dy)^n\right)\Big|_A = (2dx - 3dy)^n.$$
■

Diferenciály lze použít v důležité **Taylorově větě** : *Nechť $f(x,y)$ je funkce $(n+1)$-krát diferencovatelná v každém vnitřním bodě obdélníka M se středem v bodě $A = (x_0, y_0)$. Potom ke každému bodu $(x,y) \in M$ existuje bod $(\xi, \eta) \in M$ takový, že*

$$f(x,y) = f(A) + df(A) + \frac{d^2 f(A)}{2!} + \cdots + \frac{d^n f(A)}{n!} + R_{n+1},$$

kde $df(A) = df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)\cdot(y - y_0),$

$$d^2 f(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)\cdot(x-x_0)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(A)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)\cdot(y-y_0)^2,$$
$$\vdots$$
$$d^n f(A) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n f}{\partial x^k\,\partial y^{n-k}}(A)\cdot(x-x_0)^k\cdot(y-y_0)^{n-k},$$
$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\,d^{n+1} f(\xi,\eta).$$

Příklad* 147. Napište Taylorův rozvoj funkce $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^2 + 4x - 5y$ v okolí bodu $A = [2,-1]$ a výsledek využijte k výpočtu hodnoty funkce f v bodě $(2.1, -1.1)$.

Řešení :
$$f(A) = 16, \quad dx = x - x_0 = x - 2, \quad dy = y - y_0 = y + 1,$$

$$\left.\begin{aligned} f'_x(A) &= (3x^2 - 3y^2 + 4)\Big|_A = 13 \\ f'_y(A) &= (-6xy + 2y - 5)\Big|_A = 5 \end{aligned}\right\} \longrightarrow dz(A) = 13\,dx + 5\,dy = 13(x-2) + 5(y+1),$$

$$\left.\begin{array}{l} f''_{xx}(A) = (6x)\Big|_A = 12 \\ f''_{yy}(A) = (-6x+2)\Big|_A = -10 \\ f''_{xy}(A) = (-6y)\Big|_A = 6 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} d^2z(A) = 12\,(dx)^2 + 12\,dx\,dy - 10\,(dy)^2 = \\ = 12(x-2)^2 + 12(x-2)(y+1) - 10(y+1)^2\ , \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'''_{xxx}(A) = 6 \\ f'''_{yyx}(A) = -6 \\ f'''_{yxx}(A) = f'''_{yyy}(A) = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow d^3z(A) = 6\,(dx)^3 - 18\,dx\,(dy)^2 = 6(x-2)^3 - 18(x-2)(y+1)^2,$$

$$f(x,y) = 16+13(x-2)+5(y+1)+6(x-2)^2+6(x-2)(y+1)-5(y+1)^2+(x-2)^3-3(x-2)(y+1)^2,$$

$R_4 = 0$,

$$f(2.1;-1.1) = 16 + 13\cdot 0.1 + 5\,(-0.1) + 6\cdot 0.1^2 - 6\cdot 0.1^2 - 5\cdot 0.1^2 + 0.1^3 - 3\cdot 0.1^3 = \\ = 17.3 - 0.552 = 16.748.$$

■

Příklad* 148. Napište Taylorův rozvoj čtvrtého stupně funkce $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$ v okolí bodu $[0,0]$.

Řešení : Použijeme Taylorův vzorec pro $\cos z \doteq 1 - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^4}{4!}$, do kterého dosadíme

$$z = x^2+y^2 : \qquad \cos(x^2+y^2) \doteq 1 - \frac{(x^2+y^2)^2}{2!} + \frac{(x^2+y^2)^4}{4!};$$

$$T_4(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(x^4 + 2x^2y^2 + y^4).$$

■

• Najděte parciální derivace druhého řádu dané funkce :

149. $\phi(s,t) = \ln(s^3+t)$ $\left[\phi''_{ss} = \dfrac{3s(2t-s^3)}{(s^3+t)^2},\ \phi''_{tt} = \dfrac{-1}{(s^3+t)^2},\ \phi''_{st} = \phi''_{ts} = \dfrac{-3s^2}{(s^3+t)^2}\right]$

150. $\phi(x,t) = \dfrac{\cos x^2}{t}$ $\left[\phi''_{xx} = \dfrac{-1}{t}(4x^2\cos x^2 + 2\sin x^2),\ \phi''_{tt} = \dfrac{2}{t^3}\cos x^2,\ \phi''_{xt} = \dfrac{2x}{t^2}\sin x^2\right]$

151. $f(x,y) = e^{ax+by}$ $\left[f''_{xx} = a^2e^{ax+by},\ f''_{yy} = b^2e^{ax+by},\ f''_{xy} = ab\,e^{ax+by}\right]$

• Rozložte funkci $f(x,y)$ podle Taylorovy věty v okolí bodu A pro $n=4$:

152.* $f(x,y) = x^3 + 5x^2 - 6xy + 2y^2,\ A = [1,-2]$
$\left[\begin{array}{l} f(x,y) = 26 + 25(x-1) - 14(y+2) + 8(x-1)^2 \\ \quad +2(y+2)^2 - 6(x-1)(y+2) + (x-1)^3 \end{array}\right]$

153.* $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^3 + 1,\ A = [2,-1]$ $\left[\begin{array}{l} f(x,y) = (x-2) + 3(y+1) + (x-2)^2 + \\ +3(y+1)^2 + 3(x-2)(y+1) - (y+1)^3 \end{array}\right]$

II.7. Gradient. Derivace ve směru

• Určete odchylku gradientů daných funkcí v bodě A :

***Příklad* 154.** $f(x,y,z) = x^y + yz,\ \ g(x,y,z) = \sin(xz) + x + y - \dfrac{z}{y} - 1,\ \ A = [1,1,0]$

Řešení : $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (yx^{y-1}, x^y \ln x + z, y) \longrightarrow \operatorname{grad} f(A) = (1,0,1)$

$$\operatorname{grad} g = \left(z\cos(xz) + 1, 1 + \frac{z}{y^2}, x\cos(xz) - \frac{1}{y}\right) \longrightarrow \operatorname{grad} g(A) = (1,1,0)$$

Označme $\varphi = \sphericalangle(\operatorname{grad} f(A), \operatorname{grad} g(A))$. Potom

$$\cos\varphi = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{3}\,.$$ ■

***Příklad* 155.** $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $g(x,y) = y\sqrt{x}$, $A = [1,1]$

Řešení : $\operatorname{grad} f(A) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\quad \operatorname{grad} g(A) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$,

$$\cos\varphi = \frac{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{2}, 1)}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}. \quad \longrightarrow \quad \varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right).$$ ■

***Příklad* 156.** Určete, ve kterých bodech je gradient funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ roven nulovému vektoru.

Řešení : $\operatorname{grad} f = (2x - 2yz, 2y - 2xz, 2z - 2xy) = (0,0,0) \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x - yz &= 0 \\ y - xz &= 0 \\ z - xy &= 0 \end{aligned}$

Je zřejmé, že jeden z bodů bude bod $A_1 = [0,0,0]$. Další spočítáme ze soustavy :

$$\left\{ \begin{array}{c} x = yz \\ y - yz^2 = 0 \longrightarrow z = \pm 1 \\ z - y^2 z = 0 \longrightarrow y = \pm 1 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{ll} A_2 = [1,1,1], & A_3 = [-1,1,-1], \\ A_4 = [-1,-1,1], & A_5 = [1,-1,-1]. \end{array}$$

■

***Příklad* 157.** Určete, ve kterých bodech má gradient funkce $f(x,y,z) = (x^2 + y^2)^{3/2}$ velikost 9.

Řešení :

$$|\operatorname{grad} f| = |(3x\sqrt{x^2+y^2}, 3y\sqrt{x^2+y^2})| = \sqrt{9x^2(x^2+y^2) + 9y^2(x^2+y^2)} = 9,$$

$$9x^2(x^2+y^2) + 9y^2(x^2+y^2) = 81,$$

$$(x^2+y^2)^2 = 9 \longrightarrow x^2 + y^2 = 3.$$

Hledané body leží tedy na kružnici o poloměru $\sqrt{3}$. ■

- Vypočtěte derivaci funkce f ve směru $\vec{s}$ v bodě A :

***Příklad* 158.** $f(x,y) = 2x^4 + xy + y^3$, $\quad \vec{s} = (3,-4)$, $\quad A[1,2]$

Řešení :

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \operatorname{grad} f(A) \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}, \quad \operatorname{grad} f = (8x^3 + y, x + 3y^2),$$

$$\operatorname{grad} f(A) = (10,13), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = (10,13)\cdot\frac{(3,-4)}{\sqrt{9+16}} = \frac{30-52}{5} = -\frac{22}{5}.$$ ■

***Příklad* 159.** $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, $\quad A = [1,-1,2]$; $\vec{s}$ je jednotkový vektor určený svými směrovými úhly $\pi/3, \pi/3, \gamma$, $\quad \gamma \in \langle 0, \pi/2\rangle$.

Řešení : $\vec{s} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, kde $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, |\vec{s}| = 1$. Tedy

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1 \longrightarrow \quad \cos^2\gamma = \frac{1}{2} \longrightarrow \quad \gamma = \frac{\pi}{4} \in \langle 0, \pi/2 \rangle.$$

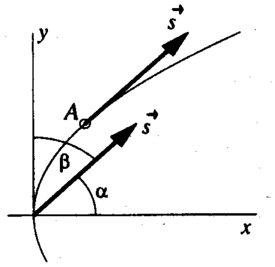
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \operatorname{grad} f(A) \cdot \vec{s} = (3x^2 - 3yz, 3y^2 - 3xz, 3z^2 - 3xy)\Big|_A \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$
$$= (9, -3, 15) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{6 + 15\sqrt{2}}{2}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 160.** $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2$, $A = [-3, 2, 4]$; směr $\vec{s}$ je směr vektoru $\overrightarrow{AB}$, kde $B = [-2, 4, 2]$.

Řešení : $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (1, 2, -2)$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = (2x, 4y, -2z)\Big|_A \cdot \dfrac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = (-6, 8, -8) \cdot \dfrac{(1,2,-2)}{\sqrt{1+4+4}} =$
$$= \frac{1}{3}(-6 + 16 + 16) = \frac{26}{3}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 161.** Určete derivace funkce $z = x^2 + \ln(x + y^2)$ v bodě $A = [3, 2\sqrt{3}]$ ve směru tečny k parabole $y^2 = 4x$. Uvažujte vektor svírající ostrý úhel s vektorem $\vec{i}$.

Řešení : Souřadnice směrového vektoru tečny získáme z její směrnice



$$y = 2\sqrt{x}, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad k_A = y'(A) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\alpha$$
$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3},$$
$$\vec{s} = (\cos\alpha, \cos\beta) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad |\vec{s}| = 1.$$

Nyní si připravíme $\operatorname{grad} z(A) = \left(2x + \dfrac{1}{x+y^2}, \dfrac{2y}{x+y^2}\right)\Big|_A = \left(\dfrac{91}{15}, \dfrac{4\sqrt{3}}{15}\right)$, takže hledaná derivace bude
$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = \operatorname{grad} f(A) \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \left(\frac{91}{15}, \frac{4\sqrt{3}}{15}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{95\sqrt{3}}{30}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 162.** Určete v jakém směru je derivace funkce $f(x,y) = x^3y + \dfrac{x}{y^2} + 2y$ v bodě $A = [-1, 1]$ maximální a vypočítejte tuto derivaci.

Řešení : Z obecné teorie víme, že derivace je maximální ve směru gradientu.
$$\operatorname{grad} f(A) = \left(3x^2y + \frac{1}{y^2}, x^3 - \frac{2x}{y^3} + 2\right)\Big|_A = (4, 3) \longrightarrow \vec{s} = (4, 3).$$
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \operatorname{grad} f(A) \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{16 + 9}{5} = 5 \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 163.** Je dána funkce $z = \sqrt{2x + y}$, bod $A = [1, 2, ?]$, vektor $\vec{s} = (-1, 1)$. Určete
a) ve kterých bodech je funkce z diferencovatelná, b) $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A)$,
c) tečnou rovinu ke grafu funkce z v bodě A.

Řešení : a) $z'_x = \dfrac{1}{\sqrt{2x+y}}$, $\quad z'_y = \dfrac{1}{2\sqrt{2x+y}} \quad \longrightarrow \quad 2x + y > 0 \longrightarrow y > -2x$,

b) $A = [1, 2, 2]$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right) \cdot \dfrac{(-1,1)}{\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{4\sqrt{2}}$,

c) $\tau : z - 2 = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(y-2).$ ■

***Příklad* 164.** Určete vektor $\vec{s}$, v jehož směru je rychlost změny funkčních hodnot funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ v bodě $A = [1,-1,2]$ maximální a tuto maximální rychlost vypočítejte.

Řešení : Funkce maximálně roste, resp. klesá, ve směru $\vec{s}$, resp. $(-\vec{s})$, kde

$$\vec{s} = \operatorname{grad} f(A) = (6,-6,6) \quad \longrightarrow \quad \vec{s}^{\,o} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = (6,-6,6)\cdot\frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial(-\vec{s})}(A) = -6\sqrt{3}.$$ ■

***Příklad* 165.** Určete, ve kterých bodech je gradient funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ kolmý k ose x.

Řešení : $\vec{i} = (1,0,0)$ je směrovým vektorem osy x, $\operatorname{grad} f = (2x-2yz, 2y-2xz, 2z-2xy)$, $\vec{i} \perp \operatorname{grad} f$ znamená $\vec{i}\cdot \operatorname{grad} f = 0$. Odtud $2x - 2yz = 0$ takže hledané body leží na ploše $x = yz$. ■

***Příklad* 166.** Určete úhel vektorů $\operatorname{grad} f(A)$ a $\operatorname{grad} g(B)$, kde $f(x,y) = x - 3y + \sqrt{3xy}$, $A = [3,4]$, $g(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2} + xyz$, $B = [3,4,0]$.

Řešení :

$$\operatorname{grad} f(A) = \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3y}{x}}, -3 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3x}{y}}\right)(A) = (2, -\frac{9}{4}) \in V(E_2)$$

$$\operatorname{grad} g(B) = \left(\frac{zx}{\sqrt{x^2+y^2}} + yz, \frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2}} + xz, \sqrt{x^2+y^2} + xy\right)(B) =$$
$$= (0,0,17) \in V(E_3).$$

Vektor $\left(2, -\frac{9}{4}\right) \in V(E_2)$ doplníme na $\left(2, -\frac{9}{4}, 0\right) \in V(E_3)$. Nyní

$$\cos\varphi = \frac{(2,-\frac{9}{4},0)\cdot(0,0,17)}{|(2,-\frac{9}{4},0)|\cdot|(0,0,17)|} = 0 \longrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$ ■

167. Ve kterých bodech je gradientem funkce $f(x,y) = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ vektor $\left(1, -\frac{16}{9}\right)$?

[v bodech $\left[-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right]$ a $\left[\frac{7}{3}, -\frac{3}{4}\right]$]

168. Ve kterém bodě je gradient funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + xy + 3y + 8z$
a) kolmý k ose z; b) rovnoběžný s osou z; c) roven nulovému vektoru?

[a) v bodech roviny $z = 2$ tj. $[x,y,2]$
b) v bodech přímky $x = -\frac{1}{2}$, $y = 1$, $z = t$
c) $\left[-\frac{1}{2}, 1, 2\right]$]

169. Nalezněte úhel φ gradientů funkce $f(x,y) = \arcsin\frac{x-1}{y}$, $y \neq 0$, v bodech $A = [1,1], B = [3,4]$.

[$\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$]

• Je dána funkce $f(x,y)$, bod A a vektor $\vec{s}$. Určete, ve kterých bodech je funkce f diferencovatelná, spočítejte $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A)$ a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě A :

170. $f(x,y) = |x| + y,\ A = [1,0,?],\ \vec{s} = (-1,1)$ $\left[x \neq 0,\ \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = 0,\ x + y - z = 0\right]$

171. $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2,\ A = [1,0,?],\ \vec{s} = (1,2)$ $\left[E_2,\ \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \frac{8}{\sqrt{5}},\ 2x + 3y - z - 1 = 0\right]$

172. Určete v jakém směru je derivace funkce $f(x,y) = \ln \dfrac{x+y}{x-y}$, v bodě $A = [3,0]$ maximální a vypočítejte tuto derivaci. $\left[\vec{s} = \operatorname{grad} f(A) = \left(0, \frac{6}{9}\right),\ \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \frac{2}{3}\right]$

173. Určete derivace funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$ v bodě $A = [2,3]$ ve směru $\vec{s}$, svírající s vektorem $\vec{i}$ úhel $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$. ($\alpha = \frac{\pi}{3}$ je směrový úhel) $\left[\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = 2 - 3\sqrt{3}\right]$

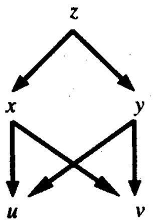
174. Určete derivace funkce $f(x,y,z) = x^2 - 3xy + y^2 z - 5z$ v bodě $A = [1,-2,-1]$ ve směru $\vec{s}$, jehož směrové úhly jsou $\alpha = \dfrac{\pi}{3}, \beta = \dfrac{3\pi}{4}, \gamma \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. $\left[\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \frac{7+\sqrt{2}}{2}\right]$

II.8. Derivace složené funkce

• Vypočítejte derivace daných složených funkcí :

***Příklad* 175.** $z = e^x \ln y,\quad x = u\cos v,\ y = u \sin v,\quad \dfrac{\partial z}{\partial u} = ?,\quad \dfrac{\partial z}{\partial v} = ?$

Řešení : Závislost mezi proměnnými znázorníme orientovaným grafem, ze kterého sestavíme vzorce pro jednotlivé derivace.



$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

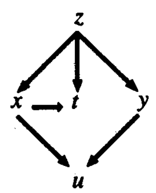
Nyní tyto derivace vypočítáme :

$$\frac{\partial z}{\partial u} = e^x \ln y \cdot \cos v + \frac{e^x}{y} \sin v, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = -e^x \ln y \cdot u \sin v + \frac{e^x}{y} u \cos v. \qquad \blacksquare$$

POZNÁMKA : V tomto jednoduchém příkladě bychom mohli dosadit za x a y. Pak derivace funkce $z = e^{u \cos v} \ln(u \sin v)$ by se dala spočítat přímo, avšak naším úkolem je procvičení derivací složených funkcí.

***Příklad* 176.** $z = \ln(x^2 + y^2 + \frac{1}{t^2}),\quad x = u^2 + t,\ y = u^2 - u,\quad \dfrac{\partial z}{\partial u} = ?,\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = ?$

Řešení :



$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \overline{\frac{\partial z}{\partial t}}.$$

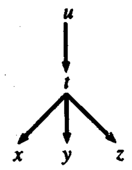
(Derivace s pruhem $\overline{\dfrac{\partial z}{\partial t}}$ je pomocné označení a odpovídá přímé šipce od z k t, kdežto $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ je celková derivace z podle t.)

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + \frac{1}{t^2}} \cdot 2u + \frac{2y}{x^2 + y^2 + \frac{1}{t^2}}(2u - 1) = \frac{2}{x^2 + y^2 + \frac{1}{t^2}}(2xu + 2yu - y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{2x}{x^2+y^2+\frac{1}{t^2}}\cdot 1+\frac{1}{x^2+y^2+\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{2}{t^3}\right)=\frac{2}{x^2+y^2+\frac{1}{t^2}}\left(x-\frac{1}{t^3}\right). \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 177.** $u=f(x^4+y^4-2z^4)$. Spočítejte výraz $V=\dfrac{1}{4x^3}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{4y^3}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{1}{4z^3}\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

Řešení : Označme $t=x^4+y^4-2z^4$. Pak $u=f(t)$ a

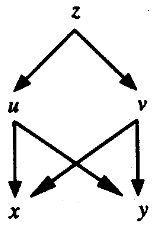


$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=f'(t)\cdot 4x^3,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{du}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=f'(t)\cdot 4y^3,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{du}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}=f'(t)\cdot(-8z^3).$$

Po dosazení snadno spočítáme, že $V=0$. $\blacksquare$

***Příklad* 178.** $z=uv^2$, $\quad u=x\ln y$, $v=y\ln x$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=?$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=?$

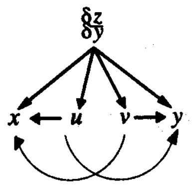
Řešení :



Nejdříve spočítáme $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ a potom $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=v^2\cdot\frac{x}{y}+2uv\cdot\ln x.$$

Nyní znázorníme závislost derivace $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ na u,v,x,y :



$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial x}=\frac{\overline{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=$$
$$\frac{v^2}{y}+\frac{2uv}{x}+2v\ln x\cdot\ln y+\left(\frac{2vx}{y}+2u\ln x\right)\cdot\frac{y}{x},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial y}=\frac{\overline{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=$$
$$=-\frac{v^2x}{y^2}+2v\ln x\cdot\frac{x}{y}+\left(\frac{2vx}{y}+2u\ln x\right)\cdot\ln x. \qquad \blacksquare$$

179. Přesvědčte se, že funkce $y=f(x+at)+g(x-at)$ vyhovuje parciální diferenciální rovnici $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$. Předpokládáme, že f a g jsou dvakrát diferencovatelné funkce. [Návod: $u=x+at$, $v=x-at$, $y=f(u)+g(v)$]

180. Přesvědčte se, že funkce $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ splňuje rovnici $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$. Předpokládáme, že f je diferencovatelná funkce.

181. Jsou dány funkce $z=f(u,v)$, $u=x^2-y^2$, $v=e^{xy}$. Spočítejte diferenciální výraz $W=y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$, kde f je diferencovatelná funkce. $\left[W=(x^2+y^2)e^{xy}\dfrac{\partial f}{\partial v}\right]$

182. Je dána funkce $f(x,y)=x^y$, kde $x=u^2+v^2$, $y=uv+v^2$. Spočítejte $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ v bodě A, jehož souřadnice jsou $u=1$, $v=-1$. $\left[\dfrac{\partial f}{\partial u}(A)=\dfrac{\partial f}{\partial v}(A)=-\ln 2\right]$

II.9. Funkce definované implicitně

***Příklad* 183.** Dokažte, že rovnicí $x^3 + y^3 = 2x^2 + xy - 1 = 0$ je implicitně definována jediná funkce $y = f(x)$ v okolí bodu $A = [1, 0]$. Určete $f'(1)$ a $f''(1)$.

Řešení : Označme $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2x^2 - xy + 1$ funkci, která je spojitá v E_2 a má spojité parciální derivace. K existenci a jednoznačnosti implicitní funkce $y = f(x)$ nyní stačí, že $F(A) = F(1, 0) = 0$ a $F'_y = (3y^2 - x)\Big|_A = -1 \neq 0$. Dále spočítáme

$$f'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2 - 4x - y}{3y^2 - x}, \qquad f'(1) = f'(A) = -\frac{3-4}{-1} = -1,$$

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = -\frac{(6x - 4 - f')(3y^2 - x) - (3x^2 - 4x - y)(6y \cdot f' - 1)}{(3y^2 - x)^2}$$

$$f''(1) = f''(A) = -\frac{(6 - 4 + 1)(-1) - (3 - 4)(-1)}{1} = 4. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 184.** Napište rovnici tečny t a normály n křivky definované implicitně rovnicí $F(x, y) \equiv x^3y + y^3x + x^2y - 3 = 0$ v bodě $A = [1, 1]$.

Řešení : Jelikož $F(1, 1) = 0$ a $F'_y(A) = \left(x^3{+}3y^2x{+}x^2\right)_{[1,1]} = 5 \neq 0$, je rovnicí $F(x, y) = 0$ skutečně definována křivka $y = y(x)$, která prochází bodem A.

$$y'(A) = -\frac{F'_x}{F'_y}(A) = \left(-\frac{3x^2y + y^3 + 2xy}{x^3 + 3y^2x + x^2}\right)\Bigg|_A = -\frac{6}{5}$$

$$t: \quad y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0), \text{ kde } A = [x_0, y_0], \quad y - 1 = -\frac{6}{5}(x - 1) \longrightarrow 6x + 5y - 11 = 0,$$

$$n: \quad y - 1 = \frac{5}{6}(x - 1) \longrightarrow 5x - 6y - 1 = 0. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 185.** Rovnicí $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ je dána **logaritmická spirála.** Stanovte y' a y''.

Řešení : Můžeme použít známý vzorec $y' = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$, $F'_y \neq 0$ nebo můžeme danou rovnici přímo derivovat a přitom si pamatovat, že y je závislé na x tj. $y = y(x)$.
Derivujme přímo :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2x + 2yy'}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} \longrightarrow \frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{y'x - y}{x^2 + y^2} \longrightarrow$$

$$x + yy' = y'x - y \longrightarrow x + y = y'(x - y) \longrightarrow \quad y' = \frac{x + y}{x - y}, \quad x \neq y$$

Druhou derivaci spočítáme podobně :

$$\left(\frac{x + y}{x - y}\right)' = \frac{(1 + y')(x - y) - (x + y)(1 - y')}{(x - y)^2} = \frac{x - y - x - y + y'(x - y + x + y)}{(x - y)^2} =$$

$$y'' = \frac{-2y + 2xy'}{(x - y)^2} = \frac{-2y + 2x \cdot \frac{x+y}{x-y}}{(x - y)^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 186.** Ukažte, že rovnicí $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ je implicitně určena funkce $y = f(x)$, jejíž graf prochází bodem $A = [0, 1]$ a zjistěte, zda je $f(x)$ konvexní v okolí bodu A. Napište rovnici tečny ke grafu funkce v bodě A.

Řešení : $F(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 3$ je diferencovatelná v E_2,

$$F(A) = F(0,1) = 0, \quad F'_y = (2x+2y+2)\Big|_A \neq 0,$$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x+2y-4}{2x+2y+2} = -\frac{x+y-2}{x+y+1} \longrightarrow y'(A) = \frac{1}{2},$$

$$y'' = -\frac{(1+y')(x+y+1)-(x+y-2)(1+y')}{(x+y+1)^2} = -\frac{3(1+y')}{(x+y+1)^2} \longrightarrow$$

$y''(A) = -\dfrac{3(1+\frac{1}{2})}{(0+1+1)^2} = -\dfrac{9}{8} < 0$. Funkce $y = f(x)$ je v bodě A konkávní, jelikož $y''(A) < 0$. Tečna v bodě A má rovnici $y - 1 = \dfrac{1}{2}x \longrightarrow x - 2y + 2 = 0$. ∎

***Příklad* 187.** Dokažte, že vztahem $F(x,y,z) = z^3 + 3x^2z - 2xy = 0$ je definována jediná funkce $z = f(x,y)$ v okolí bodu $A = [-1,-2,1]$. Určete grad $f(A)$.

Řešení : Funkce F má spojité parciální derivace v okolí bodu A,

$F(A) = F(-1,-2,1) = 0$, $\quad F'_z(A) = (3z^2+3x^2)\Big|_A = 6 \neq 0$. Tím je existence a jednoznačnost funkce $z = f(x,y)$ v okolí bodu A prokázána.

Nyní je grad $f(A) = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}(A), \dfrac{\partial z}{\partial y}(A)\right)$, kde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{6xz-2y}{3z^2+3x^2} \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(A) = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-2x}{3z^2+3x^2} \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(A) = -\frac{1}{3},$$

$$\text{grad} f(A) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(1,-1).$$ ∎

***Příklad* 188.** V okolí bodu $[2,-2,1]$ je dána funkce $z = f(x,y)$ v implicitním tvaru $\ln z + x^2yz + 8 = 0$. Určete $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{s}}\Big|_A$, kde $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$, $A = [2,-2]$, $B = [3,-3]$.

Řešení : Označíme $F(x,y,z) = \ln z + x^2yz + 8$. V bodech, kde $F(x,y,z) = 0$ a $F_z(x,y,z) \neq 0$ platí :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2xyz}{\frac{1}{z}+x^2y} \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(A) = -\frac{8}{7}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{x^2z}{\frac{1}{z}+x^2y} \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(A) = \frac{4}{7},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = \text{grad} f(A) \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \left(-\frac{8}{7}, \frac{4}{7}\right) \cdot \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = \frac{-12}{7\sqrt{2}} = \frac{-6\sqrt{2}}{7}.$$ ∎

***Příklad* 189.** Napište rovnici tečné roviny τ a normály n k ploše definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$, v bodě $A = [3,0,4]$.

Řešení : Víme, že normálový vektor k ploše má vyjádření

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} - 1\right) = \left(-\frac{F'_x}{F'_z}, -\frac{F'_y}{F'_z}, -1\right) \longrightarrow \vec{n} = (F'_x, F'_y, F'_z).$$

Je-li plocha vyjádřena v implicitním tvaru, pak poslední zápis je výhodnější. Tedy

$\vec{n} = (2x, 2y, 2z) \sim (x,y,z)\Big|_A = (3,0,4)$,

$$\tau : 3(x-3) + 0 \cdot y + 4(z-4) = 0 \longrightarrow 3x + 4z - 25 = 0,$$
$$n : [x,y,z] = [3,0,4] + t(3,0,4).$$ ∎

***Příklad* 190.** Napište rovnici tečné roviny k ploše $F(x,y,z) \equiv x(y+z)+z^2-5=0$ rovnoběžné s rovinou $\varrho : 3x-3y+6z=2$.

Řešení : $\vec{n} = (3,-3,6) \sim (1,-1,2)$

$$\vec{n} = (F'_x, F'_y, F'_z) = (y+z, x, x+2z) = k(1,-1,2)$$

$\left\{\begin{array}{r} y+z=k \\ x=-k \\ x+2z=2k \end{array}\right\}$ a z této soustavy musíme určit souřadnice dotykového bodu A.

Vychází $x=-k$, $y=-\dfrac{k}{2}$, $z=\dfrac{3}{2}k$. Víme, že hledaný bod musí ležet na dané ploše, proto dosadíme do $F(x,y,z)=0$ a určíme konstantu k , a tím i souřadnice hledaného bodu. Dostáváme postupně

$$-k\left(-\frac{k}{2}+\frac{3}{2}k\right)+\left(\frac{3}{2}k\right)^2=5, \quad -k^2+\frac{9}{4}k^2=5, \quad k^2=4, \qquad k=\pm 2,$$

$$A_1=[-2,3,-1], A_2=[2,-3,1];$$

$$\tau_1 : x-y+2z+7=0, \quad \tau_2 : x-y+2z-7=0.$$

■

***Příklad* 191.** Určete rovnici tečny v bodě $A=[-2,1,6]$ ke křivce v E_3, dané rovnicemi $2x^2+3y^2+z^2=47$, $x^2+2y^2=z$.

Řešení : Snadno určíme tečnou rovinu v bodě A k první ploše $\tau_1 : -4x+3y+6z-47=0$ a tečnou rovinu ke druhé ploše $\tau_2 : -4x+4y-z-6=0$. Směrový vektor hledané tečny je $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-27,-28,-4) \sim (27,28,4)$ a rovnice tečny

$$[x,y,z]=[-2,1,6]+t(27,28,4).$$

Uvedeme další možný postup. Při daném vyjádření křivky jako průniku dvou ploch budeme předpokládat, že jediná nezávislá proměnná je x. Potom y a z budou funkcemi proměnné x, tj. $y(x), z(x)$.

Hledaný tečný vektor $\vec{s}$ bude $(1, y'(x), z'(x))$. Proto danou soustavu zderivujeme podle x :

$$\left\{\begin{array}{c} 4x+6yy'+2zz'=0 \\ 2x+4yy'=z' \end{array}\right. \quad \text{neboli} \quad \left\{\begin{array}{c} 2x+3yy'+zz'=0 \\ 2x+4yy'=z' \end{array}\right. .$$

Nás zajímá tečný vektor v daném bodě, proto dosadíme souřadnice bodu A a obdržíme postupně vzájemně ekvivalentní soustavy

$$\left\{\begin{array}{c} -4+3y'+6z'=0 \\ -4+4y'-z'=0 \end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{c} 3y'+6z'=4 \\ 4y'-z'=4 \end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{l} y'=\dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}=\dfrac{-28}{-27}=\dfrac{28}{27}, \\ z'=\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{-27}=\dfrac{-4}{-27}=\dfrac{4}{27} \end{array}\right\}.$$

Hledaný tečný vektor je $\vec{s} = \left(1, \dfrac{28}{27}, \dfrac{4}{27}\right) \sim (27,28,4)$. Parametrické vyjádření tečny je tedy opět $[x,y,z]=[-2,1,6]+t(27,28,4)$. ■

***Příklad* 192.** a) Najděte jednotkový vektor $\vec{n}^o$ vnější normály v bodě $A=[1,-1,1]$ plochy vyjádřené implicitně ve tvaru $F(x,y,z) \equiv x^2+y^2+z^2-3=0$.

b) Spočítejte $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}^o}(A)$, kde $f(x,y,z)=xy^2z^3$.

Řešení : a) $\vec{n} = (F'_x, F'_y, F'_z) = (2x,2y,2z) \sim (x,y,z)$, $\quad \vec{n}^o = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}^o}(A) = \operatorname{grad} f(A) \cdot \vec{n}^o = (1,-2,3) \cdot \dfrac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$ ■

• Napište rovnici tečny t a normály n křivky definované implicitně rovnicí $F(x,y) = 0$ v bodě A :

193. $F(x,y) \equiv \arcsin x + xy^2 = 0,\ A = [0,2]$ $[t : x = 0, n : y = 2]$

194. $F(x,y) \equiv x^2y + xy^2 - axy - a^3 = 0,\ A = [a,a]$ $[t : y = -x + 2a, n : y = x]$

195. Dokažte, že rovnicí $\ln(x+y) + 2x + y = 0$ je definována funkce $y = f(x)$ splňující $f(-1) = 2$. Napište rovnici tečny ke křivce $y = f(x)$ v bodě $A = [-1,2]$.
$[t : y - 2 = -\frac{3}{2}(x+1)]$

• Napište rovnici tečné roviny τ a normály n k ploše $F(x,y,z) = 0$ v bodě A :

196. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21 = 0,\ A = [1,2,2]$
$[\tau : x + 4y + 6z - 21 = 0,\ n : (x,y,z) = (1,2,2) + t(1,4,6)]$

197. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0,\ A = [1,2,-1]$
$[\tau : x + 11y + 5z - 18 = 0,\ n : (x,y,z) = (1,2,-1) + t(1,11,5)]$

198. $xyz^2 - x - y - z = 0,\ A = [1,-1,-1]$
$[\tau : -2x + z + 3 = 0,\ n : (x,y,z) = (1,-1,-1) + t(-2,0,1)]$

• Napište rovnici takové tečné roviny k ploše $F(x,y,z) = 0$, která je rovnoběžná s rovinou ϱ.

199. $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,\ \varrho : x + 2y + z = 0$
$[x + 2y + z \pm \sqrt{6} = 0$, body dotyku $T_{1,2} = [\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}]]$

200. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21 = 0,\ \varrho : x + 4y + 6z = 0$ $[x + 4y + 6z \pm 21 = 0,\ T_{1,2} = [\pm1, \pm2, \pm2]]$

201. Je dána funkce $z = f(x,y)$ v implicitním tvaru $e^z - xyz = e$. Určete $f'_x(A), f'_y(A)$, $f''_{xy}(A)$, kde bod $A = [0,e,1]$ $[f'_x(A) = 1, f'_y(A) = 0,\ f''_{xy}(A) = 1/e]$

202. Jsou dány dvě plochy rovnicemi v implicitním tvaru $x + 2y - \ln z + 4 = 0$ a $x^2 - xy - 8x + \dfrac{1}{2}z^2 + 5 = 0$. Určete vzájemnou polohu tečných rovin obou ploch ve společném bodě $T = [2,-3,1]$. $[x + 2y - z + 5 = 0$ je společná tečná rovina$]$

II.10.* Transformace diferenciálních výrazů

Nechť platí :

1) *G a B jsou oblasti v E_n,*

2) *zobrazení $g = [g_1, \dots, g_n] : B \longrightarrow G$, splňující $[x_1, \dots, x_n] = \Big[g_1(u_1, \dots, u_n), \dots, g_n(u_1, \dots, u_n)\Big]$ pro všechna $[u_1, \dots, u_n] \in B$, je prosté a má spojité parciální derivace v B,*

3) *Jacobián* $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \neq 0$ *v celé oblasti B.*

Potom zobrazení $g = [g_1, \dots, g_n]$ nazýváme **transformací** *souřadnic $[x_1, \dots, x_n] \in G$ do soustavy souřadnic $[u_1, \dots, u_n] \in B$.*

***Příklad* 203**. Je dána tzv. **Eulerova** diferenciální rovnice $x^2y'' + xy' - 4y = x \ln x$. Proveďte její transformaci, jestliže $x = e^t$.

Řešení : V daném případě máme jedinou nezávislou proměnnou x, $x \in G,$, $G = (0, \infty)$, y je funkce x. Transformační funkce $x = e^t : R \longrightarrow G, R = E_1, G \subset E_1$ je prostá a její Jacobián se redukuje na jedinou derivaci $\dfrac{dx}{dt} = e^t \neq 0$ pro všechna $t \in R$.

Spočítejme derivace $y' = \dfrac{dy}{dx}$ a $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ pomocí derivací $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$, $\ddot{y} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dot{y} \cdot e^{-t}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{d(\dot{y} \cdot e^{-t})}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \left(\ddot{y} \cdot e^{-t} - \dot{y} \cdot e^{-t}\right) \cdot e^{-t} = (\ddot{y} - \dot{y}) \cdot e^{-2t}.$$

Po dosazení do dané rovnice

$$e^{2t} \cdot (\ddot{y} - \dot{y}) \cdot e^{-2t} + e^t \cdot \dot{y} \cdot e^{-t} - 4y = e^t \cdot \ln e^t$$

obdržíme transformovanou rovnici $\ddot{y} - 4y = t\ e^t$. ■

***Příklad* 204**. Rovnici $y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, $(y > 0)$ transformujte do nových souřadnic $u = x$, $v = x^2 + y^2$ a získanou rovnici pak vyřešte.

Řešení : Zde víme, že $z(x, y)$, $u(x, y)$, $v(x, y)$ a Jacobián inverzní transformace je $J^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2y \neq 0$ pro $y > 0$, $[x, y] \in R \times (0, \infty) \longrightarrow [u, v] \in R \times (0, \infty)$.

Přistoupíme k výpočtu derivací :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 2y$$

Nyní dosadíme do dané rovnice,takže postupně odvodíme řešení :

$$y\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 2x\right) - x \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 2y = 0, \quad y \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 0 \text{ (protože } y > 0),$$

$$z(u) = \text{konst.}, \ z = f(v), \quad z = f(x^2 + y^2).$$ ■

***Příklad* 205**. Transformujte diferenciální výraz $\mathcal{W} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2$ do polárních souřadnic.

Řešení : Transformační rovnice

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right\},$$

zobrazují vždy bod $[r, \varphi]$ do bodu $[x, y]$, takže se oblast $(0, \infty) \times \langle 0, 2\pi)$ zobrazí do množiny $E_2 - [0, 0]$. přičemž $J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r \neq 0$.

Podle pravidla o derivování složených funkcí je

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases}.$$

Zderivujeme soustavu (1) nejdříve podle x, potom podle y a pamatujeme, že r a φ závisí na x, y.

Derivace podle x :

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial r}{\partial x}\cos\varphi - r\sin\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 = \dfrac{\partial r}{\partial x}\sin\varphi + r\cos\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -r\sin\varphi \\ 0 & r\cos\varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}} = \dfrac{r\cos\varphi}{r} = \cos\varphi, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{\begin{vmatrix} \cos\varphi & 1 \\ \sin\varphi & 0 \end{vmatrix}}{r} = \dfrac{-\sin\varphi}{r}. \end{array}$$

Derivace podle y :

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial r}{\partial y}\cos\varphi - r\sin\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 1 = \dfrac{\partial r}{\partial y}\sin\varphi + r\cos\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -r\sin\varphi \\ 1 & r\cos\varphi \end{vmatrix}}{r} = \dfrac{r\sin\varphi}{r} = \sin\varphi, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{\begin{vmatrix} \cos\varphi & 0 \\ \sin\varphi & 1 \end{vmatrix}}{r} = \dfrac{\cos\varphi}{r}. \end{array}$$

Dosadíme získané derivace do (2) a současně do daného diferenciálního výrazu :

$$\mathcal{W} = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\cos\varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\sin\varphi + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\cdot\cos^2\varphi - 2\cdot\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2\cdot\frac{\sin^2\varphi}{r^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\cdot\sin^2\varphi +$$
$$+2\cdot\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2\cdot\frac{\cos^2\varphi}{r^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2\cdot\frac{1}{r^2}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 206.** Použijte předcházející příklad a transformujte diferenciální výraz

$$\mathcal{V} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Řešení :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\cos\varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r}\right)\cdot\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\cos\varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r}\right)\cdot\left(\frac{-\sin\varphi}{r}\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\cdot\cos\varphi - \frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r^2}\right)\cdot\cos\varphi +$$
$$+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi\,\partial r}\cdot\cos\varphi - \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\sin\varphi - \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{\sin\varphi}{r} - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}\right)\cdot\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\cdot\cos^2\varphi - 2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{r^2} + \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{r} + 2\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}.$$

Podobným způsobem obdržíme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\cdot\sin^2\varphi + 2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{r^2} + \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{r} -$$
$$-2\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}.$$

Po dosazení do původního výrazu (použijeme $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$) dostaneme

$$\mathcal{V} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{1}{r^2} + \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}.$$ ∎

207. Transformujte do polárních souřadnic diferenciální výrazy : $\mathcal{V} = x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$;

$\mathcal{W} = x^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xy\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. (Použijte předcházející dva příklady a dopočítejte derivaci $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.) $\left[\mathcal{V} = r\frac{\partial z}{\partial r};\ \mathcal{W} = r^2\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\right]$

208. Transformujte diferenciální výrazy $\mathcal{W}_1 = x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$; $\mathcal{W}_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ do nových souřadnic u, v takových, že $x = u$, $y = uv$, kde $[u,v] \in (0,\infty)\times R$. $\left[\mathcal{W}_1 = u\frac{\partial z}{\partial u},\ \mathcal{W}_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{v^2}{u^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right]$

209. Transformujte diferenciální výraz $\mathcal{W} = 4xy\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - 2y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$ do nových souřadnic u, v, jestliže $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$, kde $[u,v] \in (0,\infty)\times(0,\infty)$. $\left[\mathcal{W} = u^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - v^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right]$

210. Transformujte diferenciální rovnici : $(1-x^2)y'' - xy' + a^2y = 0$, jestliže $x = \cos t$. ($x(t)$ musí být funkce prostá, proto $t \in \langle 0,\pi\rangle$.) $\left[\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0\right]$

211. Vyjádřete vzorec pro křivost křivky $y = f(x)$, $k = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}$ v polárních souřadnicích. $\left[k = \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{\left(r^2+(r')^2\right)^{3/2}},\ \text{kde } r' = \frac{dr}{d\varphi},\ r'' = \frac{d^2r}{d\varphi^2}\right]$

212. Transformujte parciální diferenciální rovnici $(x+y)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ do nových souřadnic u, v takových,že $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. $\left[\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0\right]$

II.11. Extrémy funkcí

***Příklad* 213**. Definujte ostré lokální maximum a minimum. Má funkce $z = \sqrt{x^2+y^2}$ v bodě $A = [0,0]$ lokální extrém?

Řešení : Nechť je funkce $f(X)$ definovaná v množině $\mathcal{D} \subset E_2$ a bod A je vnitřní bod množiny $\mathcal{D}$. Jestliže existuje okolí $\bigcup(A,r) \subset \mathcal{D}$ takové, že pro všechna $X \in \bigcup(A,r) - A$ platí $f(X) \le f(A)$, resp. $f(X) \ge f(A)$, pak říkáme, že funkce f má v bodě A lokální maximum, resp. lokální minimum.
Platí-li ostré nerovnosti, pak mluvíme o ostrém lokálním maximu, resp. minimu.
V daném příkladě platí $z(A) < z(X)$ pro každý bod X z okolí bodu A, a tedy v bodě A nastává ostré lokální minimum.

POZNÁMKA : Derivace $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ v bodě A neexistují, a proto nelze použít $\operatorname{grad} z(A) = \vec{0}$. ∎

• Najděte **lokální** extrémy funkce :

***Příklad* 214.** $z(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

Řešení : Máme zde funkci dvou proměnných v explicitním tvaru. Funkce z je diferencovatelná, proto nutné podmínky existence lokálních extrémů jsou : $z'_x = 0,\ z'_y = 0$.

$$\begin{cases} z'_x = 6x^2 + y^2 + 10x & \longrightarrow \quad 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ z'_y = 2xy + 2y & \longrightarrow \quad y(x+1) = 0 \longrightarrow \quad \text{buď } y = 0 \text{ nebo } x = -1 \end{cases}$$

$$y = 0: \quad 6x^2 + 10x = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \longrightarrow & A_1 = [0,0] \\ x_2 = -\dfrac{5}{3} \longrightarrow & A_2 = \left[-\dfrac{5}{3}, 0\right] \end{cases}$$

$$x = -1: \quad y^2 + 6 - 10 = 0 \longrightarrow y^2 = 4 \longrightarrow \begin{cases} y = 2 \longrightarrow & A_3 = [-1,2] \\ y = -2 \longrightarrow & A_4 = [-1,-2] \end{cases}$$

Nyní si připravíme derivace druhého řádu :

	A_1	A_2	A_3	A_4
$z''_{xx} = 12x + 10$	10	-10	-2	-2
$z''_{yy} = 2x + 2$	2	$-\frac{4}{3}$	0	0
$z''_{xy} = 2y$	0	0	4	-4

$$\text{Pro } \Delta(A_i) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} \begin{cases} > 0 & \text{existuje lokální extrém.} \\ < 0 & \text{neexistuje lokální extrém.} \end{cases}$$

$$\text{Pro } \Delta(A_1) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0, z''_{xx} > 0 \quad \text{obdržíme lokální minimum } z(A_1) = 0.$$

$$\text{Pro } \Delta(A_2) = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\dfrac{4}{3} \end{vmatrix} > 0, z''_{xx} < 0 \quad \text{dostaneme lokální maximum } z(A_2) = \frac{125}{27}.$$

$$\text{Pro} \begin{cases} \Delta(A_3) = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} < 0 \\ \Delta(A_4) = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} < 0 \end{cases} \rightarrow \text{v bodech } A_3 \text{ a } A_4 \text{ lokální extrémy neexistují.}$$

■

***Příklad* 215.** Funkce $y = f(x)$ je vyjádřena v implicitním tvaru $x^2 + 2xy - y^2 + 8 = 0$.

Řešení : Zderivujeme přímo danou rovnici podle x a spočítáme

$$y': \quad 2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 0 \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{x+y}{y-x} \text{ pro } x \neq y.$$

Položíme $y' = 0$, tedy $x + y = 0 \quad \longrightarrow \quad y = -x$ a dosadíme do zadání, abychom určili souřadnice případných lokálních extrémů

$$x^2 - 2x^2 - x^2 + 8 = 0 \longrightarrow \quad 2x^2 = 8 \longrightarrow \quad x_{1,2} = \pm 2, \quad y_{1,2} = \mp 2.$$

Dostali jsme dva body $A[2,-2]$ a $B = [-2,2]$. Nyní spočítáme

$$y'' = \frac{(1+y')(y-x) - (x+y)(y'-1)}{(y-x)^2}, \quad \text{takže}$$

$$y''(A) = \frac{-4}{16} < 0 \longrightarrow \quad f(2) = -2 \quad \text{je lokální maximum a}$$

$$y''(B) = \frac{4}{16} > 0 \longrightarrow \quad f(-2) = 2 \quad \text{je lokální minimum.}$$

■

***Příklad* 216.** Funkce $z = f(x,y)$ je dána rovnicí $z^3 - 3xyz = a^3$, $a \neq 0$.

Řešení : $z'_x = -\dfrac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \dfrac{yz}{z^2 - xy}$, $z'_y = \dfrac{xz}{z^2 - xy}$. Položíme obě derivace rovny 0.

Za předpokladu $z^2 - xy \neq 0$ vychází $\left\{ \begin{array}{c} yz = 0 \\ xz = 0 \end{array} \right\}$, což je splněno buď když $z = 0$ nebo $x = y = 0$, avšak $z = 0$ nevyhovuje rovnici $z^3 - 3xyz = a^3$.

Zbývá případ $x = y = 0$. Potom po dosazení do výchozího výrazu získáme $z = a$.

Dostali jsme jediný stacionární bod $A = [0,0]$. Nyní je

$$z''_{xx} = \left(\frac{yz'_x(z^2 - xy) - yz(2zz'_x - y)}{(z^2 - xy)^2}\right)\Big|_A = 0,$$

$$z''_{yy} = \left(\frac{xz'_y(z^2 - xy) - xz(2zz'_y - x)}{(z^2 - xy)^2}\right)\Big|_A = 0,$$

$$z''_{xy} = \left(\frac{(z + yz'_y)(z^2 - xy) - yz(2zz'_y - x)}{(z^2 - xy)^2}\right)\Big|_A = \frac{a^3}{a^4} = \frac{1}{a} \quad \text{a}$$

$\triangle(A) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & 0 \end{vmatrix} < 0$, takže v bodě A neexistuje lokální extrém. ■

Příklad* 217. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

Řešení :

$$\triangle_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix}, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}, \quad \triangle_1 = f''_{xx}$$

Podle **Sylvestrovy** věty o kvadratických formách platí :

Je-li $\triangle_2(M) > 0$, $\left\{ \begin{array}{l} \triangle_3(M) > 0, \triangle_1(M) > 0, \textit{pak } f(M) \textit{ je ostré lokální minimum.} \\ \triangle_3(M) < 0, \triangle_1(M) < 0, \textit{ pak } f(M) \textit{ je ostré lokální maximum.} \end{array} \right.$

Je-li $\triangle_2(M) < 0$, *pak v bodě* M *neexistuje lokální extrém.*

Výpočet vypadá následovně :

$$\left. \begin{array}{lll} f'_x = 3x^2 + 12y = 0 & \text{neboli} & x^2 + 4y = 0, \\ f'_y = 2y + 12x = 0 & \text{neboli} & y = -6x, \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} \text{pak} \quad x^2 - 24x = 0 \quad \to \text{a} \\ x_1 = 0,\ x_2 = 24, \end{array}$$

$$f'_z = 2z + 2 = 0, \quad \text{neboli} \quad z = -1$$

$$A = [0,0,-1], \quad B = [24,-144,-1]$$

$f''_{xx} = 6x$, $f''_{yy} = 2, f''_{zz} = 2$, $f''_{xy} = 12$, $f''_{xz} = 0$, $f''_{yz} = 0$.

Protože $\triangle_2(A) = \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} < 0$, v bodě A nenastává lokální extrém.

Protože $\triangle_2(B) = \begin{vmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 144 > 0$, $\triangle_3(B) = \begin{vmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 288 > 0$ a

$\triangle_1(B) = 144 > 0$, je $f(B) = f(24,-144,-1) = -6913$ lokální minimum.

Můžeme se též přesvědčit přímo, že kvadratická forma $d^2f(B)$ je pozitivně definitní :

$d^2f(B) = 144\,(dx)^2 + 24\,dx\,dy + 2\,(dy)^2 + 2\,(dz)^2 = (12\,dx + dy)^2 + (dy)^2 + 2\,(dz)^2 > 0$

■

Příklad 218.* $f(x,y,z) = \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z} + x$

Řešení : Za předpokladu $xyz \neq 0$, položíme všechny derivace funkce f rovny 0.

$$(1)\begin{cases} f'_x = -\dfrac{y^2}{4x^2} + 1 = 0 \longrightarrow \left(\dfrac{y}{2x}\right)^2 = 1, \text{takže buď 1) } y = 2x \text{ nebo 2) } y = -2x, \\ f'_y = \dfrac{y}{2x} - \dfrac{z^2}{y^2} = 0, \\ f'_z = \dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2} = 0. \end{cases}$$

Případ :

1) Nechť $y = 2x$. Pak $f'_y = 0 \to 1 - \dfrac{z^2}{4x^2} = 0$, $z^2 = 4x^2$, $z_1 = 2x$, $z_2 = -2x$.

Pro $z_1 = 2x$, $f'_z = 0 \to \dfrac{4x}{2x} - \dfrac{2}{4x^2} = 0$, $2 - \dfrac{1}{2x^2} = 0$, $x^2 = \dfrac{1}{4}$.

Obdrželi jsme stacionární body $A = \left[\dfrac{1}{2}, 1, 1\right]$, $B = \left[-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right]$

Pro $z_2 = -2x$, $f'_z = 0 \to \dfrac{-4x}{2x} - \dfrac{2}{4x^2} = 0$, $-2 - \dfrac{1}{2x^2} = 0$, $x^2 = -\dfrac{1}{4}$,

takže neexistuje řešení.

2) Nechť $y = -2x$. Pak $f'_y = 0 \to -1 - \dfrac{z^2}{y^2} = 0$ a řešení neexistuje .

Tím jsme vyčerpali řešení soustavy (1) v oboru reálných čísel. Přistoupíme k výpočtu druhých parciálních derivací :

$$f''_{xx} = \frac{y^2}{2x^3}, \qquad f''_{xy} = -\frac{y}{2x^2}, \qquad f''_{xz} = 0,$$

$$f''_{yy} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}, \qquad f''_{yz} = -\frac{2z}{y^2}, \qquad f''_{zz} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3},$$

$$\triangle_2(A) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0, \ \triangle_3(A) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 32 > 0, \ \triangle_1(A) = 4 > 0,$$

$$\triangle_2(B) = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 8 > 0, \ \triangle_3(B) = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -32 < 0,$$

$\triangle_1(B) = -4 < 0$. Je tedy

$f(A) = f\left(\dfrac{1}{2}, 1, 1\right) = 4$ lokální minimum a

$f(B) = f\left(-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right) = -4$ lokální maximum. ■

• Najděte **vázané (podmíněné)** extrémy daných funkcí :

Příklad 219. $z = 2(x^2 + y^2)$, jestliže $x + y = 2$.

Řešení : Geometricky se jedná o nalezení extrémů z-ové souřadnice na průsečné křivce **rotačního paraboloidu** $z = 2(x^2 + y^2)$ s **rovinou** $x + y = 2$.

Z podmínky $x + y = 2$ vyjádříme např. $y = 2 - x$ a dosadíme do dané funkce $z = 2(x^2 + y^2)$. Tím dostaneme $z(x) = 2(x^2 + (2-x)^2)$, takže $z(x) = 4(x^2 - 2x + 2)$. Pro funkci $z(x)$ hledáme lokální extrém. Položíme tedy

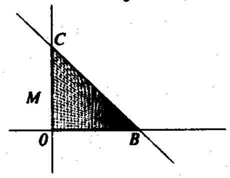
• Určete **globální (absolutní)** extrémy funkce $z = f(x,y)$ na množině M :

***Příklad* 224.** $f(x,y) = x^2+y^2+xy-x-y,\ M = \{[x,y] \in E_2 : x \geq 0, y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$

Řešení : 1) určíme stacionární body na M a jejich funkční hodnoty :

$$\left.\begin{array}{l} f'_x \equiv 2x+y-1=0 \\ f'_y \equiv 2y+x-1=0 \end{array}\right\}\ x = y = \frac{1}{3} \longrightarrow$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \in M, \quad f(A_1) = -\frac{1}{3}\ ;$$



2) určíme stacionární body na jednotlivých stranách $\triangle\ OBC$

$OB : y = 0 \longrightarrow\ h_1(x) = x^2 - x,\ h_1'(x) = 2x-1 = 0 \ \longrightarrow x = \frac{1}{2},$

$$A_2 = \left[\frac{1}{2}, 0\right] \in M,\ f(A_2) = -\frac{1}{4},$$

$OC : x = 0 \longrightarrow\ h_2(y) = y^2 - y,\ h_2'(y) = 2y-1 = 0 \ \longrightarrow y = \frac{1}{2},$

$$A_3 = \left[0, \frac{1}{2}\right] \in M,\ f(A_3) = -\frac{1}{4},$$

$BC : y = 1-x \longrightarrow h_3(x) = x^2 + (1-x)^2 + x(1-x) - x - 1 + x = -x^2 - x,$

$$h_3'(x) = -2x-1 = 0 \quad\longrightarrow\quad x = -\frac{1}{2},\ \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \notin M\ ;$$

3) určíme hodnoty funkce $f(x,y)$ ve vrcholech O, B, C

$f(O) = f(0,0) = 0, \quad f(B) = f(1,0) = 0, \quad f(C) = f(0,1) = 0.$

Ze všech spočítaných funkčních hodnot vybereme nejmenší a největší . Globální maximum nastává v bodech $O, B, C,\ f_{\max}(O) = f_{\max}(B) = f_{\max}(C) = 0$ a podobně globální minimum v bodě $A_1,\ f_{\min}(A_1) = -\frac{1}{3}.$ ∎

***Příklad* 225.** $z = x^2+y^2-6x+6y,\ M = \{[x,y] \in E_2 : x^2+y^2 \leq 4\}$

Řešení :

$$1) \left\{\begin{array}{ll} z'_x = 2x-6 = 0 \longrightarrow x_1 = 3 \\ z'_y = 2y+6 \quad\quad\ \longrightarrow y_1 = -3 \end{array}\right. \quad\longrightarrow\quad A = [3,-3], \quad A \notin M.$$

2) Body na hranici množiny M zapíšeme v parametrickém tvaru $\left\{\begin{array}{l} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{array}\right\}.$

Pak postupně $z = 4 - 12\cos t + 12\sin t, \quad \dfrac{dz}{dt} = 12\sin t + 12\cos t = 0,$

$\sin t = -\cos t, \quad t_1 = \frac{3}{4}\pi, \quad t_2 = \frac{7}{4}\pi,$

$t_1 = \frac{3}{4}\pi \longrightarrow B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \quad z(B) = 4 + 12\sqrt{2}$ je globální maximum a

$t_2 = \frac{7}{4}\pi \longrightarrow C = [\sqrt{2}, -\sqrt{2}], \quad z(C) = 4 - 12\sqrt{2}$ je globální minimum.

∎

• Určete lokální extrémy funkce :

226. $z = \ln(xy) + x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7$

$$\left[\begin{array}{r} \text{lok.max. v bodě } A_1 = \left[1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right], \\ \text{lok.min. v bodě } A_2 = \left[1+\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right], \\ \text{další stac.b. } A_3 = \left[1+\frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right],\ A_4 = \left[1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \end{array}\right]$$

227. $z = x^2 + y - x\sqrt{y} - 6x + 12$ $[z_{\min}(4,4) = 0]$

228. $z = x^2 + y^2 + 6x - 4y$ $[z_{\min}(-3,2) = -13]$

229. $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$ $[z_{\max}(0,0) = 0]$

230. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$ $\left[z_{\min}\left(1, \frac{1}{2}\right) = 4\right.$, v bodě $\left.[0,0] \text{ neex.extrém}\right]$

231. $z = e^{x/2}(x + y^2)$ $\left[z_{\min}(-2,0) = -\frac{2}{e}\right]$

232. $z = x^3 + y^3 + \frac{9}{2}x^2 - 3y - 12x$ $\left[z_{\min}(1,1) = -\frac{17}{2},\ z_{\max}(-4,-1) = 58\right.$ v bodech $\left.[1,-1], [-4,1] \text{ neex.extrém}\right]$

233. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 13 = 0$ $[z_{\min}(2,-3) = 0,\ z_{\max}(2,-3) = 2]$

234. $x^2 + xy - z^2 + z + y + 5 = 0$ [ve stac.bodech $[-1,2,3]$, $[-1,2,-2]$ neex.extrémy]

235. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6z$ [$f(2,-1,-3)) = -14$, lok.min.]

236. $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^3 - 12yz - 6x$ [$f(3,36,12) = -873$, lok.min., v bodě $[3,0,0]$ neex.extrém]

- Určete globální extrémy funkce $z = f(x,y)$ na množině M :

237. $f(x,y) = xy(x-a)(y-b),\ M = \{[x,y] \in E_2 : 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$

[glob.max. $f(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) = \frac{a^2b^2}{16}$
glob.min. $f(0,0) = f(a,0) = f(0,b) = f(a,b) = 0$]

238. $f(x,y) = xy(2 - x - y),\ M = \{[x,y] \in E_2 : x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1\}$

[glob.max. $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$
glob.min. $f(x,0) = f(0,y) = 0$]

239. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy,\ M = \{[x,y] \in E_2 : |x| + |y| \le 1\}$

[glob.min. $f(0,0) = 0$
glob.max. $f(1,0) = f(0,1) =$
$= f(-1,0) = f(0,-1) = 1$]

240. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 1),\ M = \{[x,y] \in E_2 : x \le 0,\ y \ge 0, x - y + 3 \ge 0\}$

[glob.min. $f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{5}{4}$
glob.max. $f(0,3) = 11$]

241. $f(x,y) = x^2 + y,\ M = \{[x,y] \in E_2 : x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 6\}$

[glob.min. $f(0,0) = 0$
glob.max. $f(6,0) = 36$]

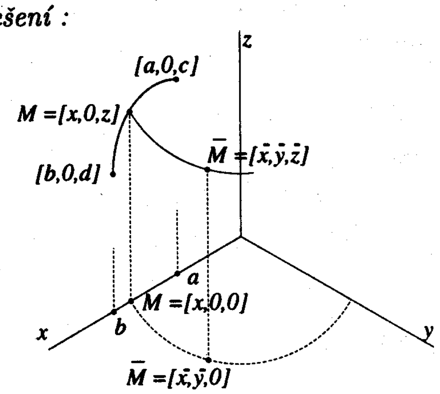
242. $f(x,y) = x^2 - y^2,\ M = \{[x,y] \in E_2 : x^2 + y^2 \le 4\}$

[glob.min. $f(0,\pm 2) = -4$
glob.max. $f(\pm 2, 0) = 4$]

II.12. Rotační plochy

***Příklad* 243.** Oblouk křivky m (tzv. **meridián**) $f(x,z) = 0,\ y = 0$, odpovídající $x \in \langle a,b \rangle$, $(0 \le a < b)$ rotuje kolem osy z. Napište rovnici této rotační plochy.

Řešení :



Zvolíme libovolný bod M ležící na křivce m : $f(x,z)=0,\ y=0$, který při rotaci kolem osy z opíše kružnici o poloměru x v rovině kolmé k ose z. Označme jeho libovolnou otočenou polohu $\overline{M}$ a zapišme vše v souřadnicích :

$$M=[x,0,z]\longrightarrow \overline{M}=[\overline{x},\overline{y},\overline{z}],$$

$$\overline{z}=z,\ \overline{x}^2+\overline{y}^2=x^2\longrightarrow x=\pm\sqrt{\overline{x}^2+\overline{y}^2}.$$

Otočíme-li celý oblouk, pak platí $f(\pm\sqrt{\overline{x}^2+\overline{y}^2},\overline{z})=0$ a po vynechání pruhů obdržíme rovnici hledané rotační plochy

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0\quad (a^2\le x^2+y^2\le b^2).$$

Otočíme-li oblouk $f(x,z)=0,\ y=0,\ 0\le c\le z\le d$ kolem osy x, pak analogickým způsobem odvodíme plochu

$$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0\quad (c^2\le y^2+z^2\le d^2).$$

Rotací stejného oblouku kolem osy y vznikne mezikruží v rovině (xz). Nyní sestavíme formální tabulku křivek a ploch :

křivka	**osa rotace**	**rotační plocha**
$f(x,z)=0$	z	$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$
$y=0$	x	$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$
$f(x,y)=0$	x	$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$
$z=0$	y	$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$
$f(y,z)=0$	y	$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$
$x=0$	z	$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$

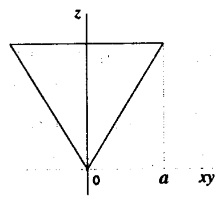
∎

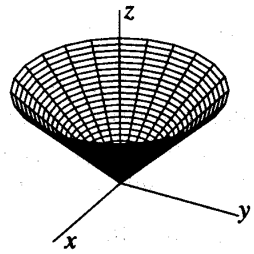
- Napište rovnici rotační plochy, která vznikne rotací křivky m kolem osy o :

***Příklad* 244.** $m:\ z=kx,\ y=0,\quad o:$ osa $z,\quad x\in\langle 0,a\rangle$

Řešení :

Víme, že vznikne **rotační kuželová plocha.**
$z=k(\pm\sqrt{x^2+y^2})\longrightarrow$
$z^2=k^2(x^2+y^2)$, kde
$0\le x^2+y^2\le a^2$

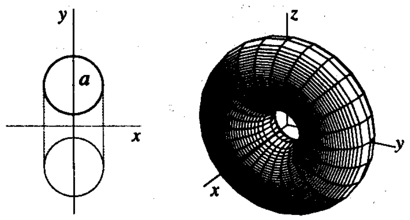




∎

***Příklad* 245.** $m:\ x^2+(y-b)^2=a^2,\ z=0,\quad b>a>0,\quad o:$ osa x

Řešení : Kružnice, rotující kolem přímky ležící ve stejné rovině a neprotínající danou přímku vytvoří tzv. **anuloid**, jehož rovnici odvodíme :



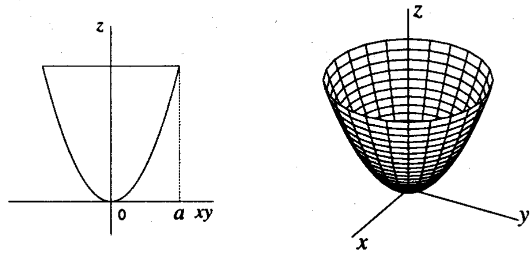
$$x^2 + (\pm\sqrt{y^2+z^2} - b)^2 = a^2,$$
$$(\pm\sqrt{y^2+z^2} - b)^2 = a^2 - x^2,$$
$$y^2 + z^2 + b^2 \mp 2b\sqrt{y^2+z^2} = a^2 - x^2,$$
$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 = 4b^2(y^2 + z^2).$$

■

***Příklad* 246.** $m : z = kx^2,\ y = 0,\quad o :$ osa $z,\quad x \in \langle 0, a\rangle$

Řešení : Plocha je **rotačním paraboloidem**

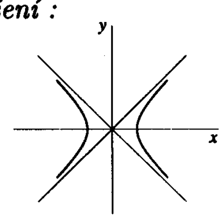
$$z = k(x^2 + y^2),\ 0 \le x^2 + y^2 \le a^2$$



■

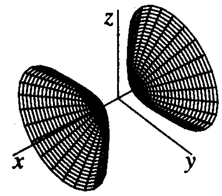
***Příklad* 247.** $m : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ z = 0,\quad o_1 :$ osa $x,\quad o_2 :$ osa y

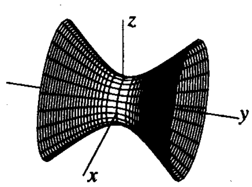
Řešení :



Rotací hyperboly kolem hlavní osy x vznikne **hyperboloid dvoudílný**
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$$

Roztočíme-li tutéž hyperbolu kolem vedlejší osy y, dostaneme **hyperboloid jednodílný**
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$$





■

• Je-li dána rotační plocha rovnicí $F(x, y, z) = 0$, určete osu rotace a meridián plochy.

***Příklad* 248.** $x^2 + y^2 + 3z - 9 = 0$

Řešení : Zvolíme-li rovinu $z =$ konst. (pozor na existenci řezu), pak řez plochy touto rovinou je kružnice se středem na ose z. Z toho usoudíme, že osa rotace je osa z. Meridián dostaneme jako řez plochy rovinou obsahující osu rotace.
Zvolíme rovinu (xz), tedy dosadíme $y = 0$. Obdržíme meridián
$x^2 + 3z - 9 = 0$, *tj.* $z = 3 - \dfrac{x^2}{3}$, což je v rovině $y = 0$ parabola s vrcholem v bodě $V = [0, 0, 3]$. Daná plocha je **rotační paraboloid**, osa z je osou rotace. ■

***Příklad* 249.** $y^2 + z^2 - x^2 + 4x - 4 = 0$

Řešení : $y^2 + z^2 = k^2 \longrightarrow$ osa rotace je osa x. Zvolíme $z = 0$ (řez rovinou (xy)) : $y^2 = (x-2)^2 \longrightarrow y = \pm(x-2)$. Meridián je přímka $y = x - 2$ v rovině $z = 0$. Daná plocha je **rotační kužel** s vrcholem $V = [2,0,0]$, osa x je osou rotace. ■

250. $x^2 + y^2 + z^3 - 8 = 0$ [osa z, $z = \sqrt[3]{8 - x^2}$]

251. $4y^2 + 4z^2 = x^2 + 1$ [osa x, $4y^2 - x^2 = 1$, jednodílný rot.hyperboloid]

252. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ [osa y; $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, rot.elipsoid]

253. $x^2 = y^2 + z^2$ [osa x, $y = x$, rotační kužel]

- Napište rovnici rotační plochy, znáte-li meridián m a osu rotace o :

254. $m:\ 2z = x,\ y = 0,\ x \in \langle 0, 4\rangle,\ o:$ osa x, [$4(y^2 + z^2) = x^2$]

255. $m:\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ z = 0$ **(asterioda)** , $o:$ osa x [$x^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{y^2 + z^2} = a^{\frac{2}{3}}$]

256. $m:\ z = y + 4,\ x = 0,\ o:$ osa z [$(z-4)^2 = x^2 + y^2$]

257. $m:\ x = 1 + 2y^2,\ z = 0,\ o:$ osa x [$x = 1 + 2(y^2 + z^2)$]

III. Dvojný a trojný integrál

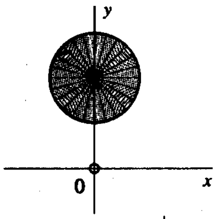
III.1. Existence

***Příklad* 258**. Rozhodněte, zda daný integrál $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ existuje, jestliže :

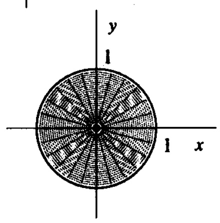
a) $D : x^2 + (y-1)^2 \le \frac{1}{4}$;
b) $D : x^2 + y^2 \le 1$;
c) $D : x^2 + (y-1)^2 \le 2$.

Řešení : Budeme vycházet z toho, že dvojný a trojný integrál je definován pouze pro funkce omezené na D a dále budeme používat větu o existenci:
Nechť D je měřitelná (v Jordanově smyslu) množina v E_2 (resp. E_3) a funkce f je omezená na D. Nechť množina bodů nespojitosti funkce f v D má míru 0. Potom f je integrovatelná v D, tj. integrál

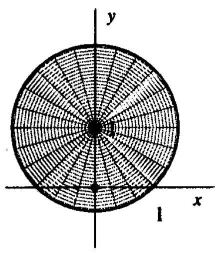
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{(resp. } \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz) \qquad \textit{existuje.}$$

a)


Množina D je měřitelná (je omezená a její hranice má míru 0) a $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ je spojitá a omezená na D. Integrál existuje.

b)


Množina D je měřitelná, ale $f(x,y)$ není omezená v D, protože $[0,0] \in D$ a $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty$. Integrál neexistuje.

c)


$f(x,y)$ opět není omezená na D $\quad([0,0] \in D)$, integrál neexistuje.

■

***Příklad* 259**. Je dána množina $D : x^2 + y^2 \le 4$. Vyšetřete, zda existují integrály :

a) $\displaystyle\iint_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, b) $\displaystyle\iint_D \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, c) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2+1}$,

d) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+xy}\,dx\,dy$, e) $\displaystyle\iint_D \frac{e^{xy}-1}{xy}\,dx\,dy$, f) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy$.

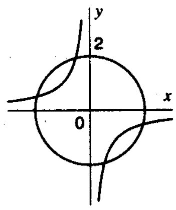
Řešení :

a) existuje, $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1,$

b) neexistuje, $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x}{x^2+y^2} = \infty,$

c) existuje, $\dfrac{1}{x^2+y^2+1}$ je spojitá v celém E_2,

d) neexistuje, protože např. $\lim\limits_{[x,y]\to[-1,1]} \left|\dfrac{1}{1+xy}\right| = \infty,$



e) existuje, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{xk}-1}{xk} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{e^{yk}-1}{yk} = 1,$ kde $k \in \langle -2, 2\rangle$

f) neexistuje, protože např. $\lim\limits_{[x,y]\to[1,-1]} \dfrac{1}{(x+y)^2} = \infty.$ ∎

***Příklad* 260.** Vyšetřete, zda existují integrály :

a) $\displaystyle\iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+z)^3}, \quad W: 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 0,\ -2 \le z \le 2,$

b) $\displaystyle\iiint_W (x+yz)\,dx\,dy\,dz, \quad W: x^2 \le y \le 2,\ z \ge 3,$

c) $\displaystyle\iiint_W \frac{1}{x^2+y^2+z^2-9}\,dx\,dy\,dz, \quad W: 1 < x^2+y^2+z^2 < 4.$

Řešení :

a) neexistuje, protože funkce $\dfrac{1}{(1+x+z)^3}$ není omezená v W, $\{1+x+z=0\} \cap W \ne \emptyset$,

b) neexistuje, protože W není měřitelná v E_3,

c) existuje, $x^2+y^2+z^2-9 \ne 0$ v W. ∎

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

III.2. Fubiniova věta pro dvojný integrál

• Vypočítejte dvojné integrály na daných obdélníkových množinách :

***Příklad* 261.** $I = \displaystyle\iint_D y^2 \sin^2 x\,dx\,dy, \quad D: 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 1 \le y \le 2$

Řešení : $\displaystyle I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx \cdot \int_1^2 y^2\,dy = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_1^2 =$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7\pi}{12}.$ ∎

***Příklad* 262.** $I = \displaystyle\iint_D \frac{xye^{x^2}}{y^2+3}\,dx\,dy, \quad D: 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3$

Řešení :

$\displaystyle I = \int_0^2 xe^{x^2}\,dx \cdot \int_0^3 \frac{y}{y^2+3}\,dy = \left[\begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_0^4 e^t\,dt \cdot \frac{1}{2}\left[\ln|y^2+3|\right]_0^3 =$

$$= \frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^4 \cdot \frac{1}{2}\Big(\ln 12 - \ln 3\Big) = \frac{1}{2}(e^4-1)\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{12}{3} = \frac{1}{4}(e^4-1)\ln 4 = \frac{1}{2}(e^4-1)\ln 2.$$ ■

***Příklad* 263.** $I = \iint_D \frac{dx\,dy}{x^2-2xy+y^2}, \quad D: 3 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 2$

Řešení :

$$I = \int_0^2 \Big(\int_3^4 \frac{dx}{(x-y)^2}\Big)\,dy = \int_0^2 \Big[\frac{-1}{x-y}\Big]_3^4 dy = \int_0^2 \Big(\frac{-1}{4-y} + \frac{1}{3-y}\Big)\,dy =$$
$$= \int_0^2 \Big(\frac{1}{y-4} - \frac{1}{y-3}\Big)\,dy = \Big[\ln|y-4| - \ln|y-3|\Big]_0^2 = \ln 2 - \ln 1 - \ln 4 + \ln 3 =$$
$$= \ln\frac{2\cdot 3}{4} = \ln\frac{3}{2}.$$ ■

***Příklad* 264.** $I = \iint_D \frac{dx\,dy}{(x-2y+3)^2}, \quad D: 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1$

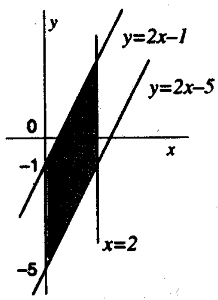
Řešení :

$$I = \int_0^1 \Big[\frac{-1}{x-2y+3}\Big]_0^2 dy = \int_0^1 \Big(\frac{-1}{5-2y} + \frac{1}{3-2y}\Big)\,dy = \int_0^1 \Big(\frac{1}{2y-5} - \frac{1}{2y-3}\Big)\,dy =$$
$$= \Big[\frac{1}{2}\ln|2y-5| - \frac{1}{2}\ln|2y-3|\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}.$$ ■

• Množina D je omezená zadanými křivkami. Načrtněte ji a popište pomocí nerovnic.

***Příklad* 265.** $2x - y = 1,\ 2x - y = 5,\ x = 0,\ x = 2$

Řešení :



↑

$$D: \begin{cases} 2x - 5 \le y \le 2x - 1 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

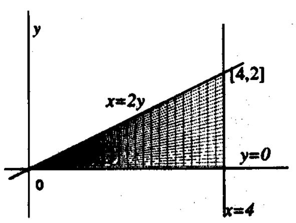
↑ Šipka označuje možný směr vnitřní integrace při výpočtu dvojného integrálu na D pomocí Fubiniovy věty.

■

***Příklad* 266.** $y = 0,\ x = 2y,\ x = 4$

Řešení :

→



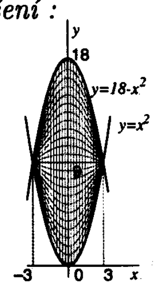
↑

1) ↑
$$D: \begin{cases} 0 \le y \le \frac{x}{2} \\ 0 \le x \le 4 \end{cases}$$
nebo
2) →
$$D: \begin{cases} 2y \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

■

***Příklad* 267.** $y = 18 - x^2,\ y = x^2$

Řešení :



$$18 - x^2 = x^2 \longrightarrow x^2 = 9 \longrightarrow x_{1,2} = \pm 3$$

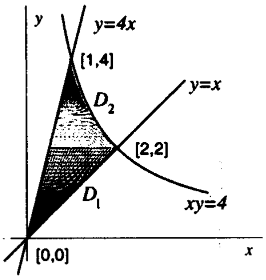
$$\uparrow \qquad D: \begin{cases} x^2 \le y \le 18 - x^2 \\ -3 \le x \le 3 \end{cases}$$

■

***Příklad* 268.** $xy = 4,\ y = x,\ y = 4x,\ (x \ge 0)$

Řešení :

$\rightarrow$



$D = D_1 \cup D_2$

$\rightarrow$

$$D_1: \begin{cases} \dfrac{y}{4} \le x \le y \\ 0 \le y \le 2 \end{cases} \qquad D_2: \begin{cases} \dfrac{y}{4} \le x \le \dfrac{4}{y} \\ 2 \le y \le 4 \end{cases}$$

■

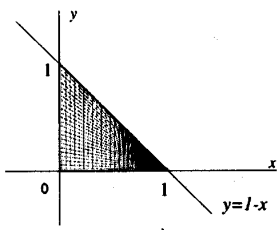
• Zaměňte pořadí integrace :

***Příklad* 269.** $I = \displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} f(x,y)\,dy\Big)\,dx$

Řešení :

$$1) \begin{cases} 0 \le y \le 1 - x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \quad \rightarrow$$

$\uparrow$



$\uparrow$

$$2) \begin{cases} 0 \le x \le 1 - y \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

$\rightarrow$

$$I = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-y} f(x,y)\,dx\Big)\,dy.$$

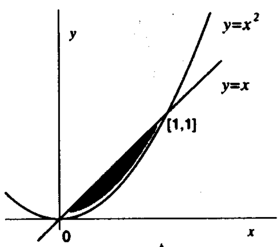
■

***Příklad* 270.** $I = \displaystyle\int_0^1 \Big(\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\Big)\,dx$

Řešení :

$$1) \begin{cases} x^2 \le y \le x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \quad \rightarrow$$

$\uparrow$



$\uparrow$

$$2) \begin{cases} y \le x \le \sqrt{y} \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

$\rightarrow$

$$I = \int_0^1 \Big(\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$ ■

***Příklad* 271.** $I = \int_0^4 \Big(\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x,y)\,dy \Big)\,dx$

Řešení :

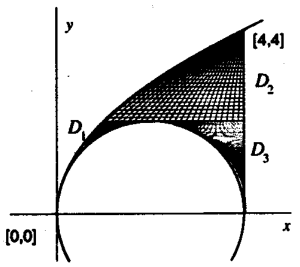
$$1)\begin{cases} \sqrt{4x-x^2} \le y \le \sqrt{4x} \\ 0 \le x \le 4 \end{cases}$$

↑

Množina D je omezená křivkami :
$y = \sqrt{4x - x^2}$, což je rovnice horní poloviny kružnice $(x-2)^2 + y^2 = 4$,
$y = \sqrt{4x}$, což je rovnice horní větve paraboly $y^2 = 4x$,
$x = 4, \quad x = 0$.

2) Ve směru osy x rozdělíme množinu D na tři části tak, aby tyto části byly elementárními množinami.

→ $\qquad D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$

→ 

$$D_1 : \begin{cases} \dfrac{y^2}{4} \le x \le 2 - \sqrt{4-y^2} \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} \dfrac{y^2}{4} \le x \le 4 \\ 2 \le y \le 4 \end{cases}$$

$$D_3 : \begin{cases} 2 + \sqrt{4-y^2} \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

↑

$$I = \int_0^2 \Big(\int_{\frac{y^2}{4}}^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx \Big)\,dy + \int_2^4 \Big(\int_{\frac{y^2}{4}}^{4} f(x,y)\,dx \Big)\,dy + \int_0^2 \Big(\int_{2+\sqrt{4-y^2}}^{4} f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

Tento příklad ukazuje, že původní směr vnitřní integrace byl mnohem výhodnější.

■

***Příklad* 272.** $I = \int_0^4 \Big(\int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx \Big)\,dy + \int_4^6 \Big(\int_0^{6-y} f(x,y)\,dx \Big)\,dy$

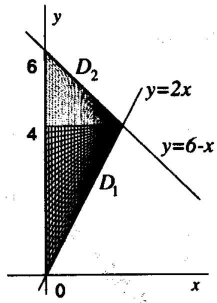
Řešení :

$D = D_1 \cup D_2$

$$D_1 : \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{y}{2} \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} 0 \le x \le 6 - y \\ 4 \le y \le 6 \end{cases}$$

$$I = \int_0^2 \Big(\int_{2x}^{6-x} f(x,y)\,dy \Big)\,dx.$$



Nový směr vnitřní integrace dovoluje vyjádřit celou množinu D bez předcházejícího dělení :

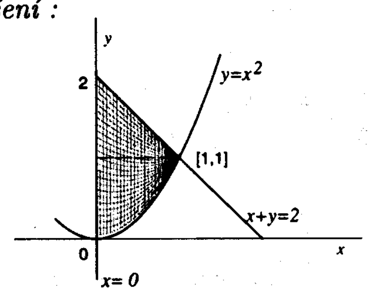
$$D : \begin{cases} 2x \le y \le 6 - x \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

■

• Rozložte pomocí Fubiniovy věty dvojný integrál $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ na dvojnásobné integrály, jestliže množina $D \subset E_2$ je omezená křivkami :

***Příklad* 273.** $x = 0,\ y = x^2,\ x + y = 2\ (x \geq 0)$

Řešení :

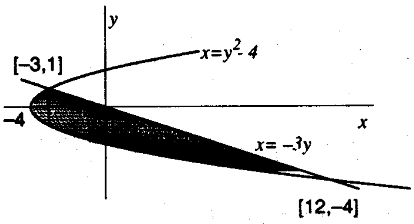


$$\int_0^1 \Big(\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy \Big)\,dx =$$
$$= \int_0^1 \Big(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx \Big)\,dy + \int_1^2 \Big(\int_0^{2-y} f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

■

***Příklad* 274.** $x = y^2 - 4,\ x = -3y$

Řešení : Vyřešením soustavy $\begin{cases} x = y^2 - 4 \\ x = -3y \end{cases}$ dostaneme průsečíky paraboly $x = y^2 - 4$ s přímkou o rovnici $x = -3y$.



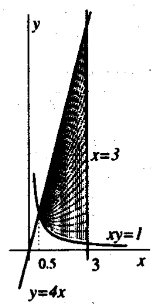
$$\int_{-4}^1 \Big(\int_{y^2-4}^{-3y} f(x,y)\,dx \Big)\,dy =$$
$$= \int_{-4}^{-3} \Big(\int_{-\sqrt{x+4}}^{\sqrt{x+4}} f(x,y)\,dy \Big)\,dx +$$
$$+ \int_{-3}^{12} \Big(\int_{-\sqrt{x+4}}^{-\frac{x}{3}} f(x,y)\,dy \Big)\,dx.$$

■

• Načrtněte množinu D a vypočítejte dané integrály :

***Příklad* 275.** $I = \iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy,\quad D : xy = 1,\ y = 4x,\ x = 3$

Řešení :

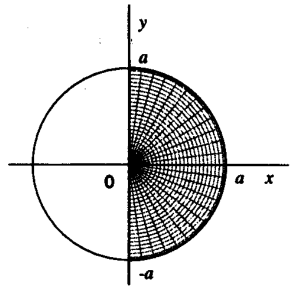


$$\int_{1/2}^3 \Big(\int_{1/x}^{4x} \frac{x^2}{y^2}\,dy \Big)\,dx = \int_{1/2}^3 x^2 \Big[-\frac{1}{y} \Big]_{1/x}^{4x} dx =$$
$$= \int_{1/2}^3 x^2 \Big(-\frac{1}{4x} + x \Big)\,dx = \int_{1/2}^3 \Big(x^3 - \frac{x}{4} \Big)\,dx =$$
$$= \Big[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{8} \Big]_{1/2}^3 = \frac{1225}{64}.$$

■

***Příklad* 276.** $I = \iint_D x^3 y^2\,dx\,dy,\quad D : x^2 + y^2 = a^2,\ x = 0\ (x \geq 0)$

Řešení :

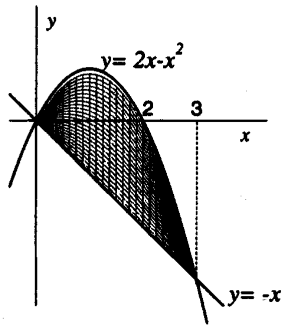


$$\int_{-a}^{a}\Bigl(\int_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}} x^3y^2\,dx\Bigr)\,dy = \int_{-a}^{a} y^2\Bigl[\frac{x^4}{4}\Bigr]_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy =$$
$$= \int_{-a}^{a}\frac{y^2}{4}(a^2-y^2)^2\,dy = \frac{1}{4}\cdot 2\int_0^a y^2(a^4-2a^2y^2+y^4)\,dy =$$
$$= \frac{1}{2}\Bigl[a^4\frac{y^3}{3} - 2a^2\frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7}\Bigr]_0^a = \frac{1}{2}a^7\Bigl(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\Bigr) = \frac{4}{105}a^7. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 277.** $I = \displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+1}$, $\quad D: y = 2x - x^2,\ y = -x$

Řešení : $y = 2x - x^2$ neboli $\quad y - 1 = -(x-1)^2$ je rovnice paraboly s vrcholem $[1,1]$.
Průsečíky paraboly s přímkou $y = -x$ najdeme tak, že zjistíme jejich x-ové souřadnice :

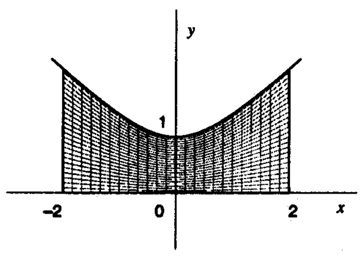
$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases} \quad \text{po dosazení} \quad \begin{aligned} -x = 2x - x^2 \quad &\longrightarrow \quad x(x-3) = 0 \\ &\longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3 \end{aligned}$$



$$\int_0^3\Bigl(\int_{-x}^{2x-x^2}\frac{dy}{x^2+1}\Bigr)\,dx = \int_0^3\frac{1}{x^2+1}(2x-x^2+x)\,dx =$$
$$= \int_0^3\frac{-x^2+3x}{x^2+1}\,dx = -\int_0^3\frac{x^2+1-3x-1}{x^2+1}\,dx =$$
$$= -\int_0^3\Bigl(1 - 3\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\Bigr)\,dx = -\Bigl[x - \frac{3}{2}\ln|x^2+1| -$$
$$-\operatorname{arctg} x\Bigr]_0^3 = \frac{3}{2}\ln 10 + \operatorname{arctg} 3 - 3. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 278.** $I = \displaystyle\iint_D (x+y)\,dx\,dy$, $\quad D: y^2 - x^2 \le 1,\ y \ge 0,\ x \in \langle -2, 2\rangle$

Řešení : $y^2 - x^2 = 1$ je rovnice hyperboly .

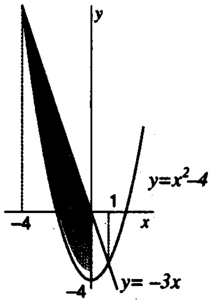


$$\int_{-2}^{2}\Bigl(\int_0^{\sqrt{1+x^2}}(x+y)\,dy\Bigr)\,dx = \int_{-2}^{2}\Bigl[xy + \frac{y^2}{2}\Bigr]_0^{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$
$$= \int_{-2}^{2}\Bigl(x\sqrt{1+x^2} + \frac{1+x^2}{2}\Bigr)\,dx = \underbrace{\int_{-2}^{2} x\sqrt{1+x^2}\,dx}_{=\ 0\ (\text{lichá funkce})} +$$
$$+\frac{2}{2}\int_0^2 \underbrace{(1+x^2)}_{\text{sudá funkce}}\,dx = \Bigl[x + \frac{x^3}{3}\Bigr]_0^2 = \frac{14}{3}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 279.** $I = \displaystyle\iint_D (1+x)\,y\,dx\,dy$, $\quad D: y = x^2 - 4,\ y = -3x,\ x = 0\ (x \le 0)$

Řešení : Stanovíme x-ové souřadnice průsečíků paraboly s přímkou :

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -3x \end{cases} . \quad \text{Po dosazení} \quad \begin{aligned} &x^2 + 3x - 4 = 0 \\ &x_1 = 1, x_2 = -4 \end{aligned}$$

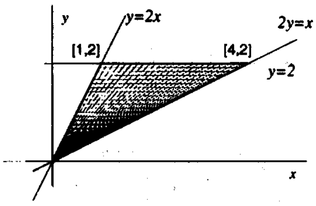


$$\int_{-4}^{0}\Big(\int_{x^2-4}^{-3x}(1+x)y\,dy\Big)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-4}^{0}(1+x)\Big[y^2\Big]_{x^2-4}^{-3x}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-4}^{0}(1+x)(9x^2-(x^2-4)^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-4}^{0}(-x^5-x^4+$$
$$+17x^3+17x^2-16x-16)\,dx = \frac{1}{2}\Big[-\frac{x^6}{6}-\frac{x^5}{5}+\frac{17x^4}{4}+$$
$$+\frac{17x^3}{3}-8x^2-16x\Big]_{-4}^{0} = \frac{-1376}{15}.$$

■

***Příklad* 280.** $\displaystyle\iint_D (x+1)\,dx\,dy, \quad D: y=2x,\ 2y=x,\ y=2$

Řešení :

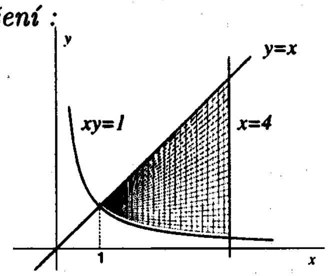


$$\int_0^2\Big(\int_{y/2}^{2y}(x+1)\,dx\Big)\,dy = \cdots = 8.$$

■

***Příklad* 281.** $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y}\,dx\,dy, \quad D: xy=1,\ y=x,\ x=4\ (x\geq 0)$

Řešení :



$$\int_1^4\Big(\int_{1/x}^{x}\frac{1}{y}\,dy\Big)\,dx = \int_1^4\Big[\ln|y|\Big]_{1/x}^{x}\,dx =$$
$$= \int_1^4\Big(\ln x - \ln\frac{1}{x}\Big)\,dx = 2\int_1^4 \ln x\,dx = \text{(per partes)}$$
$$= \left|\begin{array}{ll} u=\ln x, & v'=1 \\ u'=\frac{1}{x}, & v=x \end{array}\right| = 2\Big[x\ln x - x\Big]_1^4 = 8\ln 4 - 6.$$

■

282. $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}, \quad D: x=3,\ x=4,\ y=1,\ y=2$ $\left[\ln\frac{25}{24}\right]$

283. $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)\,dx\,dy, \quad D: x=0,\ y=\pi,\ y=x$ [-2]

284. $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy, \quad D: y=0,\ y=1-x,\ y=1+x$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

285. $\displaystyle\iint_D (x+2y)\,dx\,dy, \quad D: x=y^2-4,\ x=5$ [50,4]

286. $\displaystyle\iint_D xy\,dx\,dy, \quad D: y=x-4,\ y^2=2x$ [90]

287. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y+1}\,dx\,dy, \quad D: x=0,\ y=2,\ y=4,\ y^2=x$ $\left[4+\ln\frac{5}{3}\right]$

288. $\displaystyle\iint_D \frac{x}{y^2}\,dx\,dy, \quad D: y^2=x,\ y^2=4x,\ y=2$ $\left[\frac{5}{4}\right]$

289. $\displaystyle\iint_D (xy+y)\,dx\,dy, \quad D: x=1,\ x=2,\ xy=4,\ y=0$ $\left[4+8\ln 2\right]$

III.3. Fubiniova věta pro trojný integrál

• Vypočítejte trojné integrály na daných množinách $W \subset E_3$:

***Příklad* 290.** $I = \iiint_W \frac{x}{y}(z+1)^2 \, dx\, dy\, dz; \quad W: 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le e^2,\ 0 \le z \le 2$

Řešení :

$$I = \int_0^1 x\,dx \cdot \int_1^{e^2} \frac{1}{y}\,dy \cdot \int_0^2 (z+1)^2\,dz = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \cdot \Big[\ln|y|\Big]_1^{e^2} \cdot \left[\frac{(z+1)^3}{3}\right]_0^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (9 - \frac{1}{3}) = \frac{26}{3}.$$

■

***Příklad* 291.** $I = \iiint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz; \quad W: 0 \le z \le x+y,\ 0 \le y \le 3,\ 0 \le x \le 2$

Řešení :

$$I = \int_0^2 \Big(\int_0^3 \Big(\int_0^{x+y} (x^2+y^2)\,dz \Big)\,dy \Big)\,dx = \int_0^2 \Big(\int_0^3 (x^2+y^2)\Big[z\Big]_0^{x+y} dy \Big)\,dx =$$
$$= \int_0^2 \Big(\int_0^3 (x^2+y^2)(x+y)\,dy \Big)\,dx = \int_0^2 \Big(\int_0^3 (x^3+x^2y+xy^2+y^3)\,dy \Big)\,dx =$$
$$= \int_0^2 \left[x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right]_0^3 dx = \int_0^2 \Big(3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 9x + \frac{81}{4} \Big)\,dx =$$
$$= \left[\frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{81}{4}x\right]_0^2 = \frac{165}{2}.$$

■

***Příklad* 292.** $I = \iiint_W z^3 y \sin x\,dx\,dy\,dz; \; W: 0 \le z \le \sin x,\ 0 \le y \le \sin^2 x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

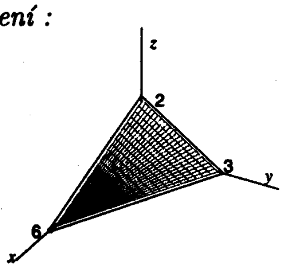
Řešení :

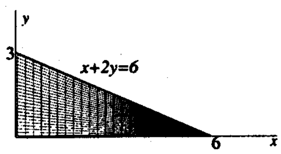
$$I = \int_0^{\pi/2} \Big(\int_0^{\sin^2 x} \Big(\int_0^{\sin x} y \sin x \cdot z^3\,dz \Big)\,dy \Big)\,dx = \int_0^{\pi/2} \Big(\int_0^{\sin^2 x} y \sin x \cdot \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^{\sin x} dy \Big)\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \Big(\int_0^{\sin^2 x} y \sin^5 x\,dy \Big)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sin^2 x} dx = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \sin^9 x\,dx =$$
$$\text{(podle Wallisovy formule viz př. 29)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3} \cdot 1 = \frac{16}{315}.$$

■

***Příklad* 293.** Vypočítejte $\iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{(1+3z)^3}$, kde W je čtyřstěn omezený rovinami $x + 2y + 3z = 6,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

Řešení :





$$0 \le z \le \frac{6-x-2y}{3}$$
$$0 \le y \le \frac{6-x}{2}$$
$$0 \le x \le 6$$

$$I=\int_0^6\Big(\int_0^{\frac{6-x}{2}}\Big(\int_0^{\frac{6-x-2y}{3}}\frac{1}{(1+3z)^3}\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx=\frac{1}{3}\int_0^6\Big(\int_0^{\frac{6-x}{2}}\Big[\frac{-1}{2(1+3y)^2}\Big]_0^{\frac{6-x-2y}{3}}\,dy\Big)\,dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^6\Big(\int_0^{\frac{6-x}{2}}\Big(\frac{-1}{2(7-x-2y)^2}+\frac{1}{2}\Big)\,dy\Big)\,dx=\frac{1}{6}\int_0^6\Big(\int_0^{\frac{6-x}{2}}\Big(1-\frac{1}{(7-x-2y)^2}\Big)\,dy\Big)\,dx=$$

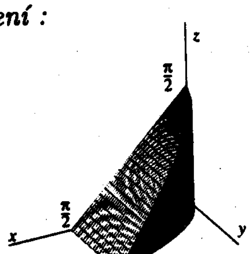
$$=\frac{1}{6}\int_0^6\Big[y-\frac{1}{2(7-x-2y)}\Big]_0^{\frac{6-x}{2}}\,dx=\frac{1}{6}\int_0^6\Big(\frac{6-x}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(7-x)}\Big)\,dx=$$

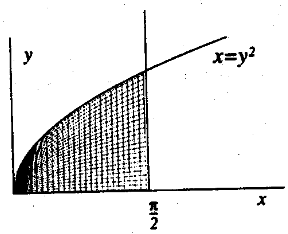
$$=\frac{1}{12}\int_0^6\Big(5-x-\frac{1}{x-7}\Big)\,dx=\frac{1}{12}\Big[5x-\frac{x^2}{2}-\ln|x-7|\Big]_0^6=\frac{12+\ln 7}{12}=1+\frac{\ln 7}{12}.$$

■

***Příklad* 294.** Vypočítejte $\iiint_W y\cdot\cos(x+z)\,dx\,dy\,dz$, kde množina W je omezená plochami $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $x+z=\frac{\pi}{2}$.

Řešení :





$$0\le z\le\frac{\pi}{2}-x$$
$$0\le y\le\sqrt{x}$$
$$0\le x\le\frac{\pi}{2}$$

$$I=\int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{\sqrt{x}}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}y\cdot\cos(x+z)\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx=\int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{\sqrt{x}}y\Big[\sin(x+z)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}-x}\,dy\Big)\,dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{\sqrt{x}}y\Big(\sin\frac{\pi}{2}-\sin x\Big)\,dy\Big)\,dx=\int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{\sqrt{x}}y(1-\sin x)\,dy\Big)\,dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}(1-\sin x)\cdot\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{x}}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\sin x)x\,dx=\frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^{\pi/2}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x\sin x\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=x, & v'=\sin x\\ u'=1, & v=-\cos x\end{array}\right|=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\Big[-x\cos x+\sin x\Big]_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$$

■

• Vypočítejte integrály na daných množinách W :

295. $\iiint_W (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, $W: x=1,\ y=0,\ y=x,\ z=0,\ z=\sqrt{2}$ $\quad\Big[\frac{1+\sqrt{2}}{2}\Big]$

296. $\iiint_W x\,dx\,dy\,dz$, $W: x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=xy,\ x+y=1$ $\quad\Big[\frac{1}{60}\Big]$

297. $\iiint_W x^2yz^3\,dx\,dy\,dz$, $W: z=xy,\ y=x,\ y=1,\ z=0$ $\quad\Big[\frac{1}{364}\Big]$

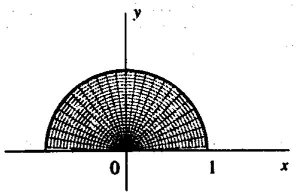
298. $\iiint_W (x+y)\,dx\,dy\,dz$, $W: x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=a,\ y=a,\ z=a^2-x^2-y^2$ $\quad\Big[\frac{a^5}{6}\Big]$

299. $\iiint_W xz\,dx\,dy\,dz$, $W: x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=1,\ z=x^2+y^2+1$ $\quad\Big[\frac{7}{120}\Big]$

III.4. Substituční metoda pro dvojný integrál

Příklad 300. Rozhodněte, zda integrál $\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy$, kde $D=\{[x,y]\in E_2 : x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0\}$ existuje a v kladném případě jej spočítejte.

Řešení :



Funkce $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ je nespojitá na ose y (tj. $x=0$). Nicméně, množina D je měřitelná a funkce f je na D omezená, neboť $|\operatorname{arctg}\frac{y}{x}|\le\frac{\pi}{2}$ pro všechny body $[x,y]\in E_2$. Proto daný integrál existuje. Víme, že

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{B(u,v)} f\Big(x(u,v),y(u,v)\Big)|J|\,du\,dv.$$

Zde použijeme transformaci do polárních souřadnic.

$$\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy=\left[\begin{array}{lcl} x=r\cos\varphi & & 0\le r\le 1\\ y=r\sin\varphi & | & 0\le\varphi\le\pi\\ J=r & & \end{array}\right]=\int_0^\pi\Big(\int_0^1 \varphi\cdot r\,dr\Big)\,d\varphi=$$

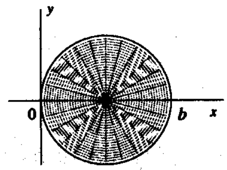
$$=\int_0^\pi \varphi\,d\varphi\cdot\int_0^1 r\,dr=\left[\frac{\varphi^2}{2}\right]_0^\pi\cdot\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1=\frac{\pi^2}{4}.\qquad\blacksquare$$

• Vypočítejte integrály :

Příklad 301. $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,\ D=\{[x,y]\in E_2 : x^2+y^2-bx\le 0\},\ b>0$

Řešení :

$$D:\Big(x-\frac{b}{2}\Big)^2+y^2\le\frac{b^2}{4}$$



$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\left[\begin{array}{lcc} x=r\cos\varphi & & x^2+y^2\le bx\longrightarrow r^2\le br\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi & | & 0\le r\le b\cos\varphi\longrightarrow\cos\varphi\ge 0\\ J=r & & -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\end{array}\right]=$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(\int_0^{b\cos\varphi} r\cdot r\,dr\Big)\,d\varphi=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{b\cos\varphi}d\varphi=\frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} b^3\cos^3\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{2}{3}b^3\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\,d\varphi=\frac{2}{3}b^3\cdot\frac{2}{3\cdot 1}\cdot 1=\frac{4}{9}b^3.\qquad\blacksquare$$

Příklad 302. $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,dy,\ D: x^2+y^2\le a^2,\ x\le 0$

Řešení :

$$\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,dy = \left[\begin{array}{ccc} x = r\cos\varphi & & 0 \le r \le a \\ y = r\sin\varphi & | & \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2} \\ J = r & & \end{array}\right] =$$

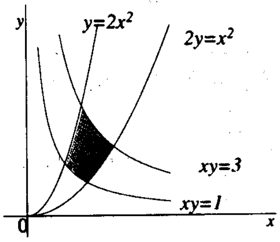
$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^a \ln(1+r^2)\cdot r\,dr\,d\varphi = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \cdot \int_0^a \ln(1+r^2) r\,dr = \left[\begin{array}{c} 1+r^2 = t \\ 2r\,dr = dt \end{array}\right] =$$

$$= \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_1^{1+a^2} \ln t\,dt = \frac{\pi}{2}\Big[t\ln t - t\Big]_1^{1+a^2} = \frac{\pi}{2}\Big((1+a^2)\ln(1+a^2)+1\Big).$$

■

***Příklad* 303.** $\iint_D x^3\,dx\,dy$, kde D je množina ohraničená křivkami $xy=1$, $xy=3$, $y=\frac{x^2}{2}$, $y=2x^2$.

Řešení :



Použijeme transformaci $\begin{cases} xy = u \\ \frac{y}{x^2} = v \end{cases}$. Potom množina D bude mít vyjádření $1 \le u \le 3$, $\frac{1}{2} \le v \le 2$.

Nyní spočítáme x a y pomocí u a v a dále Jakobián

$$y = \frac{u}{x},\ y = vx^2,\quad \frac{u}{x} = vx^2 \longrightarrow x^3 = \frac{u}{v},\quad x = \sqrt[3]{\frac{u}{v}} \longrightarrow y = v\sqrt[3]{\frac{u^2}{v^2}} = \sqrt[3]{u^2 v}\ ;$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{4}{3}} \\ \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{9}v^{-1} + \frac{2}{9}v^{-1} = \frac{1}{3v} \neq 0.$$

Užitím věty o substituci dostaneme

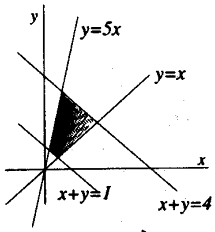
$$\iint_D x^3\,dx\,dy = \int_{1/2}^2 \left(\int_1^3 \frac{u}{v}\cdot\frac{1}{3v}\,du\right) dv = \frac{1}{3}\int_{1/2}^2 \frac{1}{v^2}\,dv \cdot \int_1^3 u\,du = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{v}\right]_{\frac{1}{2}}^2 \cdot \left[\frac{u^2}{2}\right]_1^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot 4 = 2.$$

■

***Příklad* 304.** $\iint_D (2x-y)\,dx\,dy$, $D: x+y=1$, $x+y=4$, $y=x$, $y=5x$

Řešení :



Nejvhodnější substituce bude následující

$$\left\{\begin{array}{c} x+y = u \\ \frac{y}{x} = v \end{array}\right\},\quad 1 \le u \le 4,\ 1 \le v \le 5.$$

Potom $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{u}{1+v} \\ y = \frac{uv}{1+v} \end{array}\right\}$; $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+v} & \frac{-u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+v)^3} + \frac{uv}{(1+v)^3} = \frac{u}{(1+v)^2} \neq 0;$

$$\iint_D (2x-y)\,dx\,dy = \int_1^5 \left(\int_1^4 \left(\frac{2u}{1+v} - \frac{uv}{1+v} \right) \frac{u}{(1+v)^2}\,du \right) dv = \int_1^4 u^2\,du \cdot \int_1^5 \frac{2-v}{(1+v)^3}\,dv =$$

$$= \left[\frac{u^3}{3} \right]_1^4 \cdot \int_1^5 -\frac{v+1-3}{(1+v)^3}\,dv = 21 \cdot \int_1^5 \left(-\frac{1}{(1+v)^2} + \frac{3}{(1+v)^3} \right) dv =$$

$$= 21 \cdot \left[\frac{1}{1+v} - \frac{3}{2(1+v)^2} \right]_1^5 = 21 \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{2 \cdot 36} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2 \cdot 4} \right) = 0.$$

■

***Příklad* 305.** $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+4x^2+9y^2}\,dx\,dy, \ D : 4x^2+9y^2 \le 36, \ y \ge 0$

Řešení : Množina D je vnitřek elipsy $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 1$ ležící nad osou x.

Použijeme transformaci do zobecněných polárních souřadnic (eliptických) :

$$\begin{cases} x = 3r\cos\varphi \\ y = 2r\sin\varphi \end{cases}, \quad J = 3 \cdot 2 \cdot r, \ 0 \le r \le 1, \ 0 \le \varphi \le \pi.$$

$$\iint_D \sqrt{1+4x^2+9y^2}\,dx\,dy = \int_0^\pi \left(\int_0^1 \sqrt{1+4 \cdot 9r^2\cos^2\varphi + 9 \cdot 4r^2\sin^2\varphi} \cdot 6r\,dr \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi d\varphi \cdot \int_0^1 \sqrt{1+36r^2} \cdot 6r\,dr = \pi \cdot \frac{1}{12} \left[\frac{(1+36r^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{18}(37\sqrt{37}-1).$$

■

306. $\displaystyle\iint_D (x-2y+3)\,dx\,dy, \quad D : x^2+y^2 \le a^2$ [$3\pi a^2$]

307. $\displaystyle\iint_D x\,dx\,dy, \quad D : (x-2)^2 + \frac{(y-1)^2}{4} \le 1$

(Použijte souřadnice $x = 2 + r\cos\varphi, y = 1 + 2r\sin\varphi$.) [$4\pi$]

308. $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy, \quad D : x^2+y^2 \le 2x$ [$\frac{32}{9}$]

309. $\displaystyle\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy, \quad D : xy = 1, \ xy = 4, \ y = x, \ y = 9x$

(Použijte souřadnice $xy = u, \frac{y}{x} = v$.) [$J = \frac{1}{4v}, \frac{19}{3}$]

III.5. Substituční metoda pro trojný integrál

- Spočítejte integrály substitucí do sférických souřadnic :

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\vartheta \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta \\ z = r\sin\vartheta \end{cases} \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = r^2\cos\vartheta$$

$r > 0 \ ; \ 0 \le \varphi < 2\pi \ ; \ -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2} \ ;$

$x^2+y^2+z^2 = r^2 \ ;$

***Příklad* 310.** $\displaystyle\iiint_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz, \quad W : x^2+y^2+z^2 \le 9, \ x \ge 0, \ y \le 0$

Řešení :

$$\iiint_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \begin{bmatrix} 0 \le r \le 3 \\ \frac{3\pi}{2} \le \varphi \le 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{3\pi/2}^{2\pi}\left(\int_0^3 r\cdot r^2\cos\vartheta\,dr\right)d\varphi\right)d\vartheta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\vartheta\,d\vartheta\cdot\int_{3\pi/2}^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^3 r^3\,dr =$$

$$= 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{81}{4} = \frac{81}{4}\pi. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 311.** $\iiint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz, \quad W: 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,\ y \ge 0,\ z \le 0$

Řešení :

$$\iiint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \begin{bmatrix} 1 \le r \le 3 \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_1^3 r^2\cos^2\vartheta\cdot r^2\cos\vartheta\,dr\right)d\varphi\right)d\vartheta = \int_{-\pi/2}^{0}\cos^3\vartheta\,d\vartheta\cdot\int_0^{\pi}d\varphi\cdot\int_1^3 r^4\,dr =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\cos^3\vartheta\,d\varphi\cdot\pi\cdot\left[\frac{r^5}{5}\right]_1^3 = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot\frac{242}{5} = \frac{484}{15}\pi. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 312.** $\iiint_W xy\,dx\,dy\,dz, \quad W: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4} \le 1,\ x \le 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

Řešení :

$$\iiint_W xy\,dx\,dy\,dz = \left[\begin{array}{l|l} x = 2r\cos\varphi\cos\vartheta & 0 \le r \le 1 \\ y = 3r\sin\varphi\cos\vartheta & \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi \\ z = 2r\sin\vartheta & 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \\ J = 12r^2\cos\vartheta & \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_0^1 6r^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\vartheta\cdot 12r^2\cos\vartheta\,dr\right)d\varphi\right)d\vartheta =$$

$$= 72\cdot\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1\cdot\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot 1\right] = -\frac{24}{5}. \qquad \blacksquare$$

- Spočítejte integrály substitucí do cylindrických souřadnic :

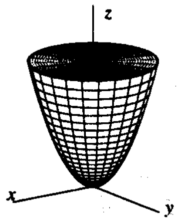
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = v \end{cases} \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = r$$

$r > 0\ ;\quad 0 \le \varphi < 2\pi\ ;$

$x^2+y^2 = r^2$

***Příklad* 313.** $\iiint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz, \quad W: x^2+y^2 \le az,\ z \le a,\ (a > 0)$

Řešení :



W je část vnitřku rotačního paraboloidu :

$$x^2+y^2 \le az \longrightarrow r^2 \le av \longrightarrow \frac{r^2}{a} \le v \le a,$$

$$z=a: x^2+y^2=a^2 \longrightarrow r^2=a^2,$$

$$0 \le r \le a, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

$$\iiint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^a\Big(\int_{\frac{r^2}{a}}^a r^2 r\,dv\Big)\,dr\Big)\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^a r^3\Big[v\Big]_{\frac{r^2}{a}}^a\,dr\Big)\,d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\cdot\int_0^a r^3(a-\frac{r^2}{a})\,dr = 2\pi\Big[a\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6a}\Big]_0^a = 2\pi(\frac{a^5}{4}-\frac{a^5}{6}) = \frac{2\pi\cdot a^5}{12} = \frac{\pi a^5}{6}.$$

V tomto příkladě jsme mohli postupovat i bez použití cylindrických souřadnic. Mohli jsme vyjádřit z přímo : $\dfrac{x^2+y^2}{a} \le z \le a$ a potom vzít v úvahu průmět tělesa do roviny (xy), což je řez tělesa rovinou $z=a$ tj. $x^2+y^2 \le a^2$. Tedy

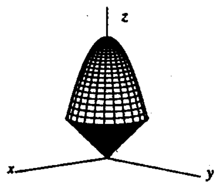
$$\iiint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{x^2+y^2\le a}\Big(\int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^a (x^2+y^2)\,dz\Big)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le a}(x^2+y^2)\Big[z\Big]_{\frac{x^2+y^2}{a}}^a\,dx\,dy = \iint\limits_{x^2+y^2\le a}(x^2+y^2)\Big(a-\frac{x^2+y^2}{a}\Big)\,dx\,dy =$$

$$= \begin{bmatrix} x=r\cos\varphi & & 0\le r\le a \\ y=r\sin\varphi & | & 0\le\varphi\le 2\pi \\ J=r & & \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi}\int_0^a r^2(a-\frac{r^2}{a})\,r\,dr\,d\varphi = \frac{\pi a^5}{6}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 314.** $\displaystyle\iiint_W \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz, \quad W: \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 6-x^2-y^2$

Řešení :



$z=\sqrt{x^2+y^2}$ je rovnice rotační kuželové plochy s vrcholem v počátku;

$z=6-x^2-y^2$ je rovnice rotačního paraboloidu.

Obě plochy mají společnou osu rotace z, a proto se protínají v kružnici, jejíž poloměr dostaneme ze soustavy :

$$\begin{cases} z^2=x^2+y^2, \\ z=6-x^2-y^2. \end{cases} \quad \text{Tedy } z=6-z^2,\ z^2+z-6=0,$$

$(z-2)(z+3)=0$. Úloze vyhovuje řešení $z=2 \longrightarrow x^2+y^2=4$.

Použijeme cylindrické souřadnice a určíme příslušné meze : $\begin{cases} r\le v\le 6-r^2 \\ 0\le r\le 2 \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases}$

$$\iiint_W \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2\Big(\int_r^{6-r^2} r\cdot r\,dv\Big)\,dr\Big)\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2 r^2(6-r^2-r)\,dr\Big)\,d\varphi = 2\pi\cdot\Big[\frac{6r^3}{3}-\frac{r^5}{5}-\frac{r^4}{4}\Big]_0^2 = 2\pi\Big(16-\frac{32}{5}-4\Big) = \frac{56\pi}{5}.$$

$\blacksquare$

***Příklad* 315.** Vypočítejte integrál $\displaystyle\iiint_W z^3\,dx\,dy\,dz$, kde $W: x\le 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,$ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ **(elipsoid).**

Řešení : Použijeme zobecněné sférické souřadnice :

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi\cos\vartheta \\ y = br\sin\varphi\cos\vartheta \\ z = cr\sin\vartheta \end{cases} \qquad J = abcr^2\cos\vartheta, \qquad \begin{array}{l} 0 \le r \le 1 \\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\iiint_W z^3\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\Big(\int_0^1 c^3r^3\sin^3\vartheta\cdot abcr^2\cos\vartheta\,dr\Big)d\varphi\Big)\,d\vartheta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\cdot\int_0^1 r^5\,dr = abc^4\left[\frac{\sin^4\vartheta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 = \frac{abc^4\pi}{48}.$$ ■

• Vypočítejte integrály :

316. $\displaystyle\iiint_W \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-4}\,dx\,dy\,dz,\ W: x^2+y^2+z^2 \le 1,\ y \ge 0,\ z \le 0$ $\left[\pi\left(\frac{9}{2}+16\ln 3\right)\right]$

317. $\displaystyle\iiint_W x^2y\,dx\,dy\,dz,\ W: z \le 4-x^2-y^2,\ y \ge 0,\ z \ge 0$ $\left[\frac{2752}{105}\right]$

318. $\displaystyle\iiint_W (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,\ W: 4x^2+y^2+\frac{z^2}{9} \le 1$ $[4\pi]$

319. $\displaystyle\iiint_W \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2+2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz,\ W: x^2+y^2+z^2 \le 2,\ x \le 0,\ y \le 0,\ z \ge 0$ $\left[\frac{\pi(4-\sqrt{2})}{3}\right]$

320. $\displaystyle\iiint_W (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,\ W: x^2-2x+y^2 \le 0,\ -1 \le z \le 1$ $\left[\frac{11}{3}\pi\right]$

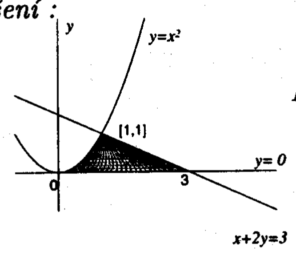
321. $\displaystyle\iiint_W xy\,dx\,dy\,dz,\ W: 0 \le x^2+z^2 \le 4,\ 0 \le y \le 4-x^2-z^2,\ x \ge 0$
(Návod : cylindrické souř. $x = r\cos\varphi, y = h, z = r\sin\varphi$) $\left[\frac{1024}{105}\right]$

III.6. Aplikace dvojných a trojných integrálů

• Určete plošný obsah rovinného obrazce D ohraničeného danými křivkami :

***Příklad* 322**. $y = x^2,\ x+2y = 3,\ y = 0$

Řešení :



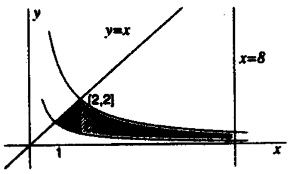
$$P = \iint_D dx\,dy = \int_0^1\Big(\int_{\sqrt{y}}^{3-2y}dx\Big)\,dy = \int_0^1\Big(3-2y-\sqrt{y}\Big)\,dy =$$

$$= \left[3y-y^2-\frac{2y\sqrt{y}}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

■

Příklad 323. $xy = 1,\ xy = 4,\ y = x,\ x = 8$

Řešení :



$$P = \iint_D dx\,dy = \int_1^2 \Big(\int_{\frac{1}{x}}^{x} dy\Big)\,dx + \int_2^8 \Big(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{4}{x}} dy\Big)\,dx =$$

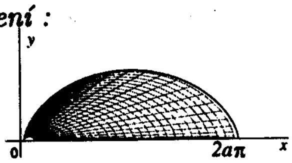
$$= \int_1^2 \Big(x - \frac{1}{x}\Big)\,dx + \int_2^8 \Big(\frac{4}{x} - \frac{1}{x}\Big)\,dx = \Big[\frac{x^2}{2} - \ln|x|\Big]_1^2 +$$

$$+3\Big[\ln|x|\Big]_2^8 = 2 - \ln 2 - \frac{1}{2} + 3(\ln 8 - \ln 2) = \frac{3}{2} + \ln\frac{8^3}{2\cdot 2^3} =$$

$$= \frac{3}{2} + \ln 32.$$ ■

Příklad 324. Určete plošný obsah rovinného obrazce omezeného osou x a jedním obloukem cykloidy o parametrických rovnicích $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$.

Řešení :



Jeden oblouk cykloidy opíše bod kružnice, která se kotálí po přímce $y = 0$, tj. $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

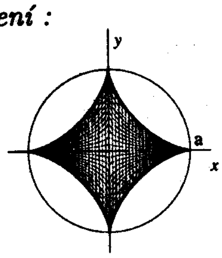
$$P = \iint_D dx\,dy = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \int_0^{2\pi} y\,\dot{x}\,dt = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \Big(1 - 2\cos t + \cos^2 t\Big)\,dt = a^2\Big[t - 2\sin t\Big]_0^{2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= a^2\cdot 2\pi + \frac{a^2}{2}\Big[t + \frac{\sin 2t}{2}\Big]_0^{2\pi} = 2\pi a^2 + a^2\pi = 3\pi a^2.$$ ■

Příklad 325. Určete plošný obsah rovinného obrazce D omezeného asteroidou $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Řešení :



$$P = \iint_D dx\,dy$$

Použijeme transformace do souřadnic : $\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos^3\varphi \\ y = r\sin^3\varphi \end{array}\right.$

$$\Big(r\cos^3\varphi\Big)^{2/3} + \Big(r\sin^3\varphi\Big)^{2/3} = a^{2/3} \longrightarrow r^{2/3} = a^{2/3} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 \le r \le a \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{bmatrix},\ J = \begin{vmatrix} \cos^3\varphi & -3r\cos^2\varphi\sin\varphi \\ \sin^3\varphi & 3r\sin^2\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = 3r\sin^2\varphi\cos^4\varphi + 3r\sin^4\varphi\cos^2\varphi =$$

$$= 3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi.$$

$$P = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^a 3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,dr\Big)\,d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi \cdot 3\int_0^a r\,dr =$$

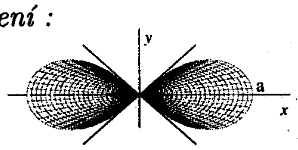
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\varphi}{4}\,d\varphi \cdot 3\Big[\frac{r^2}{2}\Big]_0^a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi \cdot \frac{3}{2}a^2 = \frac{3}{4}a^2\Big[\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{3}{4}a^2\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi a^2.$$ ■

- Určete plošný obsah rovinného obrazce omezeného uzavřenou křivkou :

Příklad 326. $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2(x^2-y^2)$ **(Bernoulliova lemniskáta)**

Řešení :



$$P = \iint_D dx\,dy = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ J = r \end{bmatrix}.$$

Po dosazení do zadání dostáváme postupně : $r^4 = a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$, $r^2 = a^2\cos 2\varphi$,

$0 \le r \le a\sqrt{\cos 2\varphi} \longrightarrow \cos 2\varphi \ge 0, \quad \varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle \cup \langle\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\rangle \cup \langle\frac{7\pi}{4}, 2\pi\rangle.$

$$P = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r\,dr\right)d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\,d\varphi =$$
$$= 2a^2\left[\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

■

Příklad 327. $\left(x^2+9y^2\right)^2 = x^2y$

Řešení : $P = \iint_D dx\,dy = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = \frac{r}{3}\sin\varphi \\ J = \frac{1}{3}r \end{bmatrix}$

$r^4 = r^2\cos^2\varphi\cdot\frac{r}{3}\sin\varphi$

$0 \le r \le \frac{1}{3}\cos^2\varphi\sin\varphi$

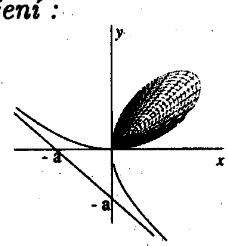
$\cos^2\varphi\sin\varphi \ge 0 \longrightarrow 0 \le \varphi \le \pi$

$$P = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{3}\cos^2\varphi\sin\varphi}\frac{1}{3}r\,dr\right)d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{3}\cos^2\varphi\sin\varphi} d\varphi =$$
$$= \frac{1}{6}\int_0^{\pi}\frac{1}{9}\cos^4\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{54}\cdot 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,(1-\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$
$$= \frac{1}{27}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4\varphi - \cos^6\varphi)\,d\varphi = \text{(Wallisova formule)} = \frac{1}{27}\left(\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{864}.$$

■

Příklad 328. $(x^3+y^3) = 3axy$ **(Descartesův list)**

Řešení :



$$P = \iint_D dx\,dy = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi & 0 \le r \le r(\varphi) \\ y = r\sin\varphi & | \quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ J = r & \end{bmatrix} =$$
$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\int_0^{r(\varphi)} r\,dr\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Nyní určíme $r(\varphi)$ a dosadíme do posledního integrálu.

$x^3+y^3 = 3axy \longrightarrow r^3\cos^3\varphi + r^3\sin^3\varphi = 3ar^2\cos\varphi\sin\varphi$, takže

$$r(\varphi) = \frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad r(0) = r(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}\right)^2 d\varphi = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)^2}d\varphi =$$

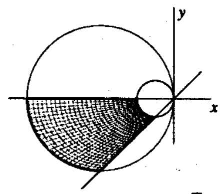
(čitatel a jmenovatel vydělíme $\cos^6\varphi$)

$$= \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\left(\operatorname{tg}^3\varphi+1\right)^2}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\varphi = u \\ \frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi = du \end{bmatrix} = \frac{9a^2}{2\cdot 3}\int_0^{\infty}\frac{3u^2}{(u^3+1)^2}\,du =$$

$$= \frac{3}{2}a^2 \lim_{C\to+\infty} \int_0^C \frac{3u^2}{(u^3+1)^2}\,du = \frac{3a^2}{2} \lim_{C\to+\infty} \left[\frac{-1}{u^3+1}\right]_0^C = \frac{3a^2}{2} \lim_{C\to+\infty} \left(\frac{-1}{C^3+1}+1\right) =$$
$$= \frac{3a^2}{2}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 329.** Určete plošný obsah rovinného obrazce omezeného křivkami
$$x^2+y^2+x=0,\ x^2+y^2+4x=0,\ y=x,\ y=0.$$

Řešení :



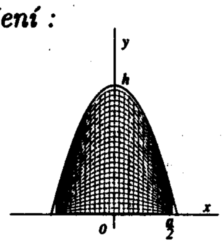
$$x^2+y^2+x=0 \longrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$
$$x^2+y^2+4x=0 \longrightarrow (x+2)^2+y^2=4$$

$$P = \iint_D dx\,dy = \left[\begin{array}{ccc} x=r\cos\varphi & & x^2+y^2+x=0 \longrightarrow r=-\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi & | & x^2+y^2+4x=0 \longrightarrow r=-4\cos\varphi \\ J=r & & -\cos\varphi \le r \le -4\cos\varphi \\ & & \pi \le \varphi \le \frac{5}{4}\pi \end{array}\right] =$$
$$= \int_\pi^{\frac{5}{4}\pi} \left(\int_{-\cos\varphi}^{-4\cos\varphi} r\,dr\right) d\varphi = \frac{1}{2}\int_\pi^{\frac{5}{4}\pi} \left[r^2\right]_{-\cos\varphi}^{-4\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\int_\pi^{\frac{5}{4}\pi} \left(16\cos^2\varphi-\cos^2\varphi\right) d\varphi =$$
$$= \frac{15}{2}\int_\pi^{\frac{5}{4}\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{15}{2}\int_\pi^{\frac{5}{4}\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{15}{4}\left[\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_\pi^{\frac{5}{4}\pi} =$$
$$= \frac{15}{4}\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{\sin\frac{5}{2}\pi}{2}-\pi-\frac{\sin 2\pi}{2}\right) = \frac{15}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{15(\pi+2)}{16}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 330.** Je dána parabolická úseč s tětivou kolmou k ose. Délka tětivy je a, výška úseče h, a hustota $\varrho = 1$. Určete :

a) moment setrvačnosti úseče vzhledem k tětivě, b) těžiště úseče.

Řešení :



Analytické vyjádření této paraboly bude $y-h=px^2$.
Použijeme-li bod $\left[\frac{a}{2},0\right]$, pak $-h=p\frac{a^2}{4} \longrightarrow p=\frac{-4h}{a^2} \longrightarrow$
$y=h-\frac{4h}{a^2}x^2$.

a) Moment setrvačnosti k tětivě je nyní momentem setrvačnosti vzhledem k ose x.

$$I_x = \iint_D y^2\,dx\,dy = \left[\begin{array}{ll} D: & 0\le y\le h-\frac{4h}{a^2}x^2 \\ & -\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2} \end{array}\right] = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(\int_0^{h-\frac{4h}{a^2}x^2} y^2\,dy\right)dx =$$
$$= \frac{1}{3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[y^3\right]_0^{h-\frac{4h}{a^2}x^2} dx = \frac{1}{3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(h-\frac{4h}{a^2}x^2\right)^3 dx = \frac{h^3}{3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(1-\frac{4x^2}{a^2}\right)^3 dx =$$
$$= \frac{2h^3}{3}\int_0^{\frac{a}{2}}\left(1-\frac{12x^2}{a^2}+\frac{48x^4}{a^4}-\frac{64x^6}{a^6}\right)dx = \frac{2h^3}{3}\left[x-\frac{4x^3}{a^2}+\frac{48x^5}{5a^4}-\frac{64x^7}{7a^6}\right]_0^{\frac{a}{2}} =$$
$$= \frac{2h^3}{3}\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+\frac{3a}{10}-\frac{a}{14}\right) = \frac{h^3a}{3}\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{7}\right) = \frac{16\,h^3a}{105}.$$

b) $T=\left[0,y_T\right],\quad y_T=\dfrac{M_x}{m}$

$$m = \iint_D dx\,dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Big(\int_0^{h-\frac{4h}{a^2}x^2} dy \Big)\, dx = 2\int_0^{\frac{a}{2}} \Big(h - \frac{4h}{a^2}x^2 \Big)\, dx =$$

$$= 2\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Big(1 - \frac{4x^2}{a^2} \Big)\, dx = 2h\Big[x - \frac{4x^3}{3a^2} \Big]_0^{\frac{a}{2}} = 2h\Big(\frac{a}{2} - \frac{a}{6} \Big) = \frac{2}{3}\, ha,$$

$$M_x = \iint_D y\,dx\,dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Big(\int_0^{h-\frac{4h}{a^2}x^2} y\,dy \Big)\, dx = \cdots = \frac{2}{5}\, h^2 a,$$

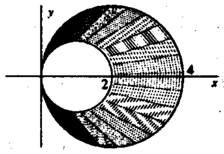
$$y_T = \frac{\frac{2}{5}h^2 a}{\frac{2}{3}ha} = \frac{3}{5}\, h, \qquad T = \Big[0, \frac{3}{5}\, h \Big].$$ ■

***Příklad* 331.** Určete těžiště rovinné desky omezené křivkami $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $x^2 + y^2 - 4x = 0$, je-li $\varrho = 10$.

Řešení :

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \longrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 4x = 0 \longrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$$



$$T = \big[x_T, 0 \big], \; x_T = \frac{M_y}{m},$$

$$m = 10 \cdot P = 10\big(\pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2 \big) = 30\pi$$

$$M_y = \iint_D 10x\,dx\,dy = \left[\begin{array}{l|c} x = r\cos\varphi & x^2 + y^2 \geq 2x \longrightarrow \quad r \geq 2\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi & x^2 + y^2 \leq 4x \longrightarrow \quad r \leq 4\cos\varphi \\ J = r & 2\cos\varphi \leq r \leq 4\cos\varphi \\ & -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right] =$$

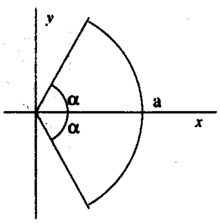
$$= 10\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r^2 \cos\varphi\, dr \Big)\, d\varphi = 10\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \cdot \Big[\frac{r^3}{3} \Big]_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi = \frac{10}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 56\cos^4\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{20}{3} \cdot 56 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{1120}{3} \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = 70\pi,$$

$$x_T = \frac{70\pi}{30\pi}, \qquad T = \Big[\frac{7}{3}, 0 \Big].$$ ■

***Příklad* 332.** Určete souřadnice těžiště kruhové výseče (viz obrázek), je-li $\varrho =$ konst.

Řešení :



$$T = \big[x_T, 0 \big], \quad m = \frac{\pi a^2}{2\pi} \cdot 2\alpha\varrho = a^2 \alpha\varrho,$$

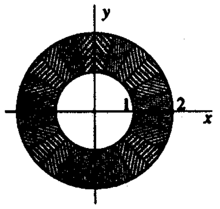
$$M_y = \iint_D x\varrho\, dx\,dy =$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} x = r\cos\varphi & 0 \leq r \leq a \\ y = r\sin\varphi & -\alpha \leq \varphi \leq \alpha \\ J = r & \end{array} \right] = \varrho\int_{-\alpha}^{\alpha} \Big(\int_0^a r^2 \cos\varphi\, dr \Big)\, d\varphi = \varrho\Big[\frac{r^3}{3} \Big]_0^a \cdot \Big[\sin\varphi \Big]_{-\alpha}^{\alpha} =$$

$$= \frac{2}{3}\, \varrho a^3 \sin\alpha, \qquad x_T = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sin\alpha}{\alpha}.$$ ■

***Příklad* 333.** Určete moment setrvačnosti vzhledem k počátku soustavy souřadnic homogenní rovinné desky omezené křivkami $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $\varrho = k$.

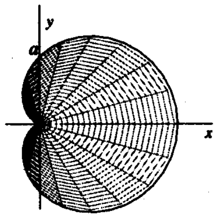
Řešení :



$$I_{[0,0]} = k \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = [\text{polární souřadnice}] = \\ = k\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^3\,dr\,d\varphi = \frac{15}{2}k\pi.$$ ■

***Příklad* 334.** Určete polohu těžiště obrazce omezeného **kardioidou** $r = a(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $a > 0$, $\varrho = 1$.

Řešení :



$$T = \left[x_T, 0\right], m = P_D = \iint_D dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,d\varphi =$$
(viz př. 328)

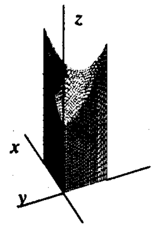
$$= \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}a^2\Big[\varphi + 2\sin\varphi\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = a^2\pi + a^2\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}a^2\pi,$$
$$M_y = \iint_D x\,dx\,dy = \Big[\text{polární souř.}\Big] = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2\cos\varphi\,dr\Big)\,d\varphi =$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\cdot a^3(1+\cos\varphi)^3\,d\varphi = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\Big(\cos\varphi+3\cos^2\varphi+3\cos^3\varphi+\cos^4\varphi\Big)\,d\varphi =$$
$$= \frac{5}{4}a^3\pi; \qquad x_T = \frac{5a}{6}.$$ ■

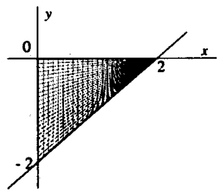
• Vypočítejte objem tělesa W omezeného plochami :

***Příklad* 335.** $z = x^2+y^2+4,\ x-y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

Řešení :

W je část trojbokého hranolu se základnou v rovině $z=0$. Hranol je shora omezený rotačním paraboloidem.

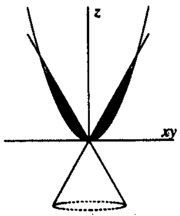




$$V = \iiint_W dx\,dy\,dz = \begin{bmatrix} W: & 0 \le z \le x^2+y^2+4 \\ & x-2 \le y \le 0 \\ & 0 \le x \le 2 \end{bmatrix} =$$
$$= \int_0^2\Big(\int_{x-2}^0\Big(\int_0^{x^2+y^2+4} dz\Big)\,dy\Big)\,dx = \int_0^2\Big(\int_{x-2}^0 (x^2+y^2+4)\,dy\Big)\,dx =$$
$$= \int_0^2\Big[x^2y + \frac{y^3}{3} + 4y\Big]_{x-2}^0\,dx = -\int_0^2\Big(x2(x-2) + \frac{(x-2)^3}{3} + 4(x-2)\Big)\,dx =$$
$$= -\Big[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{(x-2)^4}{12} + 2x^2 - 8x\Big]_0^2 = \frac{32}{3}.$$ ■

***Příklad* 336.** $z = 2(x^2 + y^2),\ z^2 = 16(x^2 + y^2)$

Řešení :



$$V = \iiint_W dx\,dy\,dz = \big(\text{použijeme cylindrické souřadnice}\big)$$

$$\left[\begin{array}{llll} x = r\cos\varphi & | \quad 2(x^2+y^2) \le z \le 4\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow & 2r^2 \le v \le 4r \\ y = r\sin\varphi & \qquad 2r^2 \le 4r & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = v & \qquad r \le 2 \longrightarrow & 0 \le r \le 2 \\ J = r & & \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2\left(\int_{2r^2}^{4r} r\,dv\right)dr\right)d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi\cdot\int_0^2 r(4r - 2r^2)\,dr = 2\pi\cdot\left[\frac{4}{3}r^3 - \frac{2r^4}{4}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{16}{3}\pi.$$

■

***Příklad* 337.** $z = 1 - x^2 - 4y^2,\ z = 0$

Řešení : Plocha $z = 1 - x^2 - 4y^2$ je eliptickým paraboloidem s vrcholem v bodě $[0,0,1]$.

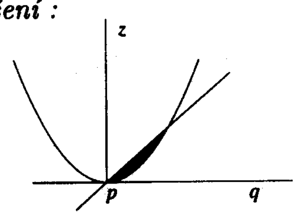
$$V = \iiint_W dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+4y^2\le 1}\left(\int_0^{1-x^2-4y^2} dz\right)dx\,dy = \iint_{x^2+4y^2\le 1}\left(1-x^2-4y^2\right)dx\,dy =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & 0 \le r \le 1 \\ y = \frac{r}{2}\sin\varphi & | \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = \frac{r}{2} & \end{array}\right] = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (1 - r^2)\cdot\frac{r}{2}\,dr\right)d\varphi = \frac{2\pi}{2}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

■

***Příklad* 338.** $z = x^2 + y^2,\ z = x + y$

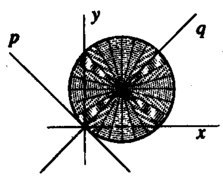
Řešení :



$$V = \iiint_W dx\,dy\,dz = \left[\begin{array}{c} x^2 + y^2 \le z \le x + y \\ (x,y) \in \{x^2 + y^2 \le x + y\} \end{array}\right] =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le x+y}\left(\int_{x^2+y^2}^{x+y} dz\right)dx\,dy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le x+y}\left(x + y - x^2 - y^2\right)dx\,dy = \left[\begin{array}{l} x + y - x^2 - y^2 = \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \\ x^2 + y^2 \le x + y \longrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{2} \end{array}\right] =$$



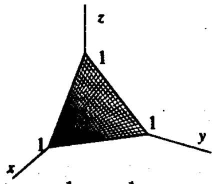
$$= \left[\begin{array}{ll} x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi & 0 \le r \le \sqrt{\frac{1}{2}} \\ y = \frac{1}{2} + r\sin\varphi & | \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = r & \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{1/2}}\left(\frac{1}{2} - r^2\right)r\,dr\right)d\varphi = 2\pi\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1/2}} = 2\pi\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

■

***Příklad* 339.** Určete hmotnost a x-ovou souřadnici těžiště tělesa omezeného rovinami $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1$, je-li hustota $\varrho = 1$.

Řešení : Hmotnost tělesa při $\varrho = 1$ se rovná objemu.



$$m = V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$
$$x_T = \frac{M_{yz}}{m}, \quad M_{yz} = \iiint_W x\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} \Big(\int_0^{1-x-y} x\,dz \Big) dy \Big) dx = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} x(1-x-y)\,dy \Big) dx =$$
$$= \int_0^1 x\left[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 x\Big((1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2}\Big)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{24}, \qquad x_T = \frac{1}{4}. \quad \blacksquare$$

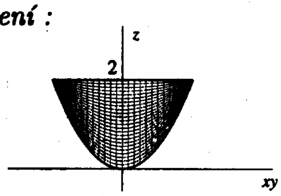
***Příklad* 340.** Určete hmotnost koule, jestliže hustota ϱ je rovna čtverci vzdálenosti od středu koule.

Řešení : Zvolíme počátek soustavy souřadnic ve středu koule. Pak koule je popsána nerovnicí $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ a hustota $\varrho = x^2 + y^2 + z^2$.

$$m = \iiint_W \varrho\,dx\,dy\,dz = \iiint_W (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \left[\begin{array}{l|l} x = r\cos\varphi\cos\vartheta & 0 \le r \le a \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = r\sin\vartheta & -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \\ J = r^2\cos\vartheta & \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^a r^4\cos\vartheta\,dr \Big) d\vartheta \Big) d\varphi =$$
$$= 2\pi\Big[\sin\vartheta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a = \frac{4\pi a^5}{5}. \quad \blacksquare$$

***Příklad* 341.** Určete těžiště tělesa omezeného plochami $z = x^2 + y^2, z = 2$, je-li hustota $\varrho = 1$.

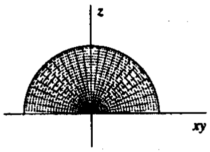
Řešení :



Těžiště $T = [0, 0, z_T]$, kde $z_T = \dfrac{M_{xy}}{m}, m = V =$
$$= \iiint_W dx\,dy\,dz = \iint\limits_{x^2+y^2\le 2} \Big(\int_{x^2+y^2}^{2} dz \Big)\,dx\,dy =$$
$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 2} (2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \left[\begin{array}{l|l} x = r\cos\varphi & 0 \le r \le \sqrt{2} \\ y = r\sin\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array}\right] =$$
$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2)r\,dr \Big) d\varphi = 2\pi\cdot\left[r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi.$$
$$M_{xy} = \iiint_W z\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{x^2+y^2\le 2} \Big(\int_{x^2+y^2}^{2} z\,dz \Big)\,dx\,dy = \cdots = \frac{8}{3}\pi, \quad T = [0, 0, \frac{4}{3}].$$
$\blacksquare$

***Příklad* 342.** Určete těžiště tělesa $W : x^2 + y^2 + z^2 \le a^2, \quad z \ge 0, \quad \varrho = 1$.

Řešení :



Těžiště $T = [0,0,z_T]$, kde $z_T = \dfrac{M_{xy}}{m}$, $\quad m = V$,

$V = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi a^3, \quad M_{xy} = \iiint_W z\,dx\,dy\,dz =$

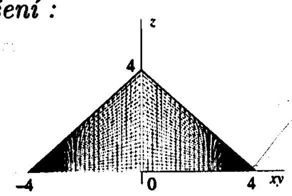
$$= \left[\begin{array}{l|l} x = r\cos\varphi\cos\vartheta & 0 \le r \le a \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = r\sin\vartheta & 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \\ J = r^2\cos\vartheta & \end{array}\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a r\sin\vartheta\, r^2\cos\vartheta\,dr\right)d\varphi\right)d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{\sin^2\vartheta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^4\pi}{2}, \qquad T = [0,0,\tfrac{3}{8}a]. \qquad ■$$

Vzk.

***Příklad* 343.** Určete těžiště kužele se základnou $x^2 + y^2 \le 16$ a vrcholem v bodě $[0,0,4]$, je-li hustota $\varrho = 1$.

Řešení :



$T = [0,0,z_T]$, kde $z_T = \dfrac{M_{xy}}{m}$, $m = V = \dfrac{1}{3}\pi\cdot 4^2\cdot 4 = \dfrac{64}{3}\pi$.

$M_{xy} = \iiint_W z\,dx\,dy\,dz$

Uvažovaný kužel je rotační, osa z je jeho osou rotace. Meridiánem tohoto rotačního kužele je část přímky $x + z = 4 \longrightarrow z = 4 - x$. Potom rovnice kuželové plochy je $z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$

$$M_{xy} = \iint\limits_{x^2+y^2\le 16}\left(\int_0^{4-\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz\right)dx\,dy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 16}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{4-\sqrt{x^2+y^2}} dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 16}\left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 dx\,dy = \left[\begin{array}{l|l} x = r\cos\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = r\sin\varphi & 0 \le r \le 4 \\ J = r & \end{array}\right] =$$

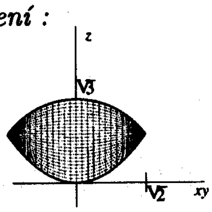
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^4 (4-r)^2 r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\int_0^4 (16r - 8r^2 + r^3)\,dr = \pi\left[8r^2 - \frac{8}{3}r^3 + \frac{r^4}{4}\right]_0^4 = \frac{64}{3}\pi,$$

$$T = [0,0,1]. \qquad ■$$

***Příklad* 344.** Určete moment setrvačnosti vzhledem k bodu $[0,0,0]$ tělesa W

$$W = \left\{[x,y,z] \in E_3;\ \ \frac{x^2+y^2}{2} \le z \le \sqrt{3-x^2-y^2}\right\}, \quad \varrho = 1.$$

Řešení :



$$I_{[0,0,0]} = \iiint_W (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \left[\begin{array}{l|c} x = r\cos\varphi & \frac{r^2}{2} \le h \le \sqrt{3-r^2} \longrightarrow \frac{r^2}{2} \le \sqrt{3-r^2} \longrightarrow r^4 \le 4(3-r^2) \longrightarrow \\ y = r\sin\varphi & r^4 + 4r^2 - 12 \le 0 \longrightarrow (r^2-2)(r^2+6) \le 0 \longrightarrow \quad r^2 \le 2 \longrightarrow \\ z = h & 0 \le r \le \sqrt{2}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = r & \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\sqrt{2}} \Big(\int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}} (r^2 + h^2) r \, dh \Big) dr \Big) d\varphi = 2\pi \cdot \int_0^{\sqrt{2}} \Big[r^3 h + r \frac{h^3}{3} \Big]_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}} dr =$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \Big(r^3 \sqrt{3-r^2} + \frac{r}{3}(3-r^2)\sqrt{3-r^2} - \frac{r^5}{2} - \frac{r^7}{24} \Big) dr = 2\pi \Big[-\frac{r^6}{12} - \frac{r^8}{24 \cdot 8} \Big]_0^{\sqrt{2}} +$$

$$+ 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \Big(r\sqrt{3-r^2} + \frac{2}{3} r^3 \sqrt{3-r^2} \Big) dr = 2\pi \Big(-\frac{8}{12} - \frac{16}{24 \cdot 8} \Big) -$$

$$-\pi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{3-r^2} \Big(1 + \frac{2}{3} r^2 \Big) (-2r) \, dr = \left[\begin{array}{ll} 3 - r^2 = t & | \ r_1 = 0 \to t_1 = 3 \\ -2r \, dr = dt & \ \ r_2 = \sqrt{2} \to t_2 = 1 \end{array} \right] =$$

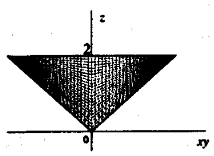
$$= -\frac{3}{2}\pi - \pi \int_3^1 \sqrt{t} \Big(1 + \frac{2}{3}(3-t) \Big) dt = -\frac{3}{2}\pi + \pi \int_1^3 \Big(3\sqrt{t} - \frac{2}{3} t \sqrt{t} \Big) dt =$$

$$= -\frac{3}{2}\pi + \pi \Big[\frac{2 \cdot 3 t^{3/2}}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2 t^{5/2}}{5} \Big]_1^3 = -\frac{3}{2}\pi + \pi \Big(2 \cdot 3\sqrt{3} - \frac{4}{15} \cdot 9\sqrt{3} - 2 + \frac{4}{15} \Big) =$$

$$= \pi \Big(\frac{18\sqrt{3}}{5} - \frac{97}{30} \Big) \doteq 3{,}002\,\pi. \quad \blacksquare$$

***Příklad* 345.** Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose z tělesa W, $W = \{[x,y,z] \in E_3; \ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\}$, $\varrho = 1$.

Řešení :



$$I_z = \iiint_W (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz =$$

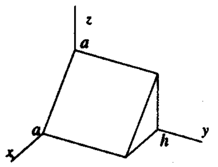
$$= \iint_{x^2+y^2 \le 4} \Big((x^2 + y^2) \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 dz \Big) dx \, dy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le 4} (x^2 + y^2) \Big(2 - \sqrt{x^2+y^2} \Big) dx \, dy = \left[\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & | \ 0 \le r \le 2 \\ y = r \sin\varphi & \ \ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = r & \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^2 r^2 (2-r) r \, dr \Big) d\varphi = 2\pi \Big[2 \cdot \frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5} \Big]_0^2 = 2\pi \Big(8 - \frac{32}{5} \Big) = \frac{16\pi}{5}. \quad \blacksquare$$

***Příklad* 346.** Určete statický moment M_{yz} (vzhledem k rovině (yz)) tělesa omezeného rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = a$, $y = h$, $(a > 0, h > 0)$, je-li hustota ϱ konstantní.

Řešení :



$$M_{yz} = \varrho \cdot \iiint_W x \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} W: & 0 \le z \le a - x \\ & 0 \le x \le a \\ & 0 \le y \le h \end{array} \right] =$$

$$= \varrho \int_0^a \Big(\int_0^h \Big(\int_0^{a-x} x \, dz \Big) dy \Big) dx = \varrho \int_0^a \Big(\int_0^h x(a-x) \, dy \Big) dx = \varrho \cdot h \Big[a \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big]_0^a =$$

$$= \frac{\varrho h a^3}{6}. \quad \blacksquare$$

***Příklad* 347.** Určete moment setrvačnosti I_{xy} (vzhledem k rovině (xy)) tělesa W, $W = \{[x,y,z] \in E_3; x^2 - 2x + y^2 \le 0, \ -1 \le z \le 1\}$, $\varrho = 1$.

Řešení : Těleso W je rotační válec s osou rovnoběžnou s osou z.

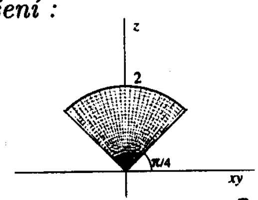
$$I_{xy} = \iiint_W z^2\,dx\,dy\,dz = \iint_{(x-1)^2+y^2\le 1} \Big(\int_{-1}^{1} z^2\,dz\Big)\,dx\,dy = \iint_{(x-1)^2+y^2\le 1} \Big[\frac{z^3}{3}\Big]_{-1}^{1}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{2}{3} \iint_{(x-1)^2+y^2\le 1} dx\,dy = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot 1 = \frac{2}{3}\pi. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 348.** Vypočítejte integrál a pomocí vzorců stanovte jeho možný fyzikální význam:

$$\iiint_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz, \quad W : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2},\ y \ge 0.$$

Řešení :



$$W : \quad z^2 = x^2+y^2 \text{ (rotační kuželová plocha)}$$
$$z^2 = 4 - x^2 - y^2 \longrightarrow x^2+y^2+z^2 = 4 \text{ (kulová plocha)}$$

$$\left[\begin{array}{l|c} x = r\cos\varphi\cos\vartheta & 0 \le r \le 2 \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta & 0 \le \varphi \le \pi \\ z = r\sin\vartheta & (y \ge 0) \\ J = r^2\cos\vartheta & \frac{\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \end{array}\right]$$

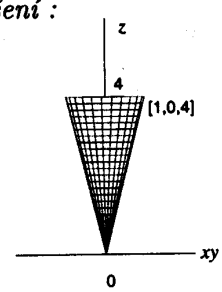
$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{\pi} \Big(\int_0^2 r\cdot r^2\cos\vartheta\,dr\Big)\,d\varphi\Big)\,d\vartheta = \Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^2 \cdot \Big[\sin\vartheta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \pi = 4\pi\Big(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big).$$

Význam : 1) I je celková hmota tělesa při hustotě $\varrho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,
2) I je statický moment tělesa vzhledem k bodu $[0,0,0]$ při hustotě $\varrho = 1$.

$\blacksquare$

***Příklad* 349.** Vypočítejte hmotnost kužele s poloměrem podstavy $a = 1$ a výškou $h = 4$. Hustota se lineárně mění v závislosti na vzdálenosti bodu tělesa od podstavy. Ve vrcholu je $\varrho = 1$ a $\varrho = 5$ v každém bodě podstavy.

Řešení :



Zvolíme soustavu souřadnic s počátkem ve vrcholu kužele, osa z bude osou rotace, meridiánem bude část přímky $z = 4x$, $y = 0$, $0 \le x \le 1$. Potom kuželová plocha bude mít rovnici $z = 4\sqrt{x^2+y^2}$. Uvažované těleso W zapíšeme pomocí nerovnic.

$$W : \quad 4\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 4$$
$$x^2+y^2 \le 1$$

Pro hustotu platí : $\varrho(z) = k_1(4-z) + k_2$: $\quad \varrho(0) = 1 \longrightarrow \quad 1 = 4k_1 + k_2$

$\varrho(4) = 5 \longrightarrow \quad 5 = k_2 \longrightarrow k_1 = -1$

$$\longrightarrow \quad \varrho(z) = -(4-z) + 5 = z + 1$$

$$m = \iiint_W \varrho\,dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2\le 1} \Big(\int_{4\sqrt{x^2+y^2}}^{4} (z+1)\,dz\Big)\,dx\,dy = \cdots = \frac{16}{3}\pi. \qquad \blacksquare$$

• Určete plošný obsah P rovinného obrazce D ohraničeného danými křivkami :

350. $x = y^2,\ 8x = y^2,\ y = 5$ $\left[\frac{875}{24}\right]$

351. $y = x^2,\ x - y + 2 = 0,\ x = 0,\ x = 1$ $\left[\frac{13}{6}\right]$

352. $x = y^2,\ xy = 1,\ x = 4y$ $\left[\frac{1}{6} + \ln 2\right]$

353. $\left(4x^2 + \frac{y^2}{9}\right)^2 = xy$ $\left[\frac{9}{8}\right]$

354. $y = \ln x,\ x - y = 1,\ y = -1$ $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{e}\right]$

355. $y = \frac{x^2}{4},\ y = \frac{8}{4 + x^2}$ $\left[2\left(\pi - \frac{2}{3}\right)\right]$

• Určete hmotnost m rovinné desky omezené křivkami :

356. $y = x^2,\ x - y + 2 = 0$, je-li hustota $\varrho(x, y) = xy$ $\left[\frac{45}{8}\right]$

357. $x^2 + y^2 = 2ax$, je-li $\varrho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},\ a > 0$ $\left[\frac{32}{9}a^3\right]$

358. $x = y^2,\ xy = 1,\ x = 4$, je-li $\varrho(x, y) = 2x$ $\left[\frac{94}{5}\right]$

359. $x^2 + y^2 = 1,\ x + y \geq 1$, je-li $\varrho(x, y) = y$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

360. $x^2 + y^2 - 2x = 0,\ x^2 + y^2 - 4x = 0,\ y = x,\ y = 0$, je-li hustota $\varrho(x, y)$ v libovolném bodě rovna vzdálenosti tohoto bodu od počátku soustavy souřadnic. $\left[\frac{70\sqrt{2}}{9}\right]$

• Určete těžiště T rovinné desky omezené křivkami :

361. $y = 2x - 3x^2,\ y = -x$, je-li $\varrho(x, y) = 1$ $\left[T = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}\right]\right]$

362. $y = \sin x,\ y = 0,\ x \in \langle 0, \pi \rangle$, je-li $\varrho(x, y) = 1$ $\left[T = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right]\right]$

363. $y^2 = 4x + 4,\ y^2 = -2x + 4$, je-li $\varrho(x, y) = 1$ $\left[T = \left[\frac{2}{5}, 0\right]\right]$

364. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ x \geq 0,\ y \geq 0$, je-li $\varrho(x, y) = 1$ (**jde o čtvrtinu asteroidy ležící v I. kvadrantu, použijte souřadnice $x = r\cos^3\varphi,\ y = r\sin^3\varphi$**) $\left[x_T = y_T = \frac{256a}{315\pi}\right]$

• Určete moment setrvačnosti :

365. kruhu o poloměru a vzhledem k jeho tečně, $\varrho(x, y) = 1$, $\left[\frac{5}{4}\pi a^4\right]$

366. elipsy $4x^2 + y^2 \leq 1$ vzhledem k ose y, $\varrho(x, y) = y$, $\left[\frac{1}{30}\right]$

367. čtvrtiny kruhu o poloměru a vzhledem k jeho ose souměrnosti, $\varrho(x, y) = 1$, (**Zvolte polohu tak, aby osa x byla osou souměrnosti.**) $\left[\frac{a^4(\pi - 2)}{16}\right]$

368. čtverce o straně a vzhledem k jeho vrcholu, $\varrho(x, y) = 1$, $\left[\frac{2}{3}a^4\right]$

369. části mezikruží $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4$, omezeného přímkami $y = x,\ y = 0$ v I. kvadrantu s hustotou $\varrho(x, y) = k,\ (k > 0)$ vzhledem ke středu mezikruží. $\left[\frac{15k\pi}{16}\right]$

• Vypočítejte objem V tělesa W omezeného plochami :

370. $z = 0,\ y + z = 1,\ y = \ln x,\ y = \ln^2 x$ $[3e - 8]$

371. $z = 0,\ z = a^2 - x^2,\ x^2 + y^2 = a^2$ $\left[\frac{3}{4}\pi a^4\right]$

372. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + y^2 \le b^2,\ 0 \le b \le a$ $\left[\frac{4}{3}\pi\left(a^3 - \sqrt{(a^2-b^2)^3}\right)\right]$

373. $(x+y)^2 + 2z = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$ $\left[\frac{1}{6}(3\sqrt{3} - 1)\right]$

374. $1 + x^2 + y^2 = z^2,\ z = 5 - x^2 - y^2,\ (z \ge 0)$ $\left[\frac{35}{6}\pi\right]$

375. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\left[\frac{4}{3}\pi abc\right]$

• Určete hmotnost m tělesa W :

376. $W : 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c$, jestliže hustota $\varrho(x,y,z) = x + y + z$.
$\left[\frac{abc}{2}(a+b+c)\right]$

377. W je koule o poloměru a, jestliže hustota je rovna čtverci vzdálenosti od průměru.
(Zvolte kouli se středem v počátku souřadnic a průměr ležící na ose z.) $\left[\frac{8}{15}\pi a^5\right]$

378. W je omezené plochami o rovnicích: $z = 0,\ 2x + y + z = 4,\ x = 0,\ y = 0$,
je-li $\varrho(x,y,z) = 4x$. $\left[\frac{32}{2}\right]$

379. W je omezené plochami o rovnicích : $z = x^2 + y^2 + 4,\ z = 3 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 = 1$,
je-li $\varrho(x,y,z) = 2z(x^2 + y^2)$. $\left[\frac{49\pi}{6}\right]$

• Určete těžiště T tělesa W omezeného plochami :

380. $W : z = 0,\ z = x^2 + y^2,\ x + y = 5,\ x = 0,\ y = 0, \varrho(x,y,z) = 1$
$\left[T = \left[2, 2, \frac{35}{6}\right]\right]$

381. $W : 2z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 3,\ z \ge 0,\ \varrho(x,y,z) = 1$
$\left[T = \left[0, 0, \frac{5}{6\sqrt{3} - 5}\right]\right]$

382. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (v prvním oktantu), $\varrho(x,y,z) = 1$
$\left[T = \left[\frac{3a}{8}, \frac{3b}{8}, \frac{3c}{8}\right]\right]$

• Určete moment setrvačnosti tělesa W :

383. $x^2 + y^2 = 2z,\ x + y = z$ vzhledem k osám souřadnic, je-li $\varrho(x,y,z) = 1$.
$\left[I_{xy} = \frac{7}{2}\pi, I_{xz} = I_{yz} = \frac{4}{3}\pi,\right]$

384. $x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ x^2 + y^2 = z^2,\ (z \ge 0)$ vzhledem k ose z, je-li $\varrho(x,y,z) = 1$.
$\left[I_z = \frac{4}{15}\pi(4\sqrt{2} - 5)\right]$

385. rotačního válce s poloměrem podstavy a a výškou b vzhledem k přímce p, která se dotýká pláště válce a je rovnoběžná s osou rotace.
(Zvolte válec $(x-a)^2 + y^2 \le a^2,\ 0 \le z \le b$, přímka p pak bude osa z.) $\left[\frac{3}{2}\pi a^4 b\right]$

IV. Křivkový integrál

IV.1. Parametrizace křivek

Nechť $P(t) = \Big[x(t), y(t), z(t)\Big]$ *je zobrazení intervalu* $\langle a, b\rangle$ *do* E_3. *Platí-li :*

1) $P(t)$ *je spojité a je prosté na* $\langle a, b\rangle$ *(k prostosti stačí, aby aspoň jedna ze složek* $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ *byla ryze monotónní na* $\langle a, b\rangle$*),*

2) $\dot{\mathbf{P}}(t) = \Big(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\Big)$ *je omezené a spojité na* $\langle a, b\rangle$,

3) $\dot{\mathbf{P}}(t) \neq \vec{0}$ *pro všechna* $t \in \langle a, b\rangle$.

Potom množinu $c = \{X \in E_3;\ X = P(t),\ t \in \langle a, b\rangle\}$ *nazveme* ***jednoduchou hladkou křivkou*** *v* E_3 *a zobrazení* P *její* **parametrizací.**

Analogicky definujeme i parametrizaci křivky v E_2.

Řekneme, že křivka c je ***orientována souhlasně****, resp.* ***nesouhlasně****, s parametrizací P, jestliže počáteční bod této křivky je* $P(a)$, *resp.* $P(b)$.

Křivka c v E_3 *(též v* E_2*) se dá orientovat pomocí jednotkového tečného vektoru* $\vec{\tau}$ *v bodě* $P(t)$. *Je-li* $\vec{\tau} = \dfrac{\dot{\mathbf{P}}(t)}{|\dot{\mathbf{P}}(t)|}$ *pak říkáme, že křivka c je souhlasně orientována s parametrizací P. Je-li* $\vec{\tau} = -\dfrac{\dot{\mathbf{P}}(t)}{|\dot{\mathbf{P}}(t)|}$ *pak říkáme, že křivka c je nesouhlasně orientována s parametrizací P.*

POZNÁMKA : Jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka c se nazývá kladně, resp. záporně, orientovaná, jestliže pohyb v předepsaném směru je proti směru " hodinových ručiček ", resp. " ve směru hodinových ručiček."

***Příklad* 386.** Je dána křivka $c = \{[x, y] \in E_2; y = x^2, x \in \langle -4, 4\rangle\}$ s počátečním bodem $A = [-4, 16]$. Zjistěte, zda zobrazení $P(t) = \Big[x(t), y(t)\Big]$ je parametrizací jednoduché a hladké křivky c, jestliže

a) $P(t) = [t, t^2]$, $\quad t \in \langle -4, 4\rangle$, $\quad$ b) $P(t) = [t^2, t^4]$, $\quad t \in \langle -2, 2\rangle$,

c) $P(t) = [\sqrt{t}, t]$, $\quad t \in \langle 0, 16\rangle$.

Řešení:

a) $P(t) = [t, t^2], t \in \langle -4, 4\rangle$ splňuje všechny požadované podmínky definice, a proto $P(t)$ je parametrizací křivky c. Orientace křivky je souhlasná s parametrizací, jelikož $P(-4) = [-4, 16] = A$.

b) $P(t) = [t^2, t^4], t \in \langle -2, 2\rangle$ není prosté zobrazení. Např. $P(-1) = P(1) = [1, 1]$, takže $P(t)$ není parametrizací křivky c. Kromě toho $x = t^2 \geq 0$, kdežto bod A má x-ovou souřadnici $-4 < 0$.

c) $P(t) = [\sqrt{t}, t], t \in \langle 0, 16\rangle$ též není parametrizací, protože $\dot{\mathbf{P}}(t) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{t}}, 1\right)$ není omezená na $\langle 0, 16\rangle$. ■

***Příklad* 387.** Je dána půlkružnice $c = \{[x,y] \in E_2; x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0\}$ s počátečním bodem $A = [-a, 0]$. Zjistěte, zda zobrazení $P(t)$ je její parametrizací, jestliže a) $P(t) = [a\cos t, a\sin t]$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$, b) $P(t) = [t, \sqrt{a^2 - t^2}], t \in \langle -a, a \rangle$, c) $P(t) = \left[\frac{at}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}\right], t \in R.$

Řešení:

a) Ano, $P(t)$ je parametrizací , protože $P(t)$ vyhovuje podmínkám definice. Orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací, protože $A = P(\pi) = [-a, 0]$.

b) Není parametrizací, protože $\dot{\mathbf{P}}\,(t) = \left(1, \frac{-t}{\sqrt{a^2 - t^2}}\right)$ není omezená na $\langle -a, a \rangle$.

c) Ano, je parametrizací. Ověříme, že platí $x^2 + y^2 = a^2$:

$$\left(\frac{at}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 = \frac{a^2(t^2+1)}{1+t^2} = a^2,$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{at}{\sqrt{1+t^2}} = \pm a, \quad \lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{a}{1+t^2} = 0 \longrightarrow \text{orientace}$$

křivky je souhlasná s parametrizací. Zde se snadno ověří spojitost pro $P(t)$ a $\dot{\mathbf{P}}\,(t)$.

Protože je $\dot{x}\,(t) = \frac{a}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} > 0$ pro všechna t, je funkce $x(t)$ monotónní

a zobrazení $P(t)$ je prosté. $\dot{\mathbf{P}}\,(t) = \left(\dot{x}\,(t), \dot{y}\,(t)\right) \neq (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0 \quad \longrightarrow$

$$\frac{a^2}{(1+t^2)^3} + \frac{a^2t^2}{(1+t^2)^3} = \frac{a^2}{(1+t^2)^2} \neq 0.$$

■

• Najděte parametrizaci křivky c s počátečním bodem A a rozhodněte o její orientaci vzhledem k parametrizaci :

***Příklad* 388.** Křivka c je úsečka s počátečním bodem $A = [4, -1, 3]$ a koncovým $B = [3, 1, 5]$.

Řešení: Napíšeme rovnice přímky AB tak, že použijeme bod A a směrový vektor

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (-1, 2, 2), \quad c: \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}. \text{ Úsečku } AB \text{ obdržíme pro } t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

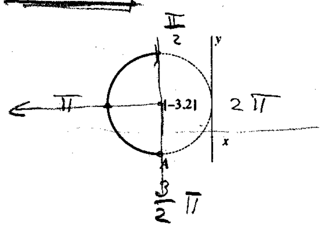
bod A odpovídá parametru $t = 0$, takže orientace křivky je souhlasná s parametrizací.

■

***Příklad* 389.** $c = \{[x,y] \in E_2; (x+3)^2 + (y-2)^2 = 9, \boxed{x \leq -3\}}$ $A = [-3, -1]$

Řešení:

$$c: \begin{cases} x = -3 + 3\cos\varphi \\ y = 2 + 3\sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle,$$



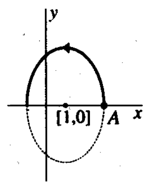
orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací.

■

***Příklad* 390.** $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad y \geq 0, \quad A = [3, 0]$

Řešení:

$$c: \begin{cases} x = 1 + 2\cos\varphi \\ y = 3\cos\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in \langle 0, \pi \rangle,$$



orientace křivky je souhlasná s parametrizací. ■

***Příklad* 391.** $c = \{[x,y,z] \in E_3; x^2 + y^2 = 4x,\ y + z = 0,\ z \geq 0\}, \quad A = [0,0,0]$

Řešení: Křivka c je řezem válcové plochy $x^2 + y^2 = 4x$ rovinou $y + z = 0$.

$$x^2 - 4x + y^2 = 0 \longrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4, z = -y, z \geq 0 \longrightarrow$$

$$c: \begin{cases} x = 2 + 2\cos\varphi \\ y = 2\sin\varphi \\ z = -2\sin\varphi \longrightarrow -2\sin\varphi \geq 0 \longrightarrow \sin\varphi \leq 0 \longrightarrow \varphi \in \langle \pi, 2\pi \rangle \end{cases}$$

$$A = [0,0,0] \quad \longrightarrow \quad 2 + 2\cos\varphi = 0 \quad \longrightarrow \quad \cos\varphi = -1$$

$$\sin\varphi = 0 \quad \longrightarrow \quad \sin\varphi = 0$$

$\varphi_A = \pi \longrightarrow$ orientace křivky je souhlasná s parametrizací. ■

***Příklad* 392.** $c = \{[x,y,z] \in E_3; x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x = y,\ x \geq 0\}, \ A = [0,0,-a]$

Řešení: Jde o řez kulové plochy rovinou procházející středem kulové plochy . Použijeme sférické souřadnice , v nichž $r = a, \varphi = \frac{\pi}{4}$; ϑ označíme jako parametr t .

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a\cos\frac{\pi}{4}\cos t = a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t \\ y = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos t = a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t \\ z = a\sin t \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow x \geq 0 \longrightarrow \cos t \geq 0 \longrightarrow \quad t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \\ t = -\frac{\pi}{2} : A = [0,0,-a] \longrightarrow \text{orientace křivky je} \\ \qquad \text{souhlasná s parametrizací.} \end{array}$$

■

• Rovinná křivka c je dána v parametrickém tvaru. Najděte její implicitní rovnici a pojmenujte ji :

***Příklad* 393.** $c: x = 2t + 1,\ y = 3 - t, \quad t \in \langle 1, 4 \rangle,$ orientace je souhlasná s parametrizací.

Řešení: Jde o úsečku s počátečním bodem $A = [3,2](t = 1)$ a koncovým bodem $B = [9,-1](t = 4)$. Vyloučením parametru t obdržíme :

$$t = 3 - y \longrightarrow \quad x = 2(3 - y) + 1 \longrightarrow \quad x + 2y = 7$$ ■

***Příklad* 394.** $c: x = t^2 - 2t + 3,\ y = t^2 - 2t + 1, \quad t \in \langle 0, 3 \rangle,$ orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací.

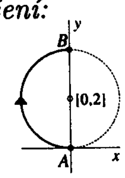
Řešení: Po odečtení dostáváme $x - y = 2$. Opět máme úsečku s počátečním bodem $A = [6,4](t = 3)$ a koncovým $B = [3,1](t = 0)$. ■

***Příklad* 395.** $c: x = 2\sin^2 t,\ y = 4\cos^2 t, \quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle,$ orientace c je souhlasná s parametrizací.

Řešení: Sečteme $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = \sin^2 t + \cos^2 t \longrightarrow 2x + y = 4$. Znovu máme úsečku s počátečním bodem $A = [0,4](t = 0)$ a koncovým $B = [2,0](t = \frac{\pi}{2})$. ■

Příklad 396. Křivka c budiž dána polární rovnicí $r(\varphi) = 4\sin\varphi$, $\quad \varphi \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$, orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací.

Řešení:



$$c: \begin{cases} x = r\cos\varphi = 4\sin\varphi\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi = 4\sin^2\varphi \end{cases}, \quad \begin{array}{l} \text{poč.bod } A = [0,0], (\varphi = \pi) \\ \text{konc.bod } B = [0,4], (\varphi = \pi/2) \end{array}$$

$$x^2 + y^2 = (4\sin\varphi\cos\varphi)^2 + (4\sin^2\varphi)^2 = 16\sin^2\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 4\,\underbrace{4\sin^2\varphi}_{y} = 4y,$$

$$x^2 + y^2 = 4y \quad \longrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 4 \quad \text{(kružnice)}$$

Tutéž kružnici jsme mohli parametrizovat i jinak : $\begin{cases} x = 2\cos\varphi \\ y = 2 + 2\sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$.

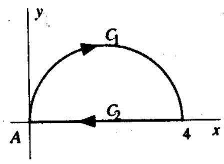
Orientace je nesouhlasná s parametrizací. ■

• Ověřte, že $c = c_1 \cup c_2$ je jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka. Najdětete parametrizace křivek c_1, c_2, nakreslete je a rozhodněte o jejich orientaci, jestliže A je počátečním bodem c_1 a též koncovým bodem c_2 :

Příklad 397. $c_1, c_2 \subset E_2$, $A = [0,0]$; $\quad c_1 : x^2 + y^2 = 4x,\ y \geq 0$; $\quad c_2 : y = 0,\ x \in \langle 0, 4 \rangle$

Řešení:

$$c_1 : (x-2)^2 + y^2 = 4 \longrightarrow c_1 : \begin{cases} x = 2 + 2\cos t_1 \\ y = 2\sin t_1 \end{cases}$$



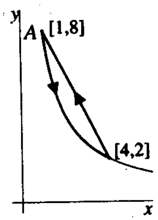
$t_1 \in \langle 0, \pi \rangle$, orientace c je nesouhlasná s parametrizací,

$c_2 : \begin{cases} x = t_2 \\ y = 0 \end{cases}$, $\quad t_2 \in \langle 0, 4 \rangle$, orientace c je nesouhlasná s parametrizací. ■

Příklad 398. $c_1, c_2 \subset E_2$, $A = [1,8]$; $\quad c_1 : xy = 8,\ x \in \langle 1, 4 \rangle$; $\quad c_2 : y + 2x = 10$, $x \in \langle 1, 4 \rangle$

Řešení:

$c_1 : \begin{cases} x = t_1 \\ y = \dfrac{8}{t_1} \end{cases}$, $\quad t_1 \in \langle 1, 4 \rangle$, orientace c je souhlasná s parametrizací,



$c_2 : \begin{cases} x = t_2 \\ y = 10 - 2t_2 \end{cases}$, $\quad t_2 \in \langle 1, 4 \rangle$, orientace c je nesouhlasná s parametrizací. ■

399. $c_1,\ c_2 \subset E_2$, $A = [1,1]$; $\quad c_1 : y = \sqrt{x}, x \in \langle 0, 1 \rangle$; $\quad c_2 : y = x^2, x \in \langle 0, 1 \rangle$

[$c_1 : \begin{cases} x = t_1^2 \\ y = t_1 \end{cases}$ | $t_1 \in \langle 0, 1 \rangle$ orientace c je nesouhlasná s parametrizací | $c_2 : \begin{cases} x = t_2 \\ y = t_2^2 \end{cases}$ | $t_2 \in \langle 0, 1 \rangle$ orientace c je souhlasná s parametrizací]

400. $c_1,\ c_2 \subset E_3$, $A = [3,0,2]$; $\ c_1 : x^2 + y^2 = 9,\ x - z = 1,\ y \geq 0$; $\ c_2 : x - z = 1,\ y = 0$

$$\left[\ c_1: \begin{cases} x = 3\cos t_1 \\ y = 3\sin t_1 \\ z = 3\cos t_1 - 1 \end{cases} \ \middle|\ \begin{matrix} t_1 \in \langle 0, \pi\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je sou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{matrix} \ \middle|\ c_2: \begin{cases} x = t_2 \\ y = 0 \\ z = t_2 - 1 \end{cases} \ \middle|\ \begin{matrix} t_2 \in \langle -3, 3\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je sou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{matrix}\ \right]$$

• Navrhněte parametrizaci křivky c s počátečním bodem A :

401. $c \subset E_2 : 3x + y = 1,\ x \in \langle -1, 2\rangle;\quad A = [-1, 4]$

$$\left[\ c: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 3t \end{cases} \ \middle|\ \begin{matrix} t \in \langle -1, 2\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je sou-} \\ \text{hlasná s parametrizací} \end{matrix}\ \right]$$

402. $c \subset E_3 : 2x - y = 2,\ x + z = 3,\ y \in \langle 0, 2\rangle;\quad A = [2, 2, 1]$

$$\left[\ c: \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 2 \\ z = -t + 3 \end{cases} \ \middle|\ \begin{matrix} t \in \langle 1, 2\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je nesouhlasná} \\ \text{s parametrizací} \end{matrix}\ \right]$$

403. $c \subset E_3 : 4x^2 + z^2 = 4,\ y + z = 0,\ y \le 0;\quad A = [-1, 0, 0]$

$$\left[\ c: \begin{cases} x = \cos t \\ y = -2\sin t \\ z = 2\sin t \end{cases} \ \middle|\ \begin{matrix} t \in \langle 0, \pi\rangle \\ \text{orientace } c \text{ je nesouhlasná} \\ \text{s parametrizací} \end{matrix}\ \right]$$

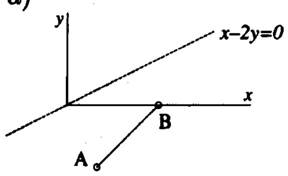
IV.2. Křivkový integrál skalární funkce (Křivkový integrál prvního druhu)

• Vyšetřete existenci křivkového integrálu $\int_c f\,ds$ a v kladném případě jej vypočítejte :

***Příklad* 404.** $\displaystyle\int_c \frac{1}{x - 2y}\,ds$, c je úsečka s krajními body A, B , kde
a) $A = [1, -2], B = [3, 0]$, b) $A = [1, -2], B = [3, 4]$.

Řešení: Integrovaná funkce je definovaná a spojitá v E_2 s výjimkou přímky $x - 2y = 0$. V okolí této přímky není funkce f omezená.

a)



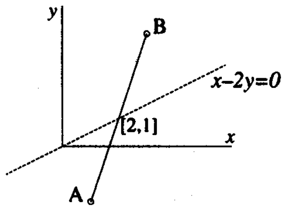
Integrál existuje, protože funkce $\dfrac{1}{x - 2y}$ je na úsečce AB spojitá.

$$\int_c \frac{1}{x - 2y}\,ds = \left[\ \begin{matrix} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 2t \\ t \in \langle 0, 1\rangle \end{matrix} \ \middle|\ \begin{matrix} ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \\ = \sqrt{4 + 4}\,dt = 2\sqrt{2}\,dt \end{matrix}\ \right] = \int_0^1 \frac{2\sqrt{2}\,dt}{1 + 2t - 2(-2 + 2t)} =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^1 \frac{1}{5 - 2t}\,dt = -\sqrt{2}\int_0^1 \frac{-2dt}{5 - 2t} = -\sqrt{2}\Big[\ln|5 - 2t|\Big]_0^1 = -\sqrt{2}\cdot(\ln 3 - \ln 5) =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\ln\frac{5}{3}.$$

b)



Integrál neexistuje, protože úsečka AB protíná přímku $x - 2y = 0$ v bodě $[2,1]$ a $\lim\limits_{[x,y]\to[2,1]} \dfrac{1}{x-2y}$ neexistuje.

■

***Příklad* 405.** $\displaystyle\int_c \frac{x+2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$, a) $c : x^2+y^2 = 4x$, b) $c : x^2+y^2 = 4$

Řešení: Integrovaná funkce je definovaná a spojitá v $E_2 - [0,0]$.

a) Bod $[0,0] \in c$ a $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \infty$, takže integrál neexistuje;

b) $[0,0] \notin c$, takže integrál existuje.

$$\int_c \frac{x+2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds = \left[\; c:\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \;\middle|\; \begin{array}{c} ds = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = 2\,dt \\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^1 \frac{2\cos t + 2}{2}\cdot 2\,dt = 2\Big[\sin t + t\Big]_0^{2\pi} = 4\pi.$$

■

***Příklad* 406.** $\displaystyle\int_c x^2\,ds$, $c : y = \ln x$, $x \in \langle 1, 3\rangle$

Řešení: Je zřejmé, že integrál existuje :

$$\int_c x^2\,ds = \left[\; \begin{array}{l} c:\; y = \ln x \\ \quad x \in \langle 1,3\rangle \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \\ = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx \end{array} \right] =$$

$$= \int_1^3 x^2\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \int_1^3 \sqrt{x^2+1}\cdot x\,dx = \left[\; \begin{array}{l} x^2+1 = t \\ 2x\,dx = dt \end{array} \;\middle|\; t \in \langle 2, 10\rangle \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^{10} \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2t^{3/2}}{3}\right]_2^{10} = \frac{1}{3}(10\sqrt{10} - 2\sqrt{2}).$$

■

***Příklad* 407.** $\displaystyle\int_c \frac{x^2}{y}\,ds$, $c : y^2 = 2x$, $y \in \langle\sqrt{2}, 2\rangle$

Řešení: Integrál existuje :

$$\int_c \frac{x^2}{y}\,ds = \left[\; c:\begin{cases} x = \frac{y^2}{2} \\ y \in \langle\sqrt{2}, 2\rangle \end{cases} \;\middle|\; \begin{array}{l} ds = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \\ = \sqrt{1+y^2}\,dy \end{array} \right] =$$

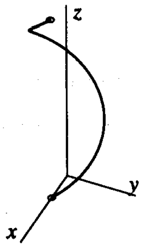
$$= \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{y^4}{4y}\cdot\sqrt{1+y^2}\,dy = \frac{1}{4}\int_{\sqrt{2}}^2 y^2\cdot\sqrt{1+y^2}\cdot y\,dy = \left[\; \begin{array}{l} \sqrt{1+y^2} = t \\ 1+y^2 = t^2 \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} 2y\,dy = 2t\,dt \\ t \in \langle\sqrt{3}, \sqrt{5}\rangle \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} (t^2-1)\cdot t\cdot t\,dt = \frac{1}{4}\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} = \frac{1}{30}\,(25\sqrt{5} - 6\sqrt{3}).$$

■

***Příklad* 408.** $\displaystyle\int_c (x^2+y^2+z^2)\,ds$, c je první závit *šroubovice* $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$.

Řešení:



Integrál existuje :

$$\int_c (x^2+y^2+z^2)\,ds =$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} ds=\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2+(\dot{z})^2}\,dt = & ds=\sqrt{a^2+b^2}\,dt \\ =\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt & t\in\langle 0,2\pi\rangle \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2t^2)\cdot\sqrt{a^2+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\,dt =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\left[a^2t+\frac{b^2t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(2\pi a^2+\frac{8}{3}\,b^2\pi^3\right). \quad \blacksquare$$

409. $\displaystyle\int_c \frac{1}{x^2+y^2}\,ds$, a) $c: x=t-3,\ y=3-t,\ t\in\langle 1,4\rangle$; [neexistuje]

b) $c: x^2+y^2=a^2$. $\left[\text{existuje}, \frac{2\pi}{a}\right]$

410. $\displaystyle\int_c \frac{1}{x^2-y}\,ds$, a) $c: y=2x,\ x\in\langle 1,3\rangle$; [neexistuje]

b) $c: y=9,\ x\in\langle 0,2\rangle$. $\left[\text{existuje}, -\frac{\ln 5}{6}\right]$

411. $\displaystyle\int_c xy\,ds$, $c: x^2+y^2=a^2,\ x\le 0,\ y\ge 0$ $\left[-\frac{a^3}{2}\right]$

412. $\displaystyle\int_c \sqrt{2y}\,ds$, $c: x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ t\in\langle 0,2\pi\rangle$ (oblouk cykloidy)

$\left[4\pi a\sqrt{a}\right]$

413. $\displaystyle\int_c \sqrt{x}\,ds$, $c: y=\sqrt{x},\ x\in\langle 1,2\rangle$ $\left[\frac{27-5\sqrt{5}}{12}\right]$

414. $\displaystyle\int_c z\,ds$, $c: x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t,\ t\in\langle 0,\pi\rangle$ (kuželová šroubovice)

$\left[\frac{1}{3}\left((2+\pi^2)\sqrt{2+\pi^2}-2\sqrt{2}\right)\right]$

415. $\displaystyle\int_c (x+y)\,ds$, $c: x^2+y^2+z^2=a^2,\ y=x,\ x\ge 0,\ y\ge 0, z\ge 0$ (Použijte parametrizaci z příkladu 392.) $\left[t\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle,\ a^2\sqrt{2}\right]$

416. $\displaystyle\int_c xyz\,ds$, $c: x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2=\frac{a^2}{4},\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$ (c leží v rovině $z=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, pak $x=\frac{a}{2}\cos t,\ y=\frac{a}{2}\sin t$.) $\left[\frac{a^4\sqrt{3}\pi}{32}\right]$

IV.3. Aplikace křivkového integrálu prvního druhu

• Vypočítejte délku ℓ křivky c, jestliže :

***Příklad* 417.** $c: y=2-\ln(\cos x),\quad x\in\langle 0,\frac{\pi}{4}\rangle$

Řešení: Délka ℓ se vypočítá podle vzorce $\ell = \int_c ds$. V daném případě $c : y = f(x)$ a

$$\ell = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx, \quad y' = \frac{\sin x}{\cos x}; \qquad \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}}$$

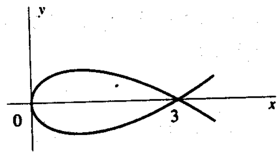
$$\ell = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x\, dx = dt \end{array} \right] = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{2}\left(\ln \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} - \ln 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})^2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \ln(3 + 2\sqrt{2}) . \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 418.** $c : x = t^2,\ y = t - \dfrac{t^3}{3},\quad t \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$

Řešení: Jde o délku smyčky, jelikož $x(-\sqrt{3}) = x(\sqrt{3}) = 3$ a $y(-\sqrt{3}) = y(\sqrt{3}) = 0$.



$$\ell = \int_c ds = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt =$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(2t)^2 + (1 - t^2)^2}\, dt =$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4}\, dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + 2t^2 + t^4}\, dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (1 + t^2)\, dt =$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} (1 + t^2)\, dt = 2\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = 2(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 4\sqrt{3}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 419.** $c : x = a\cos^3 t,\ y = a \sin^3 t,\quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

Řešení: Jde o asteroidu, skládající se ze čtyř stejně dlouhých oblouků. Proto

$$\ell = \int_c ds = 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a\cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2\, dt} =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt = 4 \int_0^{\pi/2} 3a \sin t \cos t\, dt = 12a \left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= 6a. \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\textbf{\textit{Příklad} 420}}$ c je část logaritmické spirály $r = ae^{k\varphi}$, ležící uvnitř kruhu o poloměru $r = a,\ k > 0,\ a > 0$.

Řešení: Křivka c je zadána v polárních souřadnicích $r = r(\varphi)$. V kartézských souřadnicích bude vyjádřena :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r(\varphi) \cos\varphi \\ y = r(\varphi) \sin\varphi \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = r' \cos\varphi - r \sin\varphi \\ \dot{y} = r' \sin\varphi + r\cos\varphi \end{array} \right. .$$

Potom $ds = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, d\varphi = \sqrt{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2}\, d\varphi =$

$= \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\varphi$, kde $r' = \dfrac{dr}{d\varphi}$.

Z podmínky $|ae^{k\varphi}| \le a$ plyne $\varphi \le 0$. Tedy

$$\ell = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{(ake^{k\varphi})^2 + (ae^{k\varphi})^2}\, d\varphi = \int_{-\infty}^{0} ae^{k\varphi}\sqrt{k^2+1}\, d\varphi = \lim_{\beta \to -\infty} a\sqrt{k^2+1} \int_{\beta}^{0} e^{k\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a\sqrt{k^2+1} \lim_{\beta \to -\infty} \left[\frac{e^{k\varphi}}{k}\right]_{\beta}^{0} = a\sqrt{k^2+1} \lim_{\beta \to -\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{e^{k\beta}}{k}\right) = \frac{a\sqrt{k^2+1}}{k}\,. \qquad ■$$

***Příklad* 421.** $c : x = \displaystyle\int_1^t \frac{\cos z}{z}\, dz,\ y = \int_1^t \frac{\sin z}{z}\, dz,\ t \in R$. Stanovte vzdálenost od počátku souřadnic do nejbližšího bodu, v němž je tečna rovnoběžná s osou y.

Řešení: Tečna je rovnoběžná s osou y, když $\dot{x} = 0 \longrightarrow \dot{x} = \dfrac{\cos t}{t} \longrightarrow t_2 = \dfrac{\pi}{2}, t_1 = 1$.

$$\dot{y} = \frac{\sin t}{t} \quad \longrightarrow \ell = \int_c ds = \int_1^{\pi/2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt = \int_1^{\pi/2} \frac{1}{t}\, dt = \Big[\ln|t|\Big]_1^{\pi/2} = \ln\frac{\pi}{2}. \qquad ■$$

• Vypočítejte obsahy daných částí válcových ploch omezených souřadnou rovinou (xy) a zadanými plochami :

***Příklad* 422.** $y^2 = 4x,\ \ z = 2\sqrt{x - x^2}$

Řešení: Parabolická válcová plocha rovnoběžná s osou z je shora omezená plochou $z = f(x,y) = 2\sqrt{x-x^2}$. Obecně $P = \displaystyle\int_c f(x,y)\, ds =$

$$\left[\begin{array}{c} c : y^2 = 4x, c = c_1 \cup c_2, \quad c_1 : y = 2\sqrt{x} \\ c_2 : y = -2\sqrt{x} \\ ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(\frac{\pm 1}{\sqrt{x}}\right)^2}\, dx = \sqrt{\frac{x+1}{x}}\, dx \\ z = 2\sqrt{x - x^2} \longrightarrow x(1-x) \ge 0 \longrightarrow x \in \langle 0, 1\rangle, \quad \int_{c_1} f\, ds = \int_{c_2} f\, ds \end{array}\right]$$

$$= 2\int_0^1 2\sqrt{x-x^2} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x}}\, dx = 4 \cdot \int_0^1 \sqrt{(1-x)(x+1)}\, dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array}\right] = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 2\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt = 2\Big[t + \frac{\sin 2t}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \pi\,. \qquad ■$$

***Příklad* 423.** $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4},\quad z = xy,\quad x \ge 0,\quad y \ge 0$

Řešení: $P = \displaystyle\int_c xy\, ds = \left[\ c : x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos\varphi \\ y = \frac{1}{2}\sin\varphi \end{cases} \ \middle| \ \begin{array}{c} ds = \frac{1}{2}\, d\varphi \\ \varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \frac{1}{2}\, d\varphi = \frac{1}{8}\Big[\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{16}\,. \qquad ■$$

• Vypočtěte hmotnost m křivky c při délkové hustotě $\varrho = \varrho(x,y)$, resp. $\varrho(x,y,z)$:

***Příklad* 424.** $c : x^2 + y^2 = a^2,\quad x \ge 0,\quad y \ge 0,\quad \varrho(x,y) = x$

Řešení: $m = \int_c \varrho\, ds = \int_c x\, ds = \left[c: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a \sin t \end{cases} \mid \begin{array}{c} ds = a\,dt \\ t \in \langle 0, \pi/2 \rangle \end{array} \right] =$

$$= \int_0^{\pi/2} a\cos t \cdot a\, dt = a^2 \cdot \Big[\sin t\Big]_0^{\pi/2} = a^2. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 425.** $c : x = at,\ y = \frac{a}{\sqrt{2}}\, t^2,\ z = \frac{a}{3}\, t^3,\ t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \varrho(x,y,z) = \sqrt{\frac{2y}{a}}$

Řešení: $m = \int_c \varrho\, ds = \int_c \sqrt{\frac{2y}{a}}\, ds =$

$$= \left[\begin{array}{lll} x = at & \longrightarrow \dot{x} = a & ds = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}\, dt = \\ y = \frac{a}{\sqrt{2}}\, t^2 & \longrightarrow \dot{y} = \sqrt{2} at \quad \mid & = a\sqrt{1 + 2t^2 + t^4}\, dt = \\ z = \frac{a}{3} t^3 & \longrightarrow \dot{z} = at^2 & = a(1 + t^2)\, dt \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{2at^2}{a\sqrt{2}}} \cdot a \cdot (1 + t^2)\, dt = \sqrt[4]{2} \cdot \int_0^1 at(1 + t^2)\, dt = a\sqrt[4]{2} \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3\sqrt[4]{2}}{4}\, a\,. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 426.** Křivka c je první závit šroubovice $x = a\cos t,\ y = a \sin t,\ z = at$ a hustota se rovná čtverci vzdálenosti od osy z.

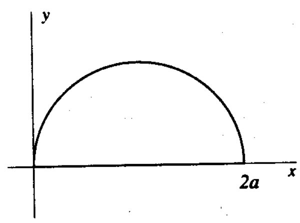
Řešení: $m = \int_c \varrho\, ds = \int_c (x^2 + y^2)\, ds = \left[\begin{array}{ll} x = a\cos t & t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ y = a \sin t \quad \mid & ds = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}\, dt \\ z = at & ds = a\sqrt{2}\, dt \end{array} \right] =$

$$= \int_0^{2\pi} a^2 \cdot a\sqrt{2}\, dt = a^3 \cdot 2\sqrt{2}\pi. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 427.** $c = c_1 \cup c_2; \quad c_1 : x^2 + y^2 = 2ax,\ y \geq 0; \quad c_2 : y = 0,\ x \in \langle 0, 2a \rangle,$
$a > 0, \quad \varrho(x,y) = x^2 + y^2$

Řešení:

$$m = \int_c \varrho\, ds = \int_{c_1} \varrho\, ds + \int_{c_2} \varrho\, ds =$$
$$= \int_{c_1} (x^2 + y^2)\, ds + \int_{c_2} (x^2 + y^2)\, ds =$$



$$= \left[\begin{array}{lll} c_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax = 0 \longrightarrow (x-a)^2 + y^2 = a^2 \longrightarrow \\ y \geq 0 \end{cases} & \begin{array}{l} x = a + a\cos t \\ y = a \sin t \quad \mid \end{array} & \begin{array}{l} ds = a\, dt \\ t \in \langle 0, \pi \rangle \end{array} \\ c_2 : y = 0 \longrightarrow ds = dx, x \in \langle 0, 2a \rangle & & \end{array} \right] =$$

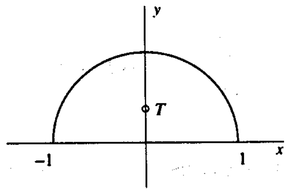
$$= \int_0^{\pi} \left(a^2 (1 + \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t \right) \cdot a\, dt + \int_0^{2a} x^2\, dx = a^3 \int_0^{\pi} (2 + 2\cos t)\, dt + \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2a} =$$

$$= 2a^3 \Big[t + \sin t \Big]_0^{\pi} + \frac{8a^3}{3} = 2a^3 \pi + \frac{8a^3}{3}\,. \qquad \blacksquare$$

- Určete těžiště T křivky c při hustotě $\varrho(x,y)$, resp. $\varrho(x,y,z)$:

***Příklad* 428.** $c: x^2+y^2=1, \quad y\geq 0, \quad \varrho(x,y)=a(1-y), \ a>0$

Řešení:



$T=[0,y_T]$, kde $y_T=\dfrac{M_x}{m}$.

(**Všimněte si, že hustota nezáleží na x čili hmotnost levé a pravé čtvrtkružnice je stejná.**)

$$\left[\ c:\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t\end{cases} \quad \Big| \quad \begin{matrix} ds=dt \\ t\in\langle 0,\pi\rangle\end{matrix}\ \right]$$

$$m=\int_c \varrho\, ds=\int_c a(1-y)\,ds=\int_0^\pi a(1-\sin t)\,dt=a\Big[t+\cos t\Big]_0^\pi=a(\pi-2)$$

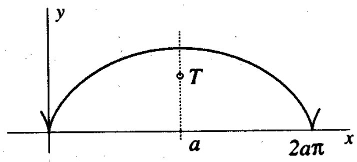
$$M_x=\int_c y\varrho\, ds=a\int_0^\pi(1-\sin t)\sin t\,dt=a\int_0^\pi\left(\sin t-\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt=$$

$$=a\left[-\cos t-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^\pi=a\,(2-\frac{\pi}{2})$$

$$y_T=\frac{a\,(2-\frac{\pi}{2})}{a\,(\pi-2)}=\frac{4-\pi}{2\,(\pi-2)}\ . \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 429.** $c: x=a\,(t-\sin t),\ y=a\,(1-\cos t),\ a>0,\quad t\in\langle 0,2\pi\rangle\ ,\quad \varrho=1$

Řešení:



c je první oblouk cykloidy, $\quad T=[\pi a, y_T]$,

$y_T=\dfrac{M_x}{m}; \qquad m=\ell=\displaystyle\int_c ds$

$$\left[\ \begin{matrix} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \\ t\in\langle 0,2\pi\rangle\end{matrix}\ \Big| \ \begin{matrix}\dot x=a(1-\cos t)\\ \dot y=a\sin t\end{matrix}\ \Big| \ \begin{matrix} ds=\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\,dt=a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt \\ ds=a\sqrt{2-2\cos t}\,dt=a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt\end{matrix}\ \right]$$

$$m=a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\,dt=2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=8a;$$

$$M_x=\int_c y\,ds=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt=a^2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{3/2}\,dt=$$

$$=a^2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}2\sqrt{2}\cdot\sin^3\frac{t}{2}\,dt=4a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,dt=\left[\begin{matrix}\cos\frac{t}{2}=z\\ -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt=dz\end{matrix}\right]=$$

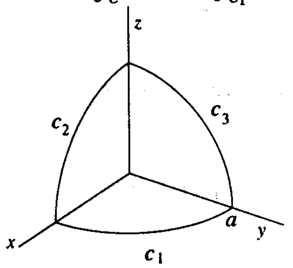
$$=-4a^2\cdot 2\cdot\int_1^{-1}(1-z^2)\,dz=8a^2\int_{-1}^1(1-z^2)\,dz=16a^2\left[z-\frac{z^3}{3}\right]_0^1=16\,a^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{32a^2}{3};$$

$$y_T=\frac{32a^2}{3\cdot 8a}=\frac{4}{3}\,a,\quad T=\left[\pi a,\frac{4}{3}\,a\right]. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 430.** $c=c_1\cup c_2\cup c_3,\quad c_1: x^2+y^2=a^2,\ z=0, x\geq 0,\ y\geq 0,\quad c_2: x^2+z^2=a^2,$ $y=0,\ x\geq 0,\ z\geq 0,\quad c_3: y^2+z^2=a^2,\ x=0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ a>0,\quad \varrho=1$

Řešení: Křivka c je je symetrická vzhledem k osám x,y,z tedy $x_T=y_T=z_T$. Omezíme se na $x_T=\dfrac{M_{yz}}{m}$. $\quad M=\ell=3\cdot\dfrac{1}{4}\cdot 2\pi=\dfrac{3}{2}\pi\,a,$

$$M_{yz} = \int_c x\,ds = \int_{c1} x\,ds + \int_{c2} x\,ds + \int_{c3} x\,ds =$$



$$\left[\begin{array}{llll} c_1: & x = a\cos t, & z = 0, & ds = a\,dt \\ & y = a\sin t & & t \in \langle 0, \pi/2\rangle \\ c_2: & x = a\cos t, & y = 0, & ds = a\,dt \\ & z = a\sin t & & t \in \langle 0, \pi/2\rangle \\ c_3: & y = a\cos t, & x = 0, & ds = a\,dt \\ & z = a\sin t & & t \in \langle 0, \pi/2\rangle \end{array}\right]$$

$$= \int_0^{\pi/2} a^2\cos t\,dt + \int_0^{\pi/2} a^2\cos t\,dt + \int_0^{\pi/2} 0\,dt = 2a^2\Big[\sin t\Big]_0^{\pi/2} = 2a^2$$

$$x_T = y_T = z_T = \frac{2a^2}{\frac{3}{2}\pi a} = \frac{4a}{3\pi}.$$ ■

***Příklad* 431.** Určete moment setrvačnosti vzhledem k souřadnicové rovině (yz) prostorové křivky $c: x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, je-li $\varrho = x^2 + y^2$.

Řešení:

$$I_{yz} = \int_c \varrho\cdot x^2\,ds = \int_c (x^2+y^2)x^2\,ds = \left[\begin{array}{l} ds = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt = \\ \quad = \sqrt{a^2+b^2}\,dt \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2\cdot a^2\cos^2 t\cdot\sqrt{a^2+b^2}\,dt = a^4\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{a^4\sqrt{a^2+b^2}}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = a^4\sqrt{a^2+b^2}\,\pi\ .$$ ■

***Příklad* 432.** Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose z křivky $c \subset E_3$: $2x^2 + y^2 = 2,\ x + z = 1$, je-li $\varrho = z$.

Řešení: c je řez eliptické válcové plochy rovinou $x + z = 1$.

$$I_z = \int_c (x^2+y^2)\varrho\,ds = \int_c (x^2+y^2)z\,ds =$$

$$= \left[\begin{array}{lllll} c: & \begin{cases} x = \cos t & \longrightarrow\ \dot{x} = -\sin t \\ y = \sqrt{2}\sin t & \longrightarrow\ \dot{y} = \sqrt{2}\cos t \\ z = 1-\cos t & \longrightarrow\ \dot{z} = \sin t \end{cases} & \begin{array}{l} ds = \sqrt{\sin^2 t + 2\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = \sqrt{2}\,dt \\ \\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle \end{array} \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + 2\sin^2 t)(1-\cos t)\cdot\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1+\sin^2 t)(1-\cos t)\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(1 + \frac{1-\cos 2t}{2} - \cos t - \sin^2 t\cos t\right)dt = \sqrt{2}\left[t + \frac{1}{2}t - \frac{\sin 2t}{4} - \sin t - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\pi = 3\sqrt{2}\,\pi\ .$$ ■

• Určete délku ℓ křivky c :

433. $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x}, \quad x \in \langle 0, 5\rangle$ $\left[\frac{19}{3}\right]$

434. $x = 3t,\ y = 3t^2,\ z = 2t^3, \quad t \in \langle 0, 1\rangle$ [5]

435. $r(\varphi) = a(1 + \cos\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, \pi\rangle$, $a > 0$ (horní polovina kardioidy) $[4a]$

436. $r(\varphi) = \sin^3 \dfrac{\varphi}{3}$, $\varphi \in \langle 0, 3\pi\rangle$ $\left[\frac{3}{2}\pi\right]$

437. $y = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\, dx$ $\left[4\text{; použijte } \cos x \geq 0 \longrightarrow x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle\right]$

• Určete plošný obsah P válcové plochy omezené rovinou $z = 0$ a plochami :

438. $y^2 = x$, $9x - 4 = 0$, $z = 2y$, $y \geq 0$ $\left[\frac{85}{81}\right]$

439. $x^2 + y^2 = a^2$, $z = x$, $x \geq 0, y \geq 0$ $[a^2]$

440. $x^2 + y^2 = a^2$, $z = x^2 + y^2$ [$2\pi a^3$; lze vypočítat i bez použití integrálu]

441. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose souměrnosti homogenní půlkružnice o poloměru a. $\left[\frac{a^3\pi}{2}\right]$

442. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose x části asteriody ležící v prvním kvadrantu (tj. křivky $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in \langle 0, \pi/2\rangle$), při hustotě $\varrho = 1$. $\left[\frac{3a^3}{8}\right]$

• Určete těžiště T křivky c při délkové hustotě $\varrho(x, y, z)$:

443. $\varrho = \dfrac{z^2}{x^2 + y^2}$, kde $c : x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = at,\ a > 0,\quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle$
$\left[m = \frac{8\sqrt{2}a\pi^3}{3},\ M_{xy} = 4\sqrt{2}a^2\pi^4,\ T = \left[0, 0, \frac{3}{2}a\pi\right]\right]$

444. $\varrho = 1$, $c = c_1 \cup c_2$, $c \subset E_2$; $c_1 : y = 6\sqrt{x}$, $x \in \langle 1, 6\rangle$; $c_2 : y = -6\sqrt{x}$, $x \in \langle 1, 6\rangle$
$\left[m = 10,\ M_y = 35,\ T = \left[\frac{7}{2}, 0\right]\right]$

• Určete hmotnost m křivky c při délkové hustotě $\varrho(x, y)$:

445. $\varrho = x(y^2 + z^2)$, $c \subset E_3 : y^2 + 2z^2 = 4,\ x = z,\ x \geq 0$ $\left[\frac{32\sqrt{2}}{3}\right]$

446. $\varrho = x(y + 2)$, $c \subset E_2 : x^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0$ $[16]$

447. $\varrho = x^{4/3} + y^{4/3}$, $c \subset E_2 : x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in \langle 0, \pi/2\rangle$ $\left[a^{\frac{7}{3}}\right]$

448. $\varrho = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$, $c \subset E_2 : x^2 + y^2 = a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ $\left[e^a \cdot a \cdot \frac{\pi}{2}\right]$

IV.4. Křivkový integrál vektorové funkce (Křivkový integrál druhého druhu)

• Vypočítejte dané křivkové integrály po orientované křivce c s počátečním bodem A :

***Příklad* 449.** $\displaystyle\int_c x\, dx - y^2\, dy$, c je úsečka spojující body $A = [1, -2]$, $B = [3, 2]$.

Řešení: $\left[\ c:\begin{cases} x=1+2t, \\ y=-2+4t, \end{cases} \quad \Big| \quad t\in\langle 0,1\rangle \quad \Big| \quad \begin{matrix} dx=2\,dt \\ dy=4\,dt \end{matrix}\ \right]$

$$\int_c x\,dx-y^2\,dy=\int_0^1\Big((1+2t)2-(4t-2)^2\cdot 4\Big)\,dt=2\int_0^1\Big(1+2t-2(16t^2-16t+4)\Big)\,dt=$$
$$=2\int_0^1(-7+34t-32t^2)\,dt=2\Big[-7t+17t^2-\frac{32}{3}t^3\Big]_0^1=-\frac{4}{3}\,. \qquad \blacksquare$$

Příklad 450. $\displaystyle\int_c (x^2-y^2)\,dx, \quad c: y=x^3$ z bodu $A=[0,0]$ do bodu $B=[3,27]$.

Řešení: $\displaystyle\int_c (x^2-y^2)\,dx=\int_0^3(x^2-x^6)\,dx=\Big[\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7}\Big]_0^3=-\frac{2124}{7}\,.$ $\blacksquare$

Příklad 451. $\displaystyle\int_c -x\cos y\,dx+y\sin x\,dy$, c je úsečka z bodu $A=[0,0]$ do bodu $B=[\pi,2\pi]$.

Řešení: $c: y=2x, dy=2dx, x\in\langle 0,\pi\rangle$, orientace křivky je souhlasná s parametrizací ;

$$I=\int_0^\pi(-x\cos 2x+4x\sin x)\,dx=\int_0^\pi x(4\sin x-\cos 2x)\,dx=$$
$$=\left|\begin{matrix} u=x, & v'=4\sin x-\cos 2x \\ u'=1, & v=-4\cos x-\dfrac{\sin 2x}{2}\end{matrix}\right|=-\Big[4x\cos x+\frac{x}{2}\sin 2x\Big]_0^\pi+\int_0^\pi\Big(4\cos x+\frac{\sin 2x}{2}\Big)\,dx=$$
$$=4\pi+\Big[4\sin x-\frac{\cos 2x}{4}\Big]_0^\pi=4\pi\,. \qquad \blacksquare$$

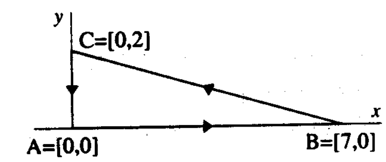
Příklad 452. $\displaystyle\int_c(-y,x)\cdot\vec{ds}, \quad c:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0, \quad A=[a,0]\,.$

Řešení: $\displaystyle\int_c -y\,dx+x\,dy=\left[\begin{matrix} c: x=a\cos t \\ y=b\sin t \\ t\in\langle 0,\pi/2\rangle\end{matrix}\quad\Big|\quad\begin{matrix} dx=-a\sin t\,dt \\ dy=b\cos t\,dt \\ \text{orientace křivky je souhlasná s parametrizací}\end{matrix}\right]=$

$$=\int_0^{\pi/2}(b\sin t\cdot a\sin t+a\cos t\cdot b\cos t)\,dt=ab\int_0^{\pi/2}dt=\frac{ab\pi}{2}\,. \qquad \blacksquare$$

Příklad 453. $\displaystyle\int_c x\,dy$, c je obvod trojúhelníka vytvořeného přímkami $x=0,\ y=0$ a $2x+7y=14$ při kladné orientaci .

Řešení:



$$c=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$$
$$\int_c=\int_{\overrightarrow{AB}}+\int_{\overrightarrow{BC}}+\int_{\overrightarrow{CA}}$$

$AB: y=0, dy=0, \quad x\in\langle 0,7\rangle$, orientace křivky je souhlasná s parametrizací,
$BC: x=\dfrac{14-7y}{2}, \quad y\in\langle 0,2\rangle$, orientace křivky je souhlasná s parametrizací,
$AC: x=0, dx=0, \quad y\in\langle 0,2\rangle$, orientace křivky je nesouhlasná s parametrizací ;

$$\int_c x\,dy=0+\int_0^2\frac{14-7y}{2}\,dy+0=\frac{1}{2}\Big[14y-\frac{7y^2}{2}\Big]_0^2=7. \qquad \blacksquare$$

466. $\vec{f} = \dfrac{(y^2, -x^2)}{x^2+y^2}$, $c: x^2+y^2=a^2$, $a>0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ z bodu $[a,0]$ do bodu $[-a,0]$. $\left[-\frac{4}{3}a\right]$

467. $\vec{f} = (y, 2)$, c je uzavřená křivka tvořená poloosami a čtvrtinou elipsy $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, nacházející se v prvním kvadrantu. Orientace je záporná. $[2\pi]$

468. $\vec{f} = (x+y, 2x)$, $c: x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, orientace je kladná. $[\pi a^2]$

469. $\vec{f} = (y, z, x)$, c je úsečka s počátečním bodem $[a,0,0]$ a koncovým bodem $[a,a,a]$. $\left[\frac{3}{2}a^2\right]$

470. $\vec{f} = (y, z, x)$, c je průsečnice ploch $z = xy$, $x^2+y^2=1$ z bodu $[1,0,0]$ do bodu $[0,1,0]$. $\left[\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}\right]$

471. $\vec{f} = (yz, z\sqrt{R^2-y^2}, xy)$, $c: x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = \dfrac{at}{2\pi}$, $a > 0$, $R > 0$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, orientace křivky je souhlasná s parametrizací. $[0]$

472. $\vec{f} = (x, y, xz - y)$, $c: x = t^2$, $y = 2t$, $z = 4t^3$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, orientace křivky je souhlasná s parametrizací. $\left[\frac{5}{2}\right]$

473. $\vec{f} = (x, y, z)$, c je čtvrtina elipsy $x^2+y^2=4$, $x+z=2$ z bodu $[2,0,0]$ do bodu $[0,2,2]$. $[2]$

474. $\vec{f} = (y^2, z^2, x^2)$, $c: x = 5$, $y = 2 + 4\sin t$, $z = -3 + 4\cos t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, orientace křivky je souhlasná s parametrizací. $[96\pi]$

IV.6. Potenciální vektorové pole

Vektorové pole $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ je **potenciální** *v oblasti $G \subset E_3$, jestliže existuje skalární funkce ψ v G taková, že $\vec{f} = \operatorname{grad}\psi$ v oblasti G. Skalární funkci $\psi(x,y,z)$ nazýváme* **potenciálem** *vektorového pole $\vec{f}$.*

Nechť $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ je diferencovatelné vektorové pole v oblasti $G \subset E_3$. Potom vektorovou funkci

$$\operatorname{rot}\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

nazýváme **rotací** *vektorového pole $\vec{f}$.*

Platí věty :

Vektorové pole $\vec{f}$ je potenciální v G právě když $\int_c \vec{f} \cdot \vec{ds}$ nezávisí na cestě v oblasti G. Je-li křivka c v G s počátečním bodem M a koncovým N, pak platí

$$\int_c \vec{f} \cdot \vec{ds} = \int_M^N \operatorname{grad}\psi \cdot \vec{ds} = \psi(N) - \psi(M).$$

Speciálně $\oint_c \operatorname{grad}\psi \cdot \vec{ds} = 0$, *kde c je uzavřená křivka v G.*

Nechť vektorová funkce $\vec{f}$ má spojité parciální derivace v hvězdovité oblasti $G \subset E_3$ a nechť rot $\vec{f} = \vec{0}$ v G. *Potom vektorové pole $\vec{f}$ je potenciální v G.*

• Budiž dáno vektorové pole $\vec{f}$: a) ověřte, že $\vec{f}$ je potenciální v G, b) stanovte jeho potenciál, c) vypočtěte $\int_A^B \vec{f} \cdot \overrightarrow{ds}$, jestliže :

***Příklad* 475.** $\vec{f} = (3x^2y - 3y^2, x^3 - 6xy)$, $A = [1,3], B = [2,1]$, $G = E_2$

Řešení: a) Jelikož funkce f_1 a f_2 jsou spojité a diferencovatelné v celém E_2 je G jednoduše souvislá oblast v E_2, (hvězdovitá v E_3), pak k ověření, že $\vec{f}$ je potenciální v $G \subset E_2$ stačí zjistit, zda $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$,

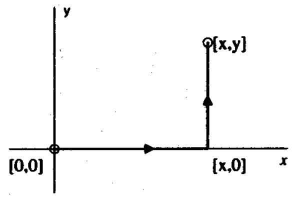
$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 3x^2 - 6y, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 3x^2 - 6y. \quad \text{Ano, } \vec{f} \text{ je potenciální v } E_2,$$

b) $\vec{f} = grad\,\psi = \left(\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x}, \dfrac{\partial \psi_2}{\partial y}\right)$

$$\int_{[x_0,y_0]}^{[x,y]} \vec{f} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{[x_0,y_0]}^{[x,y]} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \psi_2}{\partial y}\,dy = \int_{[x_0,y_0]}^{[x,y]} d\psi = \psi(x,y) - \psi(x_0,y_0)\ .$$

Zvolíme $(x_0, y_0) = (0,0)$: $\psi(x,y) = \displaystyle\int_{[0,0]}^{[x,y]} (3x^2y - 3y^2)\,dx + (x^3 - 6xy)\,dy =$

$\Big($ víme, že integrál nezávisí na cestě, proto zvolíme lomenou čáru $[0,0] \longrightarrow [x,0] \longrightarrow [x,y]\Big)$:



$$\left[\begin{array}{ll} [0,0] \longrightarrow [x,0] & : y = 0, dy = 0 \\ [x,0] \longrightarrow [x,y] & : x = \text{konst.}, dx = 0 \end{array}\right]$$

$$= \int_{0,0]}^{[x,0]} + \int_{[x,0]}^{[x,y]} = \int_0^x 0\,dx + \int_0^y (x^3 - 6xy)\,dy = x^3y - 3xy^2 \quad \longrightarrow$$

$$\psi(x,y) = x^3y - 3xy^2 + C,$$

c) $\displaystyle\int_{[1,3]}^{[2,1]} \vec{f} \cdot \overrightarrow{ds} = \psi(2,1) - \psi(1,3) = (8-6) - (3-27) = 26.$ ■

***Příklad* 476.** $\vec{f} = (2x\cos y, -x^2 \sin y)$, $A = [2,0]$, $B = [4, \pi/2]$, $G = E_2$

Řešení: a) Oblast G je opět jednoduše souvislá oblast a platí

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -2x\sin y, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -2x\sin y \quad \longrightarrow \quad \vec{f} \text{ je potenciální v } E_2\ .$$

b) $\psi(x,y) = \displaystyle\int_{[0,0]}^{[x,y]} 2x\cos y\,dx - x^2\sin y\,dy = \int_{[0,0]}^{[x,0]} + \int_{[x,0]}^{[x,y]} =$

$$= \left[\begin{array}{l} [0,0] \longrightarrow [x,0] : y = 0, dy = 0 \\ [x,0] \longrightarrow [x,y] : x = \text{konst.}, dx = 0 \end{array}\right] = \int_0^x 2x\,dx - \int_0^y x^2 \sin y\,dy = x^2 + x^2\Big[\cos y\Big]_0^y =$$

$$= x^2 + x^2\cos y - x^2 \quad \longrightarrow \quad \psi(x,y) = x^2\cos y + C.$$

c) $\displaystyle\int_{[2,0]}^{[4,\pi/2]} \vec{f}\cdot\overrightarrow{ds} = \psi(4,\pi/2) - \psi(2,0) = 16\cos\frac{\pi}{2} - 4\cos 0 = -4\,.$ ■

***Příklad* 477.** $\vec{f} = (3x^2y - z^2 + 2z, x^3 + 2yz - 3, y^2 - 2xz + 2x + 5)$, $A = [0,1,1]$, $B = [3,0,2]$, $G = E_3$

Řešení: a) Oblast G je hvězdovitá v E_3,

$$\operatorname{rot}\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y - z^2 + 2z & x^3 + 2yz - 3 & y^2 - 2xz + 2x + 5 \end{vmatrix} =$$

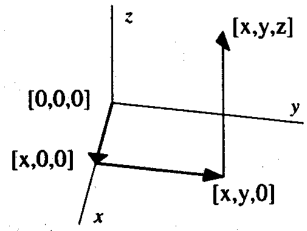
$$= (2y - 2y, -2z + 2 + 2z - 2, 3x^2 - 3x^2) = \vec{0} \quad\longrightarrow\quad \vec{f} \text{ je potenciální v } E_3\,.$$

b) $\psi(x,y,z) =$

$$= \int_{[0,0,0]}^{[x,y,z]} (3x^2y - z^2 + 2z)\,dx + (x^3 + 2yz - 3)\,dy + +(y^2 - 2xz + 2x + 5)\,dz =$$

$$= \int_{[0,0,0]}^{[x,0,0]} + \int_{[x,0,0]}^{[x,y,0]} + \int_{[x,y,0]}^{[x,y,z]} =$$

$$\left[\begin{array}{l} [0,0,0] \longrightarrow [x,0,0] : y = 0, dy = 0, z = 0, dz = 0 \\ [x,0,0] \longrightarrow [x,y,0] : dx = 0, z = 0, dz = 0 \\ [x,y,0] \longrightarrow [x,y,z] : dx = 0, dy = 0 \end{array}\right]$$



$$= \int_0^x 0\,dx + \int_0^y (x^3 - 3)\,dy + \int_0^z (y^2 - 2xz + 2x + 5)\,dz =$$

$$= x^3y - 3y + y^2z - xz^2 + 2xz + 5z + C\,,$$

c) $\displaystyle\int_{[0,1,1]}^{[3,0,2]} \vec{f}\cdot\overrightarrow{ds} = \psi(3,0,2) - \psi(0,1,1) = 7\,.$ ■

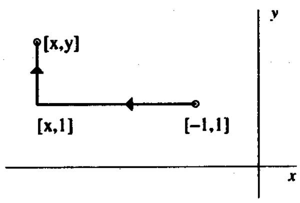
***Příklad* 478.** Určete oblasti $G \subset E_2$, v nichž je pole $\vec{f} = \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} + 2y - 5\right)\vec{i} + {}$ $+\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} + 2x + 11\right)\vec{j}$ potenciální a stanovte jeho potenciál $\psi(x,y)$, splňující podmínku $\psi(-2,2) = 0$.

Řešení: $G_1 = \{[x,y] \in E_2;\ x > 0,\ y > 0\}$, $G_2 = \{[x,y] \in E_2;\ x < 0,\ y > 0\}$, $G_3 = \{[x,y] \in E_2;\ x > 0,\ y < 0\}$, $G_4 = \{[x,y] \in E_2;\ x < 0,\ y < 0\}$.

Platí $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x} = -\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2} + 2$, tedy je $\vec{f}$ potenciální v $G_i, i = 1,2,3,4$.

Dále je $\displaystyle\psi(x,y) = \int_{[-1,1]}^{[x,y]} \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} + 2y - 5\right)dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} + 2x + 11\right)dy =$

Vybíráme cestu od $[-1,1]$ do $[x,y]$ v G_2 , protože daný bod $[-2,2]$ leží v G_2 .



$$= \left[\begin{array}{lll} [-1,1] \longrightarrow [x,1] : & y = 1, dy = 0 \\ [x,1] \longrightarrow [x,y] & : & x = \text{konst.}, dx = 0 \end{array}\right] =$$

$$= \int_{-1}^{x}\left(1-\frac{1}{x^2}-3\right)dx+\int_{1}^{y}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}+2x+11\right)dy=\left[-2x+\frac{1}{x}\right]_{-1}^{x}+\left[\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+2xy+\right.$$

$$\left.+11y\right]_1^y=-2x+\frac{1}{x}-2+1+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+2xy+11y-\frac{1}{x}-x-2x-11=$$

$$=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2xy-5x+11y+C;$$

$$\psi(-2,2)=0: \quad -1+1-8+10+22+C=0 \quad \longrightarrow \quad C=-22$$

$$\psi(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2xy-5x+11y-22 \quad \text{pro} \quad [x,y]\in G_2.$$

■

***Příklad* 479.** Určete oblast $G \subset E_2$, v níž je vektorová funkce $\vec{f}=\left(\frac{y^2}{\sqrt{x}}, 4y\sqrt{x}\right)$ spojitá a rozhodněte, zda $\int_c \vec{f}\cdot\overrightarrow{ds}$ nezávisí na cestě v G. V kladném případě vypočtěte $\int_{[-1,2]}^{[4,-2]} \vec{f}\cdot\overrightarrow{ds}$.

Řešení: $G=\{[x,y]\in E_2, x>0\}$.

$\int_c \vec{f}\cdot\overrightarrow{ds}$ nezávisí na cestě, protože $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}=\dfrac{\partial f_2}{\partial x}=\dfrac{2y}{\sqrt{x}}$.

$$\int_{[1,2]}^{[4,-2]} \vec{f}\cdot\overrightarrow{ds}=\int_{[1,2]}^{[4,-2]}\frac{y^2}{\sqrt{x}}\,dx+4y\sqrt{x}\,dy=\int_{[1,2]}^{[4,2]}+\int_{[4,2]}^{[4,-2]}=$$

$$=\left[\begin{array}{lll}[1,2]\longrightarrow[4,2]: & y=2,\ dy=0,\ x\in\langle 1,4\rangle & \text{orientace úsečky je souhlasná s parametrizací}\\ [4,2]\longrightarrow[4,-2]: & x=4,\ dx=0,\ y\in\langle -2,2\rangle, & \text{orientace úsečky je nesouhlasná s parametrizací}\end{array}\right]=$$

$$=\int_1^4\frac{4}{\sqrt{x}}\,dx+\int_2^{-2}4y\cdot 2\,dy=\left[8\sqrt{x}\right]_1^4+\left[4y^2\right]_2^{-2}=8$$

■

***Příklad* 480.** Je dána funkce $\psi(x,y)=x^3y+x^2y^2$. Určete a) silové pole $\vec{f}$, jehož potenciálem je funkce $\psi(x,y)$; b) práci síly $\vec{f}$ při pohybu z bodu $M=[1,1]$ do bodu $N=[-2,3]$; c) práci síly $\vec{f}$ podél křivky $c: x^2+4y^2=4$.

Řešení: a) $\vec{f}=\operatorname{grad}\psi \longrightarrow \vec{f}=(3x^2y+2xy^2, x^3+2x^2y)$;

b) $A=\int_M^N \vec{f}\cdot\overrightarrow{ds}=(\text{integrál nezávisí na cestě})=\psi(M)-\psi(N)=$

$$=(-24+36)-(1+1)=10;$$

c) $A=\oint_c \vec{f}\cdot\overrightarrow{ds}=0.$

■

***Příklad* 481.** Vypočtěte $\int_M^N \vec{f}\cdot\overrightarrow{ds}$, kde $M=[1,0,e]$, $N=[2,-1,e^2]$, víte-li, že pole $\vec{f}$ je potenciální v oblasti $G\subset E_3$, jehož potenciál je funkce $\psi(x,y,z)=xy^2\ln z$. Určete též oblast G.

Řešení: $G=\{[x,y,z]\in E_3; z>0\}$; $\int_M^N \vec{f}\cdot\overrightarrow{ds}=\psi(M)-\psi(N)=2\ln e^2-0=4.$

■

• Nechť je dáno vektorové pole $\vec{f}$. Ověřte, že je pole potenciální v E_2, resp. E_3, stanovte jeho potenciál a vypočtěte $\displaystyle\int_A^B \vec{f}\cdot\vec{ds}$:

482. $\vec{f}=(xe^{2y},(x^2+1)e^{2y}),\ A=[1,0],\ B=[3,1]$ $[\psi=\frac{1}{2}(x^2+1)e^{2y}+C;\ 5e^2-1]$

483. $\vec{f}=(3x^2y-2xy^2,x^3-2x^2y),\ A=[1,1],\ B=[2,-1]$ $[\psi=x^3y-x^2y^2+C;\ -12]$

484. $\vec{f}=(\cos 2y+y+x,y-2x\sin 2y+x),\ A=[0,7],\ B=[1,0]$
$[\psi=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+x\cos 2y+xy+C;\ -23]$

485. $\vec{f}=(x^2-2yz,y^2-2xz,z^2-2xy),\ A=[0,0,3],\ B=[3,3,0]$
$[\psi=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C;\ 9]$

486. $\vec{f}=(2y+z^2,2x+1,2xz+2),\ A=[0,1,1],B=[3,0,2]$
$[\psi=2xy+y+xz^2+2z+C;\ 13]$

487. $\vec{f}=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2+1},\dfrac{y}{x^2+y^2+1},2z\right),\ A=[1,0,0],\ B=[0,1,1]$
$[\psi=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+1)+z^2+C;\ 1]$

488. Ověřte, že pole $\vec{f}=(y^2,2xy)$ je potenciální v E_2. Stanovte potenciál $\psi(x,y)$, splňující $\psi(-4,3)=-9$. $[\psi=xy^2+27]$

489. Stanovte potenciál pole $\vec{f}=(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z},\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},2z-\frac{xy}{z^2})$ na $G\subset E_3: y>0,\ z>0$.
$[\psi=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+z^2+C]$

490. Najděte práci silového pole $\vec{f}$, jehož potenciál je funkce $\psi(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ při pohybu a) z bodu $M=[1,\sqrt{3}]$ do bodu $N=[\sqrt{2},\sqrt{2}]$; b) podél křivky $(x-2)^2+y^2=1$ v kladném směru. $\left[a)\ -\frac{\pi}{12},\ b)\ 0\right]$

• Vypočtěte :

491. $\displaystyle\int_{[2,1]}^{[1,2]}\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2}$ $\left[-\frac{3}{2},\ \text{integrál nezávisí na cestě}\right]$

492. $\displaystyle\int_{[\pi/4,2]}^{[\pi/6,1]}2y\sin 2x\,dx+(1-\cos 2x)\,dy$ $\left[-\frac{3}{2}\right]$

493. $\displaystyle\oint_c(2x+y)\,dx+(x+2y)\,dy,\quad c: x^2+y^2=a^2$ $[0]$

• Určete oblasti G, v nichž je vektorové pole $\vec{f}$ potenciální a stanovte potenciál :

494. $\vec{f}=(x^3y^2+x,y^2+yx^4)$ $[G=\emptyset,\ \vec{f}\ \text{není potenciální}]$

495. $\vec{f}=\left(\ln y-\dfrac{e^y}{x^2},\dfrac{e^y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)$ $\left[\begin{array}{c}G_1\subset E_2: y>0, x>0\\ G_2\subset E_2: y>0, x<0\\ \psi=\frac{e^y}{x}+x\ln y+C\end{array}\right]$

496. $\vec{f} = \left(\frac{z}{x-y}, \frac{z}{y-x}, \ln(x-y) + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)$ $\left[\begin{array}{c} G \subset E_3 : x > y,\ z > 0 \\ \psi = z\ln(x-y) + 2\sqrt{z} + C \end{array}\right]$

IV.7. Greenova věta

Nechť : 1) *vektorová funkce* $\vec{f} = (f_1, f_2)$ *má spojité parciální derivace v oblasti* $G \subset E_2$,
2) *křivka* $c \subset G$ *je jednoduchá uzavřená kladně orientovaná po částech hladká,*
3) $int\, c \subset G$. *Potom*

$$\oint_c \vec{f} \cdot \vec{ds} = \oint_c f_1\, dx + f_2\, dy = \iint_{int\, c} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Důsledek : $\quad P = \iint_{int\, c} dx\, dy = \frac{1}{2} \oint_c -y\, dx + x\, dy,$

kde P *je plošný obsah rovinného obrazce omezeného uzavřenou křivkou* c.

***Příklad* 497.** Pomocí Greenovy věty spočtěte cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (2x + 3y, 5x - y - 4)$ po obvodu $\triangle ABC$ ve směru $A \longrightarrow B \longrightarrow C$, kde $A = [1,0], B = [1,-3], C = [-3,0]$.

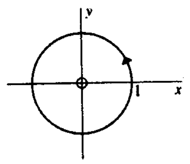
Řešení: Cirkulace $\Gamma = \oint_c \vec{f} \cdot \vec{ds} = \oint_c (2x + 3y)\, dx + (5x - y - 4)\, dy \overset{\text{Gr.v.}}{=\!=}$

$$= -\iint_{int\, c} (5-3)\, dx\, dy = -2 \iint_{\triangle ABC} dx\, dy = -2 \cdot P_\triangle = -2\, \frac{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}{2} = -12$$

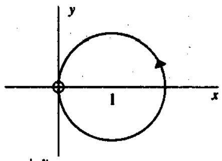
(orientace křivky c je záporná, proto před dvojným integrálem je znaménko minus) . ■

***Příklad* 498.** Vyšetřete existenci integrálu $\oint_c \left(\ln(x^2 + y^2), -2\mathrm{arctg}\, \frac{y}{x}\right) \cdot \vec{ds}$ a rozhodněte o možnosti užití Greenovy věty k jeho výpočtu, jestliže $c \subset E_2$ je kladně orientovaná křivka a) $x^2 + y^2 = 1$, b) $(x-1)^2 + y^2 = 1$, c) $(x-2)^2 + y^2 = 1$, d) c je obvod čtverce s vrcholy $A = [1,0]$, $B = [0,1], C = [-1,0], D = [0,-1]$. V kladném případě vypočtěte integrál pomocí Greenovy věty.

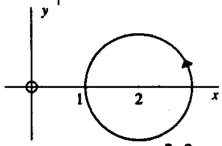
Řešení: Integrál $\oint_c (\ln(x^2 + y^2), -2\mathrm{arctg}\, \frac{y}{x}) \cdot \vec{ds}$ existuje v $E_2 - [0,0]$, protože funkce $\ln(x^2 + y^2)$ je definována jen pro $x^2 + y^2 > 0$ a $\lim_{[x,y] \to [0,0]} \ln(x^2 + y^2) = -\infty$;
funkce $\mathrm{arctg}\, \frac{y}{x}$ není definována pro $x = 0$, ale je omezená $\left(\left|\mathrm{arctg}\, \frac{y}{x}\right| < \frac{\pi}{2}\right)$.
Greenovu větu lze použít za předpokladu, že c, $int\, c \subset E_2 - [0,0]$.

a) 

Integrál existuje, ale nelze použít Greenovu větu .

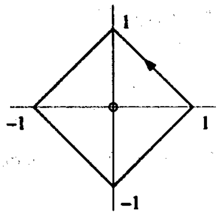
b) 

Integrál neexistuje a nelze použít Greenovu větu .

c) 

Integrál existuje a lze použít Greenovu větu.
Proveďme tedy výpočet.

$$\oint_c f_1\,dx+f_2\,dy = \iint_{int\,c}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dx\,dy = \iint_{int\,c}\left(\frac{2}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{y}{x^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\right)dx\,dy =$$
$$= \iint_{int\,c} 0\,dx\,dy = 0.$$

d) 

Integrál existuje, ale nelze použít Greenovu větu .

■

***Příklad* 499.** Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \dfrac{(x-y, x+y)}{x^2+y^2}$ v $G = E_2 - [0,0]$.

a) Ověřte, že platí $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$ v G. b) Výpočtem integrálu $\oint_c \vec{f}\cdot\vec{ds}$, kde c je záporně orientovaná kružnice $S=[0,0], r=2$, se přesvědčte, že pole není potenciální v G.

Řešení: a) $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x} = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$

b) Cirkulace $\Gamma = \oint_c \vec{f}\cdot\vec{ds} = \oint_c \dfrac{(x-y)\,dx+(x+y)\,dy}{x^2+y^2} =$

$$= \left[\begin{array}{llll} c: & x = 2\cos t, & dx = -2\sin t & t\in\langle 0,2\pi\rangle \\ & y = 2\sin t \;\; | & dy = 2\cos t \;\; | & \text{křivka je nesouhlasně} \\ & & & \text{orientovaná s parametrizací} \end{array}\right] =$$

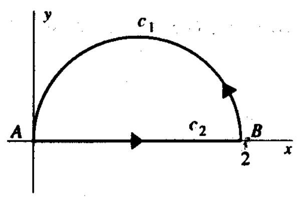
$$= -\int_0^{2\pi}\frac{-4(\cos t-\sin t)\sin t + 4(\cos t+\sin t)\cos t}{4}\,dt = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi.$$

Pole $\vec{f}$ není potenciální, protože $\oint_c \vec{f}\cdot\vec{ds} \neq 0$.

K výpočtu tohoto integrálu nelze použít Greenovu větu, jelikož bod nespojitosti $[0,0] \in int\; c = \{[x,y]; x^2+y^2 \le 4\}$. ■

***Příklad* 500.** Určete cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ po kladně orientované křivce $c = c_1 \cup c_2$, kde $c_1 : x^2-2x+y^2 = 0,\ y \ge 0$; $c_2 : y = 0,\ x \in \langle 0,2\rangle$,
a) přímým výpočtem, b) pomocí Greenovy věty.

Řešení:



$c_1 : (x-1)^2 + y^2 = 1, y \ge 0$
$c_2 : y = 0, x \in \langle 0,2\rangle$

a) $\displaystyle\oint_c \vec{f}\cdot\vec{ds} = \oint_c -y\,dx + x\,dy = \int_{c_1} + \int_{c_2} =$

$$= \left[\begin{array}{lll} c_1: \ x = 1+\cos t & dx = -\sin t\,dt & t \in \langle 0,\pi\rangle \\ \quad\ \ y = \sin t & dy = \cos t\,dt & \text{souhlasná or.} \\ c_2: \ y = 0, dy = 0, & x \in \langle 0,2\rangle & \text{souhl.or.} \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{\pi}\Big(\sin^2 t + (1+\cos t)\cos t\Big)\,dt + \int_0^2 0\,dx = \int_0^{\pi}(1+\cos t)\,dt = \Big[t+\sin t\Big]_0^{\pi} = \pi.$$

b) $\displaystyle\oint_c -y\,dx + x\,dy \overset{\text{Gr.v.}}{=} \iint_{int\ c}(1+1)\,dx\,dy = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi = \pi.$ ■

***Příklad* 501.** Vypočítejte pomocí křivkového integrálu plošný obsah vnitřku asteriody $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\ (a > 0)$.

Řešení: Použijeme známou parametrizaci asteriody :

$$\left[\begin{array}{lll} x = a\cdot\cos^3 t & dx = -3a\cdot\cos^2 t\cdot\sin t\,dt & t\in\langle 0,2\pi\rangle \\ y = a\cdot\sin^3 t & y = 3a\cdot\sin^2 t\cdot\cos t\,dt & \end{array}\right]$$

$$P = \frac{1}{2}\int_c -y\,dx + x\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(3a^2\cos^2 t\sin^4 t + 3a^2\sin^2 t\cos^4 t)\,dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cdot\cos^2 t\,dt = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 2t}{4}\,dt = \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{3}{16}a^2\Big[t - \frac{\sin 4t}{4}\Big]_0^{2\pi} = \frac{3}{8}a^2\pi.$$ ■

502. Vyšetřete existenci integrálu $\displaystyle\oint_c(-\frac{1}{x^2}, 2x)\cdot\vec{ds}$ a rozhodněte o možnosti užití Greenovy věty, jestliže $c \subset E_2$ je kladně orientovaná křivka : a) $x^2+y^2 = 1$, b) $x^2+(y-2)^2 = 1$, c) $(x-2)^2+y^2 = 1$. V kladném případě vypočtěte integrál pomocí Greenovy věty.

[**a) neexistuje, nelze**
b) neexistuje, nelze
c) existuje, lze; 2π]

503. Pomocí Greenovy věty vypočtěte cirkulaci vektoru $\vec{f} = \Big(y, (x-y)^2\Big)$ po záporně orientované křivce $c: (x-1)^2 + y^2 = 1$. [$-\pi$]

504. Vypočtěte cirkulaci $\vec{f} = \dfrac{2(y,-x)}{x^2+y^2}$ po kladně orientované křivce $c: x^2+y^2 = 16$. Lze použít Greenovu větu ? [-4π, nelze]

505. Vypočtěte pomocí Greenovy věty i přímým výpočtem $\displaystyle\oint_c(1-x^2)y\,dx + x(1+y^2)\,dy$, kde c je kladně orientovaný obvod čtverce $\langle 0,2\rangle\times\langle 0,2\rangle$. [16]

506. Odvoďte pomocí křivkového integrálu vzorec pro plošný obsah elipsy $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$. [$\pi ab$]

507. Užitím křivkového integrálu vypočtěte obsah obrazce omezeného obloukem cykloidy $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a úsečkou z bodu $[0,0]$ do bodu $[2\pi\, a, 0]$. $[3\pi a^2]$

508. Nechť c_1 je úsečka z bodu $[0,0]$ do bodu $[1,1]$, c_2 je část paraboly $y = x^2$ opět z $[0,0]$ do $[1,1]$ a $I_1 = \displaystyle\int_{c_1} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$, $I_2 = \displaystyle\int_{c_2} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$. Užitím Greenovy věty vypočtěte $I_1 - I_2$.

$\left[\pm\frac{1}{3}.\quad \text{Návod: } \oint_{c_1 \cup c_2} = \int_{c_1} - \int_{c_2} \text{ (záp.orient.)} \quad \text{nebo } \oint_{c_1 \cup c_2} = \int_{c_2} - \int_{c_1} \text{ (klad.orient.)}\right]$

509. Pomocí Greenovy věty vypočtěte integrál $\displaystyle\oint_c x e^{-y^2}\,dx + \left(-x^2 y e^{-y^2} + \frac{1}{x^2+y^2}\right) dy$, kde c je kladně orientovaný obvod čtverce s vrcholy $[1,0]$, $[2,0]$, $[2,1]$, $[1,1]$. $\left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right]$

510. Pomocí Greenovy věty vypočtěte integrál $\displaystyle\oint_c (y^2 e^x - y^3)\,dx + (2y e^x - 3)\,dy$, kde $c = c_1 \cup c_2$; $\quad c_1 : x = 0,\ y \in \langle -2, 2 \rangle$, $c_2 : 4x^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0$, přičemž $[0,2]$ je počáteční bod křivky c_1. $[3\pi]$

V. Plošný integrál

V.1. Parametrizace ploch

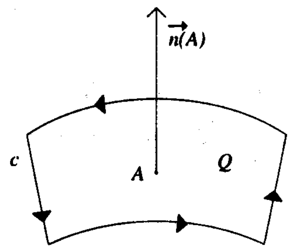
Nechť oblast $\Omega \subset E_2$, $P = P(u,v)$ *je zobrazení z* Ω *do* E_3, $\Gamma \subset \Omega$ *je jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka a* $B = \Gamma \cup int\,\Gamma$. *Platí-li :*

a) zobrazení P *je spojité a prosté v* B*;*

b) P *má omezené a spojité parciální derivace* $\mathbf{P}_u$ *a* $\mathbf{P}_v$ *v* $B - K$, *kde* K *je množina konečného počtu bodů ležících na* Γ*;*

c) $\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v \neq \vec{0}$ *v* $B - K$,

potom množina $Q = \{X = P(u,v) \in E_3; [u,v] \in B\}$ *se nazývá* ***jednoduchá hladká*** **plocha** *v* E_3 *, zobrazení* P *její* **parametrizací** *a množina* $c = \{X = P(u,v) \in E_3; [u,v] \in \Gamma\}$ *její* **okraj**. *Vektor* $\vec{n} = \pm\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v, [u,v] \in B - K$ *nazýváme* **normálovým vektorem** *plochy, přičemž znaménko + , resp. - , odpovídá souhlasné, resp. nesouhlasné, orientaci plochy* Q *s její parametrizací* P. *Jednotkový vektor normály označme* $\vec{n}^o$.



Říkáme, že plocha Q *a její okraj* c *jsou souhlasně orientovány, jestliže pro směr křivky* c *a normálu* $\vec{n}$ *plochy platí pravidlo pravé ruky.*

POZNÁMKA : V geometrických a fyzikálních aplikacích se často používá tzv. rádiusvektor $\vec{r} = (x,y,z)$ bodu $X = [x,y,z]$. Potom vektorová rovnice $\vec{r}(t) = \Big(x(t), y(t), z(t)\Big)$, $t \in I$ vyjadřuje křivku $c : x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in I$ a podobně $\vec{r}(u,v) = \Big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\Big)$, $[u,v] \in B \subset E_2$ vyjadřuje plochu $Q : x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),\ [u,v] \in B$.

***Příklad* 511.** Je dána polovina kulové plochy $Q : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$, $(z \geq 0)$ orientovaná normálovým vektorem $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, kde $n_3 \geq 0$. Rozhodněte, která zobrazení $P(u,v)$ jsou parametrizacemi plochy Q.

a) $P(u,v) = \left[u, v, \sqrt{a^2 - u^2 - v^2}\right]$, kde $[u,v] \in B : u^2 + v^2 \leq a^2$,

b) $P(u,v) = \left[\dfrac{2a^2u}{a^2+u^2+v^2}, \dfrac{2a^2v}{a^2+u^2+v^2}, \dfrac{2a^3}{a^2+u^2+v^2} - a\right]$, kde $[u,v] \in B$, $B : u^2 + v^2 \leq a^2$,

c) $P(u,v) = [a\cos u\cos v, a\sin u\cos v, a\sin v]$, kde $[u,v] \in B = \langle 0, 2\pi) \times \langle 0, \dfrac{\pi}{2}\rangle$.

Řešení : Dosazením se můžeme snadno přesvědčit, že ve všech případech platí rovnice

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

a) Funkce $\mathbf{P}_u = \left(1, 0, \dfrac{-u}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}\right), \mathbf{P}_v = \left(0, 1, \dfrac{-v}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}\right)$ nejsou spojité a nejsou omezené pro $u^2 + v^2 = a^2$, což je celá hranice Γ_B (má nekonečný počet bodů). Z toho vyplývá, že dané zobrazení není parametrizací.

b) $P(u, v)$ je spojité, prosté zobrazení v B. Snadno se přesvědčíme, že na B skutečně vychází $z \geq 0$:

$$z = \frac{2a^3}{a^2 + u^2 + v^2} - a = \frac{a(a^2 - u^2 - v^2)}{a^2 + u^2 + v^2},$$

$$B : u^2 + v^2 \leq a^2 \longrightarrow a^2 - u^2 - v^2 \geq 0 \longrightarrow z \geq 0.$$

Nyní spočítáme $\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v$ a normálový vektor

$$\vec{n} = \mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{2a^2(a^2 - u^2 + v^2)}{(a^2 + u^2 + v^2)^2} & \dfrac{-4a^2uv}{(a^2 + u^2 + v^2)^2} & \dfrac{-6a^3u}{(a^2 + u^2 + v^2)^2} \\ \dfrac{-4a^2uv}{(a^2 + u^2 + v^2)^2} & \dfrac{2a^2(a^2 + u^2 - v^2)}{(a^2 + u^2 + v^2)^2} & \dfrac{-6a^3v}{(a^2 + u^2 + v^2)^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{4a^4}{(a^2 + u^2 + v^2)^4}\Big(3au(a^2 + u^2 + v^2), 3av(a^2 + u^2 + v^2), a^4 - (u^2 + v^2)^2\Big) \neq \vec{0}$$

pro všechna $u^2+v^2 \leq a^2$; $n_3 = a^4-(u^2+v^2)^2 = \Big(a^2+(u^2+v^2)\Big)\cdot\Big(a^2-(u^2+v^2)\Big) \geq 0$. Dané zobrazení je parametrizací plochy Q . Orientace plochy je souhlasná s danou parametrizací.

c) Zobrazení vychází z popisu kulové plochy ve sférických souřadnicích. Víme, že toto zobrazení je prosté a spojité pro $u \in \langle 0, 2\pi)$ a $v \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Navíc jeho parciální derivace $\mathbf{P}_u$ a $\mathbf{P}_v$ jsou spojité všude v E_2 a

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin u\cos v & a\cos u\cos v & 0 \\ -a\cos u\sin v & -a\sin u\sin v & a\cos v \end{vmatrix} = (a^2\cos u\cos^2 v, a^2\sin u\cos^2 v, a^2\sin v\cos v),$$

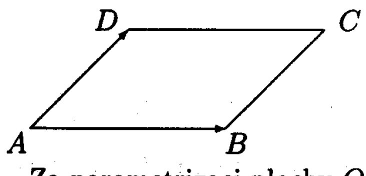
$|\vec{n}| = a^2\cos v \neq 0$ pro všechna $u \in \langle 0, 2\pi), v \in \langle 0, \frac{\pi}{2})$. Na hranici množiny B, kde u je libovolné a $v = \frac{\pi}{2}$, je $\vec{n} = \vec{0}$. To znamená, že na hranici Γ_B je $\vec{n} = \vec{0}$ v nekonečném počtu bodů a z toho vyplývá, že dané zobrazení není parametrizací plochy Q.

■

• Navrhněte parametrizaci plochy Q, jejíž orientace je určena normálovým vektorem $\vec{n}_Q$. Zjistěte, zda plocha Q je orientována souhlasně či nesouhlasně s navrženou parametrizací :

***Příklad* 512.** Q je rovnoběžník s vrcholy $A = [1, 1, 1]$, $B = [1, 4, 4]$, $C = [0, 5, 6]$, $D = [0, 2, 3]$, $\vec{n}_Q \cdot \vec{k} > 0$.

Řešení :



Snadno se přesvědčíme, že $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (0, 3, 3)$ a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (-1, 1, 2)$.
Q je část roviny určené bodem A a vektory $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$. Rovnici roviny napíšeme v parametrickém tvaru $X = A + u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AD}$.

Za parametrizaci plochy Q zvolíme $P(u, v) = A + u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AD}$.

$$\begin{cases} x = 1 \quad\quad - v \\ y = 1 + 3u + v \\ z = 1 + 3u + 2v \end{cases} \Bigg| \quad \text{kde } [u,v] \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \quad \vec{n} = \mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3,-3,3).$$

Z podmínky $\vec{n}_Q \cdot \vec{k} = (3,-3,3) \cdot (0,0,1) = 3 > 0$ vyplývá, že orientace plochy je souhlasná se zvolenou parametrizací. ■

***Příklad* 513.** Q je kruh v rovině $x = 2$ se středem v bodě $[2,-1,3]$ a poloměrem 4, $\vec{n}_Q = (-1,0,0)$.

Řešení : Plocha Q je popsána rovnicemi $(y+1)^2 + (z-3)^2 \leq 16,\ x = 2$.
Nyní navrhneme zobrazení $X = P(u,v)$:

a) $$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + u\cos v \\ z = 3 + u\sin v \end{cases} \Bigg| \quad [u,v] \in B = \langle 0,4\rangle \times \langle 0,2\pi),\quad \vec{n} = \mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v = (u,0,0) \begin{array}{l} = \vec{0} \text{ pro } u = 0 \\ \neq \vec{0} \text{ pro } u \neq 0. \end{array}$$

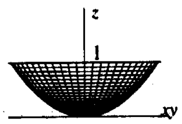
Toto zobrazení není parametrizací plochy Q, protože je $\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v = \vec{0}$ v nekonečném počtu bodů ležících na hranici množiny B .

b) $$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + u \\ z = 3 + v \end{cases} \Bigg| \quad \text{množina } B : u^2 + v^2 \leq 16 \quad \vec{n} = \mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v = (1,0,0) \neq \vec{0} \text{ pro všechny } [u,v] \in B.$$

Toto navržené zobrazení je parametrizací plochy Q a orientace plochy Q je nesouhlasná s touto parametrizací, protože $\vec{n}_Q = (-1,0,0) = -\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v$. ■

***Příklad* 514.** $Q : x^2 + y^2 = z,\ y \geq 0,\ z \leq 1,\quad \vec{n}_Q([0,0,0]) = (0,0,-1)$

Řešení : Jde o část pláště rotačního paraboloidu



a) Zvolíme zobrazení :

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \Bigg| \quad B : u^2 + v^2 \leq 1 \quad \vec{n} = \mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v = (-2u,-2v,1) \quad \vec{n} \neq \vec{0} \text{ v celém } B,$$

$$\vec{n}^o = \frac{(-2u,-2v,1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}},\ \vec{n}^o([0,0,0]) = \vec{n}^o(u=v=0) = (0,0,1).$$

Navržené zobrazení je parametrizací. Plocha Q je nesouhlasně orientovaná s touto parametrizací, protože $\vec{n}^o = -\vec{n}_Q$.

b) $$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = u^2, \end{cases} \Bigg| \quad [u,v] \in B = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\pi\rangle \quad \mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v = (-2u^2\cos v, -2u^2\sin v, u) \quad \vec{n} = \vec{0} \text{ pro } u = 0.$$

Zobrazení není parametrizací plochy Q. ■

515. Plocha $Q = \{[x,y,z] \in E_3; x^2 + y^2 = 4, x \geq 0,\ z \in \langle 1,4\rangle\}$ je orientovaná tak, že vektor normály $\vec{n}_Q$ v libovolném bodě splňuje podmínku $\vec{n}_Q \cdot \vec{i} \geq 0$. a) Ověřte,

že zobrazení $P(u,v) = [2\cos u, 2\sin u, v]$, $[u,v] \in B, B = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 1,4\rangle$ je parametrizací plochy Q a rozhodněte o orientaci plochy vzhledem k této parametrizaci.
b) Zdůvodněte, proč zobrazení $P(u,v) = \left[\sqrt{4-u^2}, u, v\right], [u,v] \in B$,
$B = \langle -2, 2\rangle \times \langle 1, 4\rangle$ není parametrizací plochy Q.

[a) orientace plochy Q je souhlasná s parametrizací , b) P_u je nespojité v nekonečném počtu bodů množiny B.]

516. $Q \subset E_3$, $Q: x^2+y^2 = 4, x \geq 0,\ 0 \leq z \leq 4,\quad \vec{n}_Q([2,0,2]) = (1,0,0)$

$$\left[\ \left\{\begin{array}{l} x = 2\cos u \\ y = 2\sin u \\ z = v \end{array}\right. \ \middle|\ \begin{array}{c} [u,v] \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0,4\rangle \\ \text{orientace plochy } Q \text{ je} \\ \text{souhlasná s parametrizací} \end{array}\ \right]$$

517. $Q: z = xy,\ x^2+y^2 \leq a^2,\ a > 0,\quad \vec{n}_Q \cdot \vec{k} > 0$

$$\left[\ \left\{\begin{array}{l} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = u^2 \sin v \cos v \end{array}\right. \ \middle|\ \begin{array}{c} [u,v] \in \langle 0,a\rangle \times \langle 0,2\pi) \\ \text{zobrazení není} \\ \text{parametrizací} \end{array}\ \right]$$

518. $Q: \dfrac{(y-1)^2}{4} + z^2 = 1,\ x \in \langle -1,3\rangle,\ \vec{n}_Q([0,0,1]) = (0,0,-1)$

$$\left[\ \left\{\begin{array}{l} x = u \\ y = 1 + 2\cos v \\ z = \ \ \sin v \end{array}\right. \ \middle|\ \begin{array}{c} [u,v] \in \langle -1,3\rangle \times \langle 0,2\pi) \\ \text{orientace plochy } Q \text{ je} \\ \text{souhlasná s parametrizací} \end{array}\ \right]$$

519. $Q: 2x+3y+z = 6,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \vec{n}_Q = (n_1,n_2,n_3),\ n_1 > 0$

$$\left[\ \left\{\begin{array}{l} x = u \\ y = v \\ z = 6 - 2u - 3v \end{array}\right. \ \middle|\ \begin{array}{c} 0 \leq v \leq 6-2u,\ 0 \leq u \leq 3 \\ \text{orientace plochy } Q \text{ je} \\ \text{souhlasná s parametrizací} \end{array}\ \right]$$

V.2. Plošný integrál skalární funkce (Plošný integrál prvního druhu)

Nechť Q je jednoduchá hladká plocha v E_3 s parametrizací $X = P(u,v)$, $[u,v] \in B \subset E_2$. Nechť f je skalární funkce definovaná a omezená na ploše Q. Říkáme, že f je **integrovatelná** *na Q, jestliže dvojný integrál $\iint_B f\big(P(u,v)\big) \cdot |\mathbf{P}_u(u,v) \times \mathbf{P}_v(u,v)|\, du\, dv$ existuje. V tomto případě pokládáme*

$$\iint_Q f\, dp = \iint_B f\big(P(u,v)\big) \cdot |\mathbf{P}_u(u,v) \times \mathbf{P}_v(u,v)|\, du\, dv.$$

Je-li plocha $Q \subset E_3$ jednoduchá po částech hladká, Q je sjednocením jednoduchých hladkých ploch $Q_1, \ldots, Q_k$ a f je funkce integrovatelná na každé ploše $Q_i, 1 \leq i \leq k$, pak je

$$\iint_Q f\, dp = \sum_{i=1}^{k} \iint_{Q_i} f\, dp.$$

Poznámka : Víme, že ani existence ani hodnota dvojného integrálu $\iint_B f\, du\, dv$ nezávisí na "chování" funkce f na množině míry 0. Z toho plyne, že lze počítat $\iint_Q f\,dp$ použitím zobrazení $P(u,v)$, které sice není parametrizací plochy Q, ale požadované podmínky na parametrizaci jsou porušeny pouze na množině míry 0 v B.

• Rozhodněte o existenci plošného integrálu a v kladném případě integrál vypočítejte, plocha $Q \subset E_3$:

***Příklad* 520.** $\displaystyle\iint_Q \frac{xy\ln|x|}{z}\,dp$, kde $Q : (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1,\ (z \geq 0)$

Řešení : Integrál neexistuje, neboť funkce $f(x,y,z) = \dfrac{xy\ln|x|}{z}$ není definovaná pro $z = 0$ a není omezená v žádném okolí bodů s nulovou z-tovou souřadnicí. ■

***Příklad* 521.** $\displaystyle\iint_Q \frac{dp}{x^2+y^2+z^2-1},\quad Q : x^2 + y^2 + (z-3)^2 = a^2,\ a > 0$

Řešení : Pro existenci integrálu je postačující spojitost integrované funkce na ploše Q. Tato podmínka je splněna vždy, když Q je disjunktní s kulovou plochou $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, což platí pro $a \in (0,2) \cup (4,\infty)$.
Naopak, pro $a \in \langle 2,4\rangle$, integrál neexistuje, protože funkce f není na ploše Q omezená. Nyní integrál spočítáme použitím parametrizace plochy Q:

$$\left[\begin{cases} x = a\cos u\cos v \\ y = a\sin u\cos v \\ z = 3 + a\sin v \end{cases} \middle| \begin{array}{l} u \in \langle 0, 2\pi\rangle \\ v \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \\ |\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v| = a^2\cos v \end{array} \middle| \begin{array}{l} \frac{1}{x^2+y^2+z^2-1} = \\ = \frac{1}{a^2\cos^2 u\cos^2 v + a^2\sin^2 u\cos^2 v + (3+a\sin v)^2 - 1} = \\ = \frac{1}{a^2+8+6a\sin v}, \end{array}\right]$$

$$\iint_Q f\,dp = \iint_B f\cdot|\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v|\,du\,dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{2\pi} \frac{a^2\cos v}{a^2+8+6a\sin v}\,du\Big)\,dv =$$

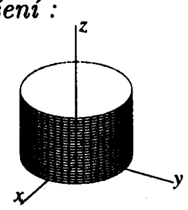
$$= 2\pi\cdot\frac{a^2}{6a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{6a\cos v}{a^2+8+6a\sin v}\,dv = \frac{\pi a}{3}\Big[\ln|a^2+8+6a\sin v|\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a}{3}\ln\left|\frac{a^2+8+6a}{a^2+8-6a}\right|.$$

■

• Vypočítejte integrály na ploše $Q \subset E_3$:

***Příklad* 522.** $\displaystyle\iint_Q xy\,dp$, kde $\quad Q : x^2 + y^2 = 4,\quad 0 \leq z \leq 1$

Řešení :



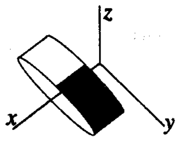
Q je část válcové plochy. Integrál existuje, neboť funkce $f(x,y,z) = xy$ je spojitá na Q. Pro výpočet integrálu použijeme cylindrické souřadnice s poloměrem $r = 2$:

$$\left[\begin{cases} x = 2\cos u, \\ y = 2\sin u \\ z = v, \end{cases} \middle| \begin{array}{l} [u,v] \in \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle \\ \mathbf{P}_u = (-2\sin u, 2\cos u, 0) \\ \mathbf{P}_v = (0,0,1), \end{array} \middle| \begin{array}{l} dp = |\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v|\,du\,dv \\ = |(2\cos u, 2\sin u, 0)|\,du\,dv \\ = 2\,du\,dv \end{array}\right]$$

$$\iint_Q xy\,dp = \int_0^1\Big(\int_0^{2\pi} 4\sin u\cos u\cdot 2\,du\Big)\,dv = 8\Big[\frac{\sin^2 u}{2}\Big]_0^{2\pi}\cdot\Big[v\Big]_0^1 = 0.$$ ■

***Příklad* 523.** $\iint_Q xyz\,dp, \quad Q: y^2 + 9z^2 = 9, \quad 1 \le x \le 3,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

Řešení :



Jde o část eliptické válcové plochy rovnoběžné s osou x. Použijeme zobecněné cylindrické souřadnice :

$$\left[\begin{cases} x = u \\ y = 3\cos v \\ z = \sin v \end{cases} \quad \middle| \quad \begin{aligned} &[u,v] \in B = \langle 1,3\rangle \times \langle 0, \tfrac{\pi}{2}\rangle \\ &|\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v| = |(1,0,0) \times (0, -3\sin v, \cos v)| \\ &= \sqrt{9\sin^2 v + \cos^2 v} = \sqrt{8\sin^2 v + 1} \end{aligned}\right]$$

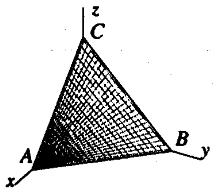
$$\iint_Q xyz\,dp = \iint_B u \cdot 3\cos v \sin v \cdot \sqrt{8\sin^2 v + 1}\ du\,dv =$$

$$= 3\int_1^3 u\,du \cdot \int_0^{\pi/2} \cos v \sin v \cdot \sqrt{8\sin^2 v + 1}\ dv = \left[\begin{array}{c} 8\sin^2 v + 1 = t \\ 16\sin v\cos v\,dv = dt \\ t \in \langle 1, 9\rangle \end{array}\right] =$$

$$= 3\Big[\frac{u^2}{2}\Big]_1^3 \cdot \frac{1}{16}\int_1^9 \sqrt{t}\,dt = \frac{3}{2}(9-1)\cdot\frac{1}{16}\Big[\frac{2t^{3/2}}{3}\Big]_1^9 = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}(27-1) = 13. \quad \blacksquare$$

***Příklad* 524.** $\iint_Q xz\,dp, \quad Q$ je $\triangle ABC$, kde $A = [1,0,0]$, $B = [0,1,0]$ a $C = [0,0,1]$

Řešení : Q je část roviny $x + y + z = 1$. Průmět vyšetřovaného trojúhelníka do roviny $z = 0$, je trojúhelník omezený přímkami $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$ v rovině (xy).



$$\left[\begin{aligned} &z = 1 - x - y \\ &dp = \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2}\,dx\,dy \\ &\quad = \sqrt{3}\,dx\,dy \end{aligned} \quad \middle| \quad [x,y] \in D: \ \begin{aligned} &0 \le y \le 1 - x \\ &0 \le x \le 1 \end{aligned}\right]$$

$$\iint_Q xz\,dp = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} x(1-x-y)\cdot\sqrt{3}\,dy\Big)\,dx =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 \left(x(1-x)\Big[y\Big]_0^{1-x} - \frac{x}{2}\Big[y^2\Big]_0^{1-x}\right)dx = \sqrt{3}\int_0^1 \Big(x(1-x)^2 - \frac{x}{2}(1-x)^2\Big)\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1 x(1-2x+x^2)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{24}.$$

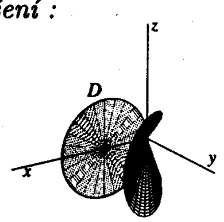
POZNÁMKA : Plochu Q jsme mohli též parametrizovat

$$\left[\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u - v \end{cases} \quad \middle| \quad \begin{aligned} &0 \le v \le 1 - u \\ &0 \le u \le 1 \\ &|\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v| = \sqrt{3} \end{aligned}\right]$$

$\blacksquare$

***Příklad* 525.** $\iint_Q (xy + yz + xz)\,dp, \quad Q: y = \sqrt{x^2 + z^2}$, ležící uvnitř plochy $x^2 + z^2 = 2x$.

Řešení :



Plocha Q je část pláště rotačního kužele (osa y je osou rotace), ležící uvnitř válcové plochy $x^2 + z^2 = 2x$.
Použijeme-li dané vyjádření plochy $y = g(x,z)$, potom

$$dp = \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial y}{\partial z}\Big)^2}\,dx\,dz.$$

Průmět plochy Q do roviny (xz) je kruh $D: x^2+z^2 \le 2x \longrightarrow (x-1)^2+z^2 \le 1$. Nyní můžeme z plošného integrálu přejít k dvojnému integrálu :

$$\iint_Q (xy+yz+xz)\,dp = \left[\begin{array}{l} Q: \quad y=\sqrt{x^2+z^2} \\ dp = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+z^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}}\,dx\,dz = \sqrt{2}\,dx\,dz \end{array}\right] =$$

$$= \iint\limits_{(x-1)^2+z^2\le 1} \Big((x+z)\sqrt{x^2+z^2}+xz\Big)\sqrt{2}\,dx\,dz = \left[\begin{array}{lcl} x=r\cos\varphi & & 0\le r\le 2\cos\varphi \\ z=r\sin\varphi & | & -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \\ J=r & & \end{array}\right] =$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos\varphi}\Big(r(\cos\varphi+\sin\varphi)\cdot r + r^2\sin\varphi\cos\varphi\Big)r\,dr\right)d\varphi = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi +$$

$$+\sin\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)\cdot 4\cos^4\varphi\,d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\cos^5\varphi+\underbrace{\sin\varphi\cos^4\varphi+\sin\varphi\cos^5\varphi}_{\text{liché funkce}}\Big)\,d\varphi = 4\sqrt{2}\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\,d\varphi+0+0\right) =$$

$$= 8\sqrt{2}\cdot\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}\cdot 1 = \frac{64\sqrt{2}}{15}. \qquad \blacksquare$$

526. $\iint_Q (x+y+z)\,dp, \quad Q: x^2+y^2+z^2=a^2,\ z\ge 0,\ a>0$ $\quad[\pi a^3]$

527. $\iint_Q (x^2+y^2)\,dp, \quad Q: z=\sqrt{x^2+y^2},\ 0\le z\le 1$ $\quad\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right]$

528. $\iint_Q x\,dp, \quad Q: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $\quad[0]$

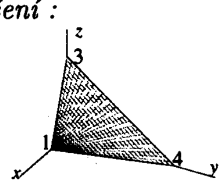
529. $\iint_Q z\,dp, \quad Q: 2z=x^2+y^2,\ 0\le z\le 1$ $\quad\left[\frac{2}{15}\pi(1+6\sqrt{3})\right]$

V.3. Aplikace plošného integrálu skalární funkce

- Vypočítejte obsah plochy $Q\subset E_3$:

***Příklad* 530.** Q je část roviny $12x+3y+4z=12$ ležící v prvním oktantu.

Řešení :

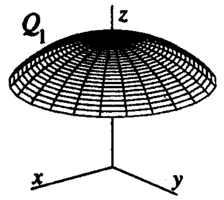


$$\left[\begin{array}{lcl} z=\frac{12-12x-3y}{4} & & 12x+3y\le 12,\ x\ge 0,\ y\ge 0 \\ dp=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy & | & D: \quad 0\le y\le 4-4x \\ \quad=\frac{13}{4}\,dx\,dy & & \qquad 0\le x\le 1 \end{array}\right]$$

$$S=\iint_Q dp = \int_0^1\left(\int_0^{4-4x}\frac{13}{4}\,dy\right)dx = \frac{13}{4}\int_0^1(4-4x)\,dx = \frac{13}{4}(4-2) = \frac{13}{2}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 531.** Q je část kulové plochy $x^2+y^2+z^2=16$ ležící uvnitř válcové plochy $x^2+y^2=9$.

Řešení : Plocha Q je složena ze dvou stejných částí $Q = Q_1 \cup Q_2$.



Omezíme se na $z \geq 0 \longrightarrow S = 2\iint_{Q_1} dp$

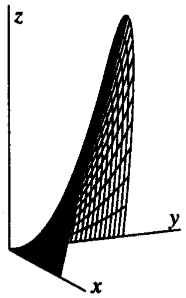
$$\left[\begin{array}{ll} Q_1: & z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \\ & dp = \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{16 - x^2 - y^2} + \dfrac{y^2}{16 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy = \dfrac{4\, dx\, dy}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} \\ D: & x^2 + y^2 \leq 9 \end{array}\right]$$

$$S = 2\iint_D \frac{4\, dx\, dy}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} = \left[\begin{array}{lcl} x = r\cos\varphi & & \\ y = r\sin\varphi & | & \begin{array}{c} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \\ J = r & & \end{array}\right] = 8\int_0^{2\pi}\int_0^3 \frac{r\, dr\, d\varphi}{\sqrt{16 - r^2}} =$$

$$= 8 \cdot 2\pi \cdot \left[-\sqrt{16 - r^2}\right]_0^3 = 16\pi(4 - \sqrt{7}).$$ ∎

***Příklad* 532.** Q je část plochy $z = 2xy$ ležící v prvním oktantu uvnitř válcové plochy $x^2 + y^2 = a^2$.

Řešení :



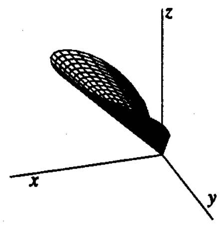
$$S = \iint_Q dp = \left[\begin{array}{ll} Q: & z = 2xy \\ & dp = \sqrt{1 + 4y^2 + 4x^2}\, dx\, dy \\ [x, y] \in D: & x^2 + y^2 \leq a^2 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right] =$$

$$= \iint\limits_{\substack{x^2 + y^2 \leq a^2 \\ x \geq 0, y \geq 0}} dx\, dy = \left[\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & 0 \leq r \leq a \\ y = r\sin\varphi & 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ J = r & \end{array}\right] = \int_0^{\pi/2}\int_0^a \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{8}\int_0^a \sqrt{1 + 4r^2} \cdot 8r\, dr = \frac{\pi}{16}\left[\frac{2(1 + 4r^2)^{3/2}}{3}\right]_0^a = \frac{\pi}{24}\Big((1 + 4a^2)\sqrt{1 + 4a^2} - 1\Big).$$ ∎

***Příklad* 533.** Q je část kuželové plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ležící uvnitř válcové plochy $x^2 + y^2 = 2x$.

Řešení :



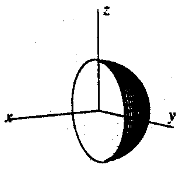
$$S = \iint_Q dp =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} Q: & z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ & dp = \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} + \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}}\, dx\, dy = \sqrt{2}\, dx\, dy \\ D: & x^2 + y^2 \leq 2x \longrightarrow (x - 1)^2 + y^2 \leq 1 \end{array}\right] =$$

$$= \sqrt{2}\iint\limits_{(x-1)^2 + y^2 \leq 1} dx\, dy = \text{(integrál se rovná obsahu kruhu o poloměru 1)} = \sqrt{2}\pi.$$ ∎

***Příklad* 534.** Stanovte hmotnost plochy $Q: x^2+y^2+z^2=9,\ x\le 0$, je-li hustota $\varrho(x,y,z)=\dfrac{1}{z^2+9}$.

Řešení :



$$m=\iint_Q \varrho\,dp=\iint_Q \frac{1}{z^2+9}\,dp=$$

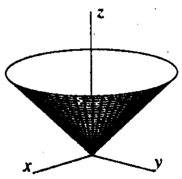
$$=\left[\begin{array}{l|c|c} x=3\cos u\cos v & \frac{\pi}{2}\le u\le\frac{3\pi}{2} & dp=|\mathbf{P}_u\times\mathbf{P}_v|\,du\,dv= \\ y=3\sin u\cos v & & =9\cos v\,du\,dv \\ z=3\sin v & -\frac{\pi}{2}\le v\le\frac{\pi}{2} & \end{array}\right]=$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{9\cos v}{9\sin^2 v+9}\,du\right)dv=\pi\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos v}{\sin^2 v+1}\,dv=\left[\begin{array}{c}\sin v=t\\ \cos v\,dv=dt\end{array}\right]=$$

$$=\pi\cdot\int_{-1}^{1}\frac{dt}{t^2+1}=\pi\cdot\Big[\operatorname{arctg} t\Big]_{-1}^{1}=\pi\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{2}.$$ ■

***Příklad* 535.** Stanovte moment setrvačnosti vzhledem k ose z plochy $Q: z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 2$, je-li hustota konstantní ($\varrho=k$).

Řešení :



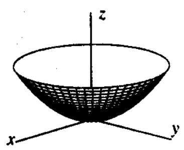
$$I_z=\iint_Q (x^2+y^2)\varrho\,dp=\left[\begin{array}{ll} Q: & z=\sqrt{x^2+y^2}\\ & dp=\sqrt{2}\,dx\,dy\\ D: & x^2+y^2\le 4\end{array}\right]=$$

$$=k\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)\sqrt{2}\,dx\,dy=\text{(použijeme polární souřadnice)}=$$

$$=\sqrt{2}\,k\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\cdot r\,dr\,d\varphi=\sqrt{2}\,k\cdot 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2=8\sqrt{2}\,k\pi.$$ ■

***Příklad* 536.** Najděte těžiště části paraboloidu $x^2+y^2=2z$ omezené rovinou $z=1$, s hustotou $\varrho=1$.

Řešení :



Těžiště bude na ose rotace z, tj. $T=[0,0,z_T]$, $z_T=\frac{M_{xy}}{m}$,

$$m=\iint_Q dp=\left[\begin{array}{ll} Q: & z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\\ & dp=\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy\\ D: & x^2+y^2\le 2\end{array}\right]=$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy=\text{(použijeme polární souřadnice)}=$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+r^2}\cdot r\,dr\right)d\varphi=2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+r^2}\cdot 2r\,dr=\pi\left[\frac{2(1+r^2)^{3/2}}{3}\right]_0^{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3}-1),$$

$$M_{xy}=\iint_Q z\,dp=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy=\text{(použijeme polární souřadnice)}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2}}r^2\sqrt{1+r^2}\cdot r\,dr\right)d\varphi=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\sqrt{2}}r^2\sqrt{1+r^2}\cdot r\,dr=\left[\begin{array}{c}1+r^2=t^2\\ 2r\,dr=2t\,dt\\ t\in\langle 1,\sqrt{3}\rangle\end{array}\right]=$$

$$= \pi \cdot \int_1^{\sqrt{3}} (t^2-1)t^2\,dt = \pi\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{3}} = \pi\left(\frac{9\sqrt{3}}{5} - \sqrt{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi}{15}(1+6\sqrt{3}),$$

$$z_T = \frac{2\pi(1+6\sqrt{3})\cdot 3}{15\cdot 2\pi(3\sqrt{3}-1)} = \frac{1+6\sqrt{3}}{5(3\sqrt{3}-1)}. \qquad \blacksquare$$

• Určete plošný obsah plochy $Q \subset E_3$:

537. $Q: z = x^2+y^2, \quad x^2+y^2 \le 1$ $\left[\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)\right]$

538. $Q: 3x+4y+z=1, \quad x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$ $\left[\frac{\sqrt{26}}{24}\right]$

539. Q je část kulové plochy $x^2+y^2+z^2=12$ ležící uvnitř paraboloidu $x^2+y^2=4z$. $\left[8\pi(3-\sqrt{3})\right]$

540. $Q: z = 4-\sqrt{x^2+y^2}, \quad 0\le z\le 2$ $[12\sqrt{2}\pi]$

541. Q je část kuželové plochy $z = 4\sqrt{x^2+y^2}$ vytínané rovinami $x=0,\ y=0,$ $2x+3y=6.$ $[3\sqrt{17}]$

542. Q je část roviny $2x+y-z=0$ ležící uvnitř eliptické válcové plochy $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1.$ $[12\sqrt{6}\pi]$

543. Q je plocha daná parametrickým vyjádřením $x=u+v,\ y=u-v,\ z=4v,$ $[u,v]\in\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle.$ $[6]$

544. Vypočtěte hmotnost plochy $Q: x^2+y^2+z^2=a^2,\ z\ge 0\ (a>0)$ při plošné hustotě $\varrho(x,y,z)=z.$ $[\pi a^3]$

545. Vypočtěte hmotnost plochy $Q: x+y+z=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$ při plošné hustotě $\varrho(x,y,z)=\dfrac{1}{(1+x+y)^2}.$ $\left[\sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)\right]$

546. Vypočtěte těžiště části kuželové plochy $z=\sqrt{x^2+y^2}$ vyříznuté válcovou plochou $x^2+y^2=ax,\ (a>0)$, je-li hustota konstantní $(\varrho=k)$. $\left[T=\left[\frac{a}{2},0,\frac{16a}{9\pi}\right]\right]$

547. Vypočtěte těžiště plochy $Q: x=\sqrt{y^2+z^2},\ y\ge 0,\ 0\le x\le 2$ při plošné hustotě $\varrho(x,y,z)=x.$ $\left[T=\left[\frac{3}{2},\frac{3}{\pi},0\right]\right]$

548. Vypočtěte souřadnici y_T těžiště T plochy $Q: x^2+z^2=4,\ x\ge 0,\ z\ge 0,\ y\in\langle 0,3\rangle$ při plošné hustotě $\varrho=xyz.$ $[2]$

549. Vypočtěte statický moment vzhledem k ose rotace povrchu homogenní polokoule o poloměru $R, \varrho=k.$ $\left[\frac{\pi}{6}(3\pi+4)kR^3\right]$

550. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose z homogenního trojúhelníka s vrcholy $[a,0,0],\ [0,a,0],\ [0,0,a]\ (a>0,\ \varrho=k).$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{6}a^4k\right]$

551. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose z homogenní plochy $Q=Q_1\cup Q_2,$ kde $Q_1: x^2+y^2\le 16,\ z=0, \quad Q_2: z=4-\sqrt{x^2+y^2},\ z\ge 0,\ (\varrho=k)$. $[128\,k\pi(1+\sqrt{2})]$

552. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose z homogenní plochy $Q: z^2=\dfrac{h^2}{a^2}(x^2+y^2),\ 0\le z\le h,\ (\varrho=k).$ $\left[\frac{\pi}{2}a^3k\sqrt{a^2+h^2}\right]$

V.4. Plošný integrál vektorové funkce (Plošný integrál druhého druhu)

Nechť Q je orientovaná jednoduchá hladká plocha s jednotkovým vektorem normály $\vec{n}^o$. Nechť $\vec{f}$ je vektorová funkce omezená na Q a nechť skalární funkce $\vec{f}\cdot\vec{n}^o$ je integrovatelná na ploše Q. Potom říkáme, že $\vec{f}$ je integrovatelná na Q a značíme

$$\iint_Q \vec{f}\cdot\overrightarrow{dp} = \iint_Q \vec{f}\cdot\vec{n}^o\,dp$$

Je-li $X = P(u,v)$ parametrizace plochy Q definovaná na množině $B \subset E_2$, pak plošný integrál vektorové funkce $\vec{f}$ lze spočítat vzorcem :

$$\iint_Q \vec{f}\cdot\overrightarrow{dp} = \pm\iint_B \vec{f}\cdot\Big(\mathbf{P}_u\times\mathbf{P}_v\Big)\,du\,dv,$$

přičemž znaménko vybíráme podle toho, zda plocha Q je souhlasně, resp. nesouhlasně, orientovaná s parametrizací $P(u,v)$.

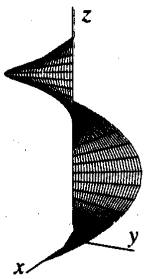
POZNÁMKA : Často se používá i jiné značení : Je-li $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$, pak plošný integrál vektorové funkce $\vec{f}$ se dá zapsat :

$$\iint_Q \vec{f}\cdot\overrightarrow{dp} = \iint_Q f_1\,dy\,dz + f_2\,dx\,dz + f_3\,dx\,dy$$

• Vypočítejte dané plošné integrály $\displaystyle\iint_Q \vec{f}\cdot\overrightarrow{dp}$ na ploše $Q \subset E_3$:

***Příklad* 553.** $\vec{f} = \Big(xz^2, yz^2, (x^2+y^2)z\Big)$, $\quad Q : x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = bv$ **(šroubová plocha)**, $[u,v] \in \langle 0,a\rangle \times \langle 0,2\pi\rangle$ $(a>0, b>0)$, orientována **normálou** $\vec{n} = (n_1,n_2,n_3)$, kde $n_3 > 0$.

Řešení :



$$\iint_Q (xz^2, yz^2, (x^2+y^2)z)\cdot\overrightarrow{dp} =$$

$$= \left[\begin{array}{rl} Q: & \mathbf{P}_u = (\cos v, \sin v, 0) \\ & \mathbf{P}_v = (-u\sin v, u\cos v, b) \\ \vec{n} = \mathbf{P}_u\times\mathbf{P}_v = & (b\sin v, -b\cos v, u) \quad\longrightarrow\quad n_3 = u > 0 \quad\longrightarrow \\ & \longrightarrow \ \text{orientace plochy je souhlasná s parametrizací} \\ \vec{f}\cdot(\mathbf{P}_u\times\mathbf{P}_v) = & (u\cos v\cdot b^2v^2, u\sin v\cdot b^2v^2, u^2bv)\cdot(b\sin v, -b\cos v, u) = \\ & = b^3uv^2\sin v\cos v - b^3uv^2\sin v\cos v + bu^3v = bu^3v \end{array}\right] =$$

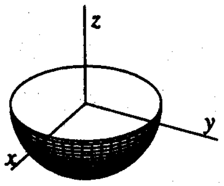
$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^a bu^3v\,du\Big)\,dv = b\Big[\frac{u^4}{4}\Big]_0^a\cdot\Big[\frac{v^2}{2}\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\pi^2a^4b. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 554.** $\vec{f} = (-y, x, x^2y^2z)$, $\quad Q : x^2+y^2+z^2 = a^2,\ z \le 0,\ a > 0$, $\vec{n}^o([0,0,-a]) = -\vec{k}$.

Řešení :

$$\iint_Q (-y, x, x^2y^2z)\cdot\overrightarrow{dp} = \left[\begin{array}{rl} Q: & \vec{n}^o = \dfrac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{(x,y,z)}{a} \\ & \vec{n}^o([0,0,-a]) = (0,0,-1) \\ & \text{orientace plochy je souhlasná s } \vec{n}^o \end{array}\right] =$$

$$\left(\iint_Q \vec f\cdot\overrightarrow{dp} = \iint_Q \vec f\cdot\vec n^o\,dp\right) = \iint_Q (-y,x,x^2y^2z)\cdot\frac{(x,y,z)}{a}\,dp = \frac{1}{a}\iint_Q x^2y^2z^2\,dp =$$



$$= \left[\begin{array}{l} Q:\quad z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ \qquad dp=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy \\ B:\quad x^2+y^2\le a^2 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{a}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} x^2y^2(a^2-x^2-y^2)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} x^2y^2\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \left[\begin{array}{lcl} x=r\cos\varphi & & 0\le r\le a \\ y=r\sin\varphi & | & 0\le\varphi\le 2\pi \\ J=r & & \end{array}\right] = \int_0^{2\pi}\int_0^a r^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi)\,d\varphi\cdot\int_0^a r^4\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr = \left[\begin{array}{c} a^2-r^2=t^2 \\ -r\,dr=t\,dt \end{array}\right] =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}(\sin^2\varphi-\sin^4\varphi)\,d\varphi\cdot\int_a^0(a^2-t^2)^2t\cdot(-t)\,dt =$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot\int_0^a(a^4-2a^2t^2+t^4)t^2\,dt = \frac{\pi}{4}\left[a^4\frac{t^3}{3}-2a^2\frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{7}\right]_0^a =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{a^7}{3}-\frac{2a^7}{5}+\frac{a^7}{7}\right) = \frac{2\pi}{105}a^7.$$

POZNÁMKA : V tomto příkladě lze použít také sférické souřadnice pro parametrizaci plochy Q. Potom

$$\frac{1}{a}\iint_Q x^2y^2z^2\,dp = a^7\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\pi/2}^0 \sin^2 u\cos^2 u\sin^2 v\cos^5 v\,dv\right)du =$$

$$= a^7\int_0^{2\pi}\sin^2 u\cos^2 u\,du\cdot\int_{-\pi/2}^0\sin^2 v\cos^5 v\,dv =$$

$$= 4\,a^7\int_0^{\pi/2}\sin^2(1-\sin^2 u)\,du\cdot\int_{-\pi/2}^0(1-\cos^2 v)\cos^5 v\,dv = (\text{ viz př. 29}) =$$

$$= 4a^7\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4\cdot 2}\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}-\frac{6\cdot 4\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3}\right) = \cdots = \frac{2\pi a^7}{105}$$

■

***Příklad* 555.** $\vec f=(x,y,z)$, $\quad Q: x\in\langle 0,\ a\rangle,\ y\in\langle 0,a\rangle,\ z=a,\ (a>0)$ je orientována $\vec n^o=\vec k$.

Řešení : $\displaystyle\iint_Q (x,y,z)\cdot\overrightarrow{dp} =$

$$= \left[\begin{array}{llcc} Q: & x=u & & [u,v]\in\langle 0,a\rangle\times\langle 0,a\rangle \\ & y=v & | & \vec n=\mathbf{P}_u\times\mathbf{P}_v=(0,0,1) \\ & z=a & & Q \text{ je souhlasně orientovaná s } \vec n^o \\ & & & \vec f\cdot(\mathbf{P}_u\times\mathbf{P}_v)=(u,v,a)\cdot(0,0,1)=a \end{array}\right] = \int_0^a\int_0^a a\,du\,dv = a^3.$$

■

***Příklad* 556.** Spočítejte plošný integrál $\displaystyle\iint_Q z^2\,dx\,dy$, kde Q je plocha $x^2+y^2+z^2=4$, $z\ge 0$ orientovaná normálovým vektorem $\vec n^o([0,0,2])=\vec k$.

Řešení : Integrál lze chápat jako tok vektorového pole $\vec{f} = (0,0,z^2)$ danou plochou.

Potom $\displaystyle\iint_Q z^2\,dx\,dy = \iint_Q \vec{f}\cdot\overrightarrow{dp} = \iint_Q \vec{f}\cdot\vec{n}^o\,dp = \left|\vec{n}^o = \frac{(x,y,z)}{2}\right| = \frac{1}{2}\iint_Q z^3\,dp =$

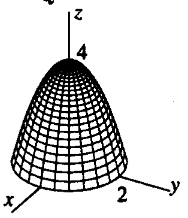
$$= \left[\begin{array}{lll} Q: & x = 2\cos u\cos v & 0 \le u \le 2\pi \\ & y = 2\sin u\cos v \quad | & 0 \le v \le \frac{\pi}{2} \\ & z = 2\sin v & |\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v| = 4\cos v \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} 8\sin^3 v\cdot 4\cos v\,du\,dv = 16\cdot 2\pi\left[\frac{\sin^4 v}{4}\right]_0^{\pi/2} = 8\pi. \qquad \blacksquare$$

• Určete tok Φ vektorového pole $\vec{f}$ plochou $Q \subset E_3$ orientovanou normálou $\vec{n}$:

***Příklad* 557.** $\vec{f} = (y,-x,z)$, $\quad Q: z = 4 - x^2 - y^2$, $z \ge 0$, jejíž normálový vektor splňuje podmínku $\vec{n}\cdot\vec{k} > 0$.

Řešení : Podle definice se tok Φ vektororového pole $\vec{f}$ plochou Q vyjádří integrálem $\displaystyle\iint_Q \vec{f}\cdot\overrightarrow{dp}$. Použijeme $\displaystyle\iint_Q \vec{f}\cdot\overrightarrow{dp} = \iint_Q \vec{f}\cdot\vec{n}^o\,dp =$



$$= \left[\begin{array}{l} Q: \quad z = 4 - x^2 - y^2, z \ge 0 \quad \longrightarrow x^2 + y^2 \le 4 \\ \quad \vec{n} = \pm\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right) = \pm(-2x,-2y,-1) \\ \quad \vec{n}\cdot\vec{k} > 0 \quad \longrightarrow \vec{n} = (2x,2y,1), \vec{n}^o = \dfrac{(2x,2y,1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \end{array}\right] =$$

$$= \iint_Q (y,-x,z)\cdot\frac{(2x,2y,1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\,dp = \iint_Q \frac{z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\,dp =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} & dp = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy = \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dx\,dy \\ [x,y]\in D: & x^2 + y^2 \le 4 \end{array}\right] =$$

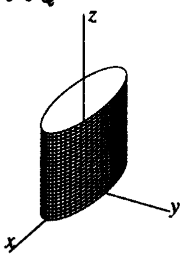
$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \frac{4 - x^2 - y^2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\cdot\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} (4 - x^2 - y^2)\,dx\,dy =$$

$$= (\text{polární souřadnice}) = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 (4 - r^2)r\,dr\right)d\varphi = 2\pi\left[4\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 558.** $\vec{f} = (x,y,z)$, $\quad Q: x^2 + 9y^2 = 9$, $0 \le z \le 4$, $\quad \vec{n}^o([3,0,0]) = -\vec{i}$

Řešení :

$$\iint_Q \vec{f}\cdot\overrightarrow{dp} = \pm\iint_B \vec{f}\cdot(\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v)\,du\,dv =$$



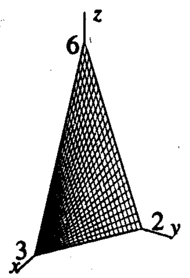
$$= \left[\begin{array}{ll|l} Q: & x = 3\cos u & \mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v = \quad (-3\sin u, \cos u, 0)\times(0,0,1) = \\ & y = \sin u & = \quad (\cos u, 3\sin u, 0) \\ & z = v & \vec{n}([3,0,0]) = \vec{n}(u=0, v=0) = -(1,0,0) \\ B: & 0 \le u \le 2\pi & \longrightarrow \vec{n} = -(\cos u, 3\sin u, 0) \\ & 0 \le v \le 4 & \end{array}\right] =$$

$$= -\int_0^4 \Big(\int_0^{2\pi} (3\cos u, \sin u, v)\cdot(\cos u, 3\sin u, 0)\,du\Big)\,dv =$$

$$= -\int_0^4 \Big(\int_0^{2\pi} (3\cos^2 u + 3\sin^2 u)\,du\Big)\,dv = -3\cdot 2\pi\cdot 4 = -24\pi. \quad \blacksquare$$

***Příklad* 559.** $\vec{f} = (x, y-z, 2z)$, Q je trojúhelník o vrcholech A, B, C, kde $A = [3,0,0]$, $B = [0,2,0]$, $C = [0,0,6]$, $\vec{n}\cdot\vec{i} < 0$.

Řešení :



Q je část roviny, jejíž rovnici napíšeme v úsekovém tvaru :

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1 \longrightarrow 2x + 3y + z = 6$$

$$\text{Tok } \Phi = \iint_Q \vec{f}\cdot\vec{dp} = \iint_Q \vec{f}\cdot\vec{n}^o\,dp =$$

$$= \left[\begin{array}{c} Q \text{ je rovina s normálou } \vec{n} = \pm(2,3,1) \\ \text{z podmínky } \vec{n}\cdot\vec{i} < 0 \text{ plyne, že } \vec{n} = -(2,3,1) \\ \vec{n}^o = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{-(2,3,1)}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{-(2,3,1)}{\sqrt{14}} \end{array}\right] =$$

$$= \iint_Q (x, y-z, 2z)\cdot\frac{(-2,-3,-1)}{\sqrt{14}}\,dp = \frac{1}{\sqrt{14}}\iint_Q (-2x - 3y + 3z - 2z)\,dp =$$

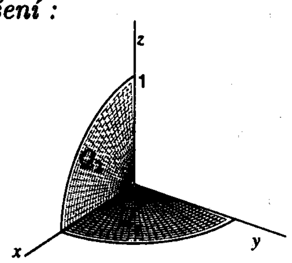
$$= \frac{1}{\sqrt{14}}\iint_Q (z - 2x - 3y)\,dp = \left[\begin{array}{l|l} Q: z = 6 - 2x - 3y & D: \\ dp = \sqrt{1+4+9}\,dx\,dy = \sqrt{14}\,dx\,dy & 0 \le y \le \frac{6-2x}{3} \\ [x,y]\in D, \text{ kde } D \text{ je průmět } \triangle ABC & 0 \le x \le 3 \\ \text{do roviny } (xy), \text{ což je } \triangle OAB & \end{array}\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{14}}\iint_D (6 - 2x - 3y - 2x - 3y)\sqrt{14}\,dx\,dy = \int_0^3 \Big(\int_0^{\frac{6-2x}{3}} (6 - 4x - 6y)\,dy\Big)\,dx =$$

$$= \int_0^3 \Big[6y - 4xy - 3y^2\Big]_0^{\frac{6-2x}{3}}\,dx = \int_0^3 \Big(-4x + \frac{4}{3}x^2\Big)\,dx = \Big[-2x^2 + \frac{4x^3}{9}\Big]_0^3 = -6. \quad \blacksquare$$

***Příklad* 560.** $\vec{f} = (x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2)$, $Q = Q_1 \cup Q_2$, kde $Q_1 = \{[x,y,0]\in E_3;\ x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$, $Q_2 = \{[x,0,z]\in E_3; x^2 + z^2 \le 1, x \ge 0, z \ge 0\}$, jednotkovým vektorem normály plochy Q_2 je $\vec{n}_2^o = -\vec{j}$.

Řešení :



V souladu s normálovým vektorem $\vec{n}_2^o = -\vec{j}$ bude jednotkový vektor normály plochy Q_1 $\vec{n}_1^o = -\vec{k}$.

$$\text{Tok } \Phi = \iint_{Q_1\cup Q_2} \vec{f}\cdot\vec{dp} = \iint_{Q_1} \vec{f}\cdot\vec{dp} + \iint_{Q_2} \vec{f}\cdot\vec{dp} =$$

$$= \iint_{Q_1} \vec{f}\cdot\vec{n}_1^o\,dp + \iint_{Q_2} \vec{f}\cdot\vec{n}_2^o\,dp =$$

$$= \left[\begin{array}{lll|lll} Q_1: & z = 0, \vec{n}_1^o = (0,0,-1) & & Q_2: & y = 0, \vec{n}_2^o = (0,-1,0) \\ & x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0 & & & x^2 + z^2 \le 1, x \ge 0, z \ge 0 \\ \vec{f}\cdot\vec{n}_1^o & = (x^2 - y^2, y^2, -x^2)\cdot(0,0,-1) & & \vec{f}\cdot\vec{n}_2^o & = (x^2, -z^2, z^2 - x^2)\cdot(0,-1,0) \\ & = x^2 & & & = z^2 \end{array}\right] =$$

$$\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ x\ge 0, y\ge 0}} x^2\,dx\,dy + \iint\limits_{\substack{x^2+z^2\le 1\\ x\ge 0, z\ge 0}} z^2\,dx\,dz = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ x\ge 0, y\ge 0}} 2\cdot x^2\,dx\,dy =$$

$$\text{(polární souřadnice)} = 2\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 r^3\cos^2\varphi\,dr\right)d\varphi = 2\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}. \qquad \blacksquare$$

561. Vypočítejte plošný integrál $\iint_Q x^2\,dy\,dz + z^2\,dx\,dy$, $Q: x^2+y^2=z^2,\ 0\le z\le 1$, $\vec{n}$ svírá tupý úhel s vektorem $\vec{k}$. $\left[-\frac{\pi}{2}\right]$

- Určete tok Φ vektorového pole $\vec{f}$ plochou $Q\subset E_3$ orientovanou normálou $\vec{n}$:

562. $\vec{f}=(0,0,2)$, Q je trojúhelník o vrcholech $A=[0,0,0]$, $B=[5,0,0]$, $C=[0,4,1]$, normála svírá s vektorem $\vec{k}=(0,0,1)$ ostrý úhel. $[20]$

563. $\vec{f}=(x,y,0)$, $Q: z=9-x^2-y^2, z\ge 0$, normála $\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)$ má souřadnici n_3 kladnou. $[81\pi]$

564. $\vec{f}=(y,-x,z)$, $Q: z=x^2+\dfrac{y^2}{9}-4,\ y\ge 0,\ z\le 0,\ \vec{n}\cdot\vec{k}<0$ $[12\pi]$

565. $\vec{f}=(x,y,z)$, Q : je část válcové plochy $x^2+y^2=9,\ 0\le z\le 4,\ \vec{n}^o([3,0,0])=-\vec{i}$. $[-72\pi]$

566. $\vec{f}=(x,y,-2z)$, $Q: y=9-\sqrt{x^2+z^2},\ y\ge 3,\ \vec{n}\cdot\vec{j}<0$ $[-108\pi]$

567. $\vec{f}=(x,y,-z)$, $Q: x^2+y^2+z^2=4,\ x\ge 0,\ \vec{n}^o([2,0,0])=-\vec{i}$ $\left[-\frac{16\pi}{3}\right]$

568. $\vec{f}=(z,x^2+y^2,1)$, $Q: z^2=x^2+y^2,\ 0\le z\le h,\ \vec{n}\cdot\vec{k}<0$ $[-h^2\pi]$

569. $\vec{f}=(x,y,x^2+y^2)$, Q je část válcové plochy $x^2+y^2=b^2,\ 0\le z\le h,\ y\ge 0$, $\vec{n}^o([b,0,0])=\vec{i}$. $[b^2h\pi]$

570. $\vec{f}=(z,x,y)$, $Q: x+z=2,\ x^2+y^2\le 4,\ \vec{n}^o=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ $[8\pi]$

571. $\vec{f}=(y,-x,z)$, $Q: z=4-x^2-\frac{y^2}{9},\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ \vec{n}\cdot\vec{k}>0$ $[2\pi]$

572. $\vec{f}=(x,y,3z)$, $Q: z=x^2+y^2+1,\ 1\le z\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ \vec{n}\cdot\vec{k}<0$ $\left[\frac{7}{8}\pi\right]$

573. $\vec{f}=z\vec{i}-x\vec{j}+y\vec{k}$, Q je rovnoběžník s vrcholy $A=[0,0,0]$, $B=[0,3,3]$, $C=[-1,4,5]$, $D=[-1,1,2]$ orientován normálou $\vec{n}=(1,-1,1)$. $[12]$

574. $\vec{f}=(x^2,y^2,z^2)$, Q je část válcové plochy $\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{4}=1,\ z\ge 0,\ 0\le x\le 3$, $\vec{n}^o([1,0,2])=-\vec{k}$. $[-64]$

V.6. Gaussova-Ostrogradského věta

Má-li vektorová funkce $\vec{f}=(f_1,f_2,f_3)$ spojité parciální derivace v otevřené množině $G\subset E_3$, pak skalární funkci

$$\operatorname{div}\vec{f}(X)=\frac{\partial f_1}{\partial x}(X)+\frac{\partial f_2}{\partial y}(X)+\frac{\partial f_3}{\partial z}(X),\quad X\in G$$

nazýváme **divergencí** *vektorového pole $\vec{f}$. Pole $\vec{f}$ se nazývá* **solenoidální** *v G, jestliže tok vektorového pole $\vec{f}$ každou jednoduchou uzavřenou po částech hladkou plochou $Q \subset G$ je nulový.*

Věta G.-O. : *Nechť*

a) *funkce $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ má spojité parciální derivace v oblasti $G \subset E_3$;*

b) *$Q \subset G$ je jednoduchá uzavřená po částech hladká plocha orientovaná jednotkovým vektorem vnější normály;*

c) *$int\, Q \subset G$.*

Potom

$$\iint_Q \vec{f} \cdot \overrightarrow{dp} = \iiint\limits_{int\, Q} \operatorname{div} \vec{f}\, dx\, dy\, dz$$

***Příklad* 575.** Jsou dány skalární funkce $u(x,y,z) = xy^2 - y^3z^2$ a vektorová funkce $\vec{f}(x,y,z) = (xy^2, x^2 + 2z, 3yz)$ v E_3. Spočítejte div (grad u) a div (rot $\vec{f}$).

Řešení : grad $u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = (y^2, 2xy - 3y^2z^2, -2y^3z)$,

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = 0 + 2x - 6yz^2 - 2y^3;$$

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & x^2 + 2z & 3yz \end{vmatrix} = (3z - 2, 0, 2x - 2xy),$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{f}) = 0.$$ ■

***Příklad* 576.** Ověřte, že pole $\vec{f}(x,y,z) = \left(\frac{1}{x} + 3y + 5, 2x - \frac{2}{y} - 3, 1 + \frac{z}{x^2} - \frac{2z}{y^2}\right)$ je solenoidální ve svém definičním oboru $G \subset E_3$.

Řešení : Pro definiční obor musí platit $x \neq 0$ a $y \neq 0$.

Dostaneme oblasti G_i, $i = 1, 2, 3, 4$:

$G_1 = \{[x,y,z] \in E_3 : x < 0, y < 0\}$, $G_2 = \{[x,y,z] \in E_3 : x < 0, y > 0\}$,
$G_3 = \{[x,y,z] \in E_3 : x > 0, y < 0\}$, $G_4 = \{[x,y,z] \in E_3 : x > 0, y > 0\}$.

Stačí ověřit, že hodnota toku vektorového pole f libovolnou jednoduchou uzavřenou po částech hladkou plochou $Q \subset G$, $int\, Q \subset G$ je 0. K výpočtu toku použijeme větu G.-O., jejíž předpoklady jsou splněny :

$$\iint_Q \vec{f} \cdot \overrightarrow{dp} = \iiint\limits_{int\, Q} \operatorname{div} \vec{f}\, dx\, dy\, dz,$$

kde $\operatorname{div} \vec{f} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{y^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{y^2} = 0.$ ■

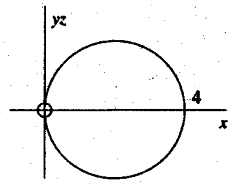
***Příklad* 577.** Je dáno vektorové pole $\vec{f}(x,y,z) = \frac{(z - y, x, -x)}{x^2 + y^2 + z^2}$. Určete definiční obor $G \subset E_3$ funkce $\vec{f}$ a ověřte, že $\operatorname{div} \vec{f} = 0$ v G. Ve kterých z následujících případů $\iint_Q \vec{f} \cdot \overrightarrow{dp}$ existuje a kdy lze použít větu G.-O. ?

a) $Q: x^2+y^2+z^2-4x=0$;
b) Q je povrch kvádru : $x=-1, x=3, y=-2, y=1, z=-1, z=1$;
c) $Q: x^2+y^2+z^2-6y+5=0$.

Řešení : Definiční obor je $E_3-[0,0,0]$. Snadno se přesvědčíme, že $\operatorname{div}\vec{f}=0$:

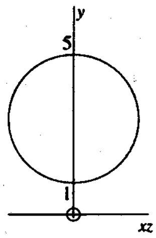
$$\operatorname{div}\vec{f}(X)=-\frac{(z-y)\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}-\frac{x\cdot 2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x\cdot 2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}=0.$$

a) $Q: (x^2-4x+4)+y^2+z^2=4 \longrightarrow (x-2)^2+y^2+z^2=2^2$,
$[0,0,0]\in Q$;
integrál neexistuje a nelze použít větu G.-O.;



b) $[0,0,0]\notin Q \longrightarrow$ integrál existuje, ale $[0,0,0]\in int\,Q \longrightarrow$ nelze použít větu G.-O.

c) $Q:\ x^2+(y-3)^2+z^2=4$,
$[0,0,0]\notin Q$,
$[0,0,0]\notin int\,Q$.



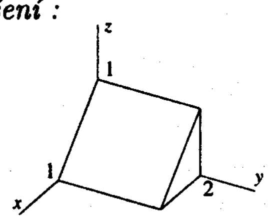
Daný integrál existuje a lze použít větu G.-O.

$$\iint_Q \vec{f}\cdot\overrightarrow{dp}=\iiint_{int\,Q}\operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz=0.$$ ■

• Užitím věty G.-O. vypočtěte tok vektorového pole $\vec{f}$ vnější stranou uzavřené plochy Q :

***Příklad* 578.** $\vec{f}=(3x+y, 2y-z+5, x+2y+z)$, Q je povrch tělesa omezeného rovinami $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+z=1,\ y=2$.

Řešení :



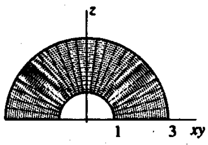
$$\text{Tok } \Phi=\iint_Q \vec{f}\cdot\overrightarrow{dp}=\iiint_{int\,Q}\operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint_{int\,Q}(3+2+1)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=6\iiint_{int\,Q}dx\,dy\,dz=$$ ($\iiint_{int\,Q}dx\,dy\,dz$ se rovná objemu vnitřku plochy Q, což je objem trojbokého hranolu) $=6\cdot\dfrac{1\cdot 1}{2}\cdot 2=6.$ ■

***Příklad* 579.** $\vec{f}=(xy^2, yz^2, zx^2)$, $Q=Q_1\cup Q_2\cup Q_3$, kde $Q_1: x^2+y^2+z^2=1$, $z\geq 0$; $Q_2: x^2+y^2+z^2=9$, $z\geq 0$; $Q_3: 1\leq x^2+y^2\leq 9$, $z=0$

Řešení :



$$\Phi = \iint_Q \vec{f}\cdot\overrightarrow{dp} = \iiint_{int\,Q} \operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{int\,Q} (y^2+z^2+x^2)\,dx\,dy\,dz =$$

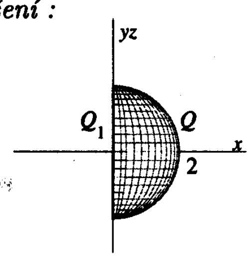
$$= \left[\begin{array}{lll} int\,Q: \ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9 & x = r\cos u\cos v & 1 \le r \le 3 \\ \qquad z \ge 0 & y = r\sin u\cos v & 0 \le u \le 2\pi \\ & z = r\sin v & 0 \le v \le \frac{\pi}{2} \\ & J = r^2\cos v & x^2+y^2+z^2 = r^2 \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_1^3 r^2\cdot r^2\cos v\,dr\right)du\right)dv = \int_0^{\pi/2}\cos v\,dv\cdot\int_0^{2\pi}du\cdot\int_1^3 r^4\,dr =$$

$$= \Big[\sin v\Big]_0^{\pi/2}\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{r^5}{5}\right]_1^3 = 1\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{5}(3^5-1) = \frac{484\pi}{5}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 580.** Určete tok Φ vektorového pole $\vec{f} = (x, y, -z)$ plochou $Q: x^2+y^2+z^2 = 4$, $x \ge 0$, orientovanou normálovým vektorem $\vec{n}^o([2,0,0]) = -\vec{i}$.

Řešení :



Plocha Q je polovina kulové plochy s body majícími x-ové souřadnice nezáporné. Takto zadaná plocha není uzavřená. Tok Φ touto plochou můžeme spočítat pomocí plošného integrálu $\iint_Q \vec{f}\cdot\overrightarrow{dp}$. Chceme-li použít větu G.-O., musíme přidat ještě plochu Q_1 tak, aby $Q\cup Q_1$ byla plocha uzavřená, stejně orientovaná. Tedy

$$(\star) \qquad \iint_Q \vec{f}\cdot\overrightarrow{dp} + \iint_{Q_1}\vec{f}\cdot\overrightarrow{dp} \overset{\text{G.-O.}}{=\!=} \pm \iiint_{int\,(Q\cup Q_1)} \operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz$$

$$\iint_{Q_1}\vec{f}\cdot\overrightarrow{dp} = \iint_{Q_1}(x,y,-z)\cdot\overrightarrow{dp} = \left[\begin{array}{c} Q_1: x=0, y^2+z^2\le 4 \\ \vec{n}^o = (1,0,0) \\ \text{normály ploch } Q, Q_1 \\ \text{směřují dovnitř} \end{array}\right] =$$

$$= \iint_{Q_1}(x,y,-z)\cdot\vec{n}^o\,dp = \iint_{y^2+z^2\le 4}(0,y,-z)\cdot(1,0,0)\,dp = 0$$

Vrátíme se k $(\star)$ a při použití věty G.-O. pamatujeme, že normály směřují dovnitř, takže před trojným integrálem na pravé straně napíšeme znaménko minus.

$$\iint_Q \vec{f}\cdot\overrightarrow{dp} + 0 = -\iiint_{int\,(Q\cup Q_1)}(1+1-1)\,dx\,dy\,dz = \left(\tfrac{1}{2}\text{ objemu koule}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3 = -\frac{16}{3}\pi. \qquad \blacksquare$$

• Užitím věty G.-O. vypočtěte tok Φ vektorového pole $\vec{f}$ po částech hladkou uzavřenou a orientovanou plochou Q :

581. $\vec{f} = (x, y, z)$, Q je povrch kužele s poloměrem podstavy a a výškou b, orientace vnější normálou. $[\pi a^2 b]$

582. $\vec{f} = (xy^2, yz, x^2z)$, Q je povrch dutého válce omezeného plochami $Q_1 : x^2+y^2 = 1$, $Q_2 : x^2 + y^2 = 4$, $Q_3 : z = 1$, $Q_4 : z = 3$, orientace vnější normálou. $[27\pi]$

583. $\vec{f} = (x^3, y^3, z^3)$, $Q = Q_1 \cup Q_2$ $Q_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \leq 0$, $Q_2 : z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$ orientace je dovnitř plochy. $[-\frac{6}{5}\pi]$

584. $\vec{f} = (x^2, y^2, z^2)$, Q je povrch krychle $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$, orientace vnější normálou. $[3a^4]$

585. $\vec{f} = (x, y, z)$, $Q : x^2 + y^2 + y^2 = a^2$, orientace vnitřní normálou. $[-4\pi a^3]$

586. $\vec{f} = (x^2, y^2, z^2)$, Q je kulová plocha se středem v bodě $[1, -2, 0]$ a poloměrem $r = 3$, orientace vnější normálou. $[-72\pi]$

587. $\vec{f} = (y, 2x, -z)$, Q je povrch tělesa omezeného plochami $Q_1 : x^2 + y^2 = a^2$, $Q_2 : z = -a$, $Q_3 : z = a$ $(a > 0)$, orientace je dovnitř plochy. $[2\pi a^3]$

588. $\vec{f} = (x^2, y^2, z^2)$, Q je povrch tělesa omezeného $-2 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leq 4$, orientace je dovnitř plochy. $[-\frac{16}{3}\pi]$

589. $\vec{f} = (x, y, z)$, Q je povrch tělesa omezeného plochami $x^2 = y^2 + z^2$, $x = 3$, orientace vnější normálou. $[27\pi]$

590. $\vec{f} = (x^3, z, y)$, Q je povrch tělesa omezeného plochami $z = x^2 + y^2$, $z = 4$, orientace vnější normálou. $[\frac{16}{3}\pi]$

591. $\vec{f} = (2xy, -y^2, 2z)$, $Q : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1$, orientace vnější normálou. $[32\pi]$

592. $\vec{f} = (x, y, x^2 + y^2)$, Q je povrch tělesa omezeného plochami $x^2 + y^2 = b^2$, $z = 0$, $z = a$, $y = 0$ $(y \geq 0,\ a \geq 0)$, orientace vnější normálou. $[b^2 a\pi]$

593. $\vec{f} = (x, y, z)$, Q je část válcové plochy $x^2+y^2 = 9$, $0 \leq z \leq 4$ (plocha je otevřená), $\vec{n}^o([3, 0, 0]) = -\vec{i}$. Výpočet proveďte a) přímo pomocí plošného integrálu; b) užitím věty G.-O. (Plocha se musí uzavřít pomocí $Q_1 : z = 0$, $Q_2 : z = 4$). $[-72\pi]$

594. $\vec{f} = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2}, x^2 + z\right)$. Ve kterých následujících zadáních plochy Q lze použít větu G.-O.? V kladném případě vypočítejte $\iint_Q \vec{f} \cdot \vec{dp}$. a) $Q : x^2+y^2+z^2 = 4$, orientace vnější normálou; b) Q je povrch kvádru omezeného rovinami $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $y = 3$, $z = 2$, $z = 5$, orientace vnitřní normálou. [a)nelze; b) lze; -6]

V.7. Stokesova věta

Nechť :

a) *vektorová funkce $\vec{f}$ má v oblasti $G \subset E_3$ spojité parciální derivace;*
b) *$c \subset G$ je jednoduchá uzavřená po částech hladká orientovaná křivka;*
c) *$Q \subset G$ je jednoduchá po částech hladká plocha s okrajem c, která je souhlasně orientovaná s křivkou c.*

Potom platí

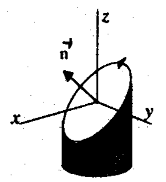
$$\oint_c \vec{f} \cdot \vec{ds} = \iint_Q \operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{dp}$$

• Užitím Stokesovy věty vypočtěte cirkulaci Γ vektorového pole $\vec{f}$ po křivce c orientované normálovým vektorem $\vec{n}$ roviny, ve které křivka c leží :

***Příklad* 595.** $\vec{f} = (y+z, x+z, x+y)$, c je uzavřená křivka $x^2+y^2=a^2$, $x+z=0$ orientovaná souhlasně s normálovým vektorem $\vec{n} = (1,0,1)$.

Řešení :

Křivka c je řezem válcové plochy $x^2+y^2=a^2$ rovinou $x+z=0$. Je tedy elipsou.



$$\oint_c \vec{f}\cdot\vec{ds} = \iint_{int\, c} \operatorname{rot}\vec{f}\cdot\vec{dp} = \left[\operatorname{rot}\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (0,0,0)\right] = \iint_{int\, c} \vec{0}\cdot\vec{dp} = 0.$$

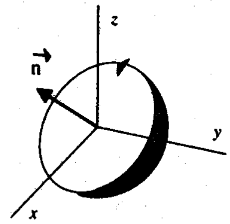
■

***Příklad* 596.** $\vec{f} = (-y, z, x)$, $c: x^2+y^2+z^2=a^2, 2x-y+2z=0$, orientace křivky je souhlasná s normálovým vektorem $\vec{n} = (2,-1,2)$.

Řešení : Křivka c je řezem kulové plochy rovinou procházející středem této plochy.

$$\oint_c \vec{f}\cdot\vec{ds} = \iint_{int\, c} \operatorname{rot}\vec{f}\cdot\vec{dp} =$$

$$= \iint_{int\, c} \operatorname{rot}\vec{f}\cdot\vec{n}^o\, dp =$$



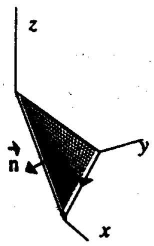
$$= \left[\begin{array}{l} \operatorname{rot}\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & z & x \end{vmatrix} = (-1,-1,1) \\ \vec{n}^o = \frac{(2,-1,2)}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{1}{3}(2,-1,2) \\ int\, c: x^2+y^2+z^2 \le a^2, 2x-y+2z=0 \end{array}\right] = \frac{1}{3}\iint_{int\, c} (-1,-1,1)\cdot(2,-1,2)\, dp =$$

$$= \frac{1}{3}\iint_{int\, c} dp = \frac{1}{3}\cdot S \quad (S \text{ je plošný obsah řezu}) = \frac{1}{3}\pi a^2.$$

■

***Příklad* 597.** $\vec{f} = (y^2, z^2, x^2)$, c je obvod trojúhelníka o vrcholech $A=[2,0,0]$, $B=[0,2,0]$, $C=[0,0,2]$, orientace křivky je souhlasná s normálovým vektorem $\vec{n} = (-1,-1,-1)$.

Řešení : $\displaystyle\oint_c \vec{f}\cdot\vec{ds} = \iint_{\triangle ABC} \operatorname{rot}\vec{f}\cdot\vec{dp} = \iint_{\triangle ABC} \operatorname{rot}\vec{f}\cdot\vec{n}^o\, dp =$



$$= \left[\begin{array}{c} \operatorname{rot}\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} = (-2z,-2x,-2y) \\ \vec{n}^o = \frac{(-1,-1,-1)}{\sqrt{3}} \\ \operatorname{rot}\vec{f}\cdot\vec{n}^o = (-2x,-2y,-2z)\cdot\frac{(-1,-1,-1)}{\sqrt{3}} = \frac{2x+2y+2z}{\sqrt{3}} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \iint\limits_{\triangle ABC} (x+y+z)\,dp = \begin{bmatrix} \triangle ABC: & x+y+z=2 \\ & z = 2-x-y \\ & dp = \sqrt{1+1+1}\,dx\,dy \\ & [x,y] \in \triangle OAB \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \iint\limits_{\triangle OAB} 2\cdot\sqrt{3}\,dx\,dy = 4P_{\triangle OAB} = 8. \qquad \blacksquare$$

598. $\vec{f} = (x,y,z)$, $c: y^2+z^2 = 1,\ x+z = 1$, orientace křivky je souhlasná s normálovým vektorem $(1,0,1)$. $[0]$

599. $\vec{f} = (x+1, x+y, 1-2z)$, c je obvod $\triangle\, ABC$, $A = [3,0,0]$, $B = [0,2,0]$, $C = [0,0,6]$, orientace křivky je souhlasná s normálovým vektorem $\vec{n} = (2,3,1)$. $[3]$

600. $\vec{f} = (yz, xz, xy)$, c je obvod $\triangle\, ABC$, $A = [1,0,0]$, $B = [0,2,0]$, $C = [0,0,2]$, orientace křivky je souhlasná s normálovým vektorem $\vec{n} = (2,1,1)$. $[0]$

601. $\vec{f} = (y,-z,x)$, $c: x^2+y^2+z^2 = a^2,\ x-y = 0$, orientace křivky je souhlasná s normálovým vektorem $(1,-1,0)$. $[\sqrt{2}\pi a^2]$

602. $\vec{f} = (-y,x,z)$, $c: x^2+y^2 = a^2,\ z = 5$, orientace křivky je souhlasná s jednotkovým vektorem $\vec{n}^o = (0,0,1)$. $[2\pi a^2]$

603. $\vec{f} = (z, 2, 5+z)$, $c: x^2+z^2 = a^2,\ y = 3$, orientace křivky je souhlasná s $\vec{n}^o = (0,1,0)$. $[\pi a^2]$

604. $\vec{f} = (y,z,x)$, $c: x^2+y^2 = 4,\ x+z = 0$, orientace křivky je souhlasná s $\vec{n} = (1,0,1)$. $[-8\pi]$

605. $\vec{f} = (xy, yz, xz)$, $c: y^2+z^2 = 1,\ x+z = 1$, orientace křivky je souhlasná s $\vec{n} = (1,0,1)$. $[-2\pi]$

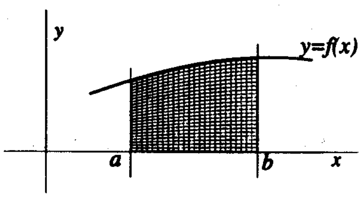
606. $\vec{f} = (z+1, x-y, y)$, c je průsečná křivka kulové plochy : $x^2+y^2+z^2 = a^2$ s rovinou $x+y+z = 0$, orientace křivky je souhlasná s normálou $\vec{n}$, svírající ostrý úhel s vektorem $\vec{k}$. $[\sqrt{3}\pi a^2]$

607. $\vec{f} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 2z+1\right)$, $c: x^2+y^2 = a^2,\ z = b$, orientace křivky c je proti hodinovým ručičkám, díváme-li se z bodu $[0,0,2b]$. $[0]$

608. $\vec{f} = (x^2+2y, y^2-3x, z^2+2x+3y)$, $c: x^2+y^2+z^2 = 6, z = x^2+y^2$, orientace křivky je souhlasná s $\vec{n} = (0,0,-1)$. $[10\pi]$

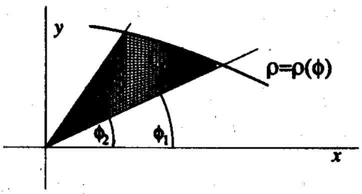
Přehled použití integrálů v geometrii a ve fyzice

I. Plošný obsah rovinného obrazce $D \subset E_2$ $\quad \boxed{P = \iint_D dx\,dy}$



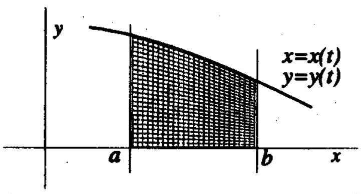
1) $D : \left\{ \begin{array}{c} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{array} \right\}$

$$P = \int_a^b f(x)\,dx$$



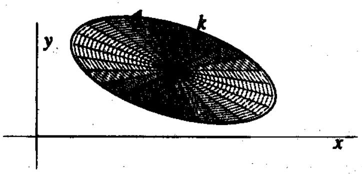
2) $D : \left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \le \phi \le \phi_2 \\ \rho = \rho(\phi) \end{array} \right\}$

$$P = \frac{1}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \rho^2(\phi)\,d\phi$$



3) $\left\{ \begin{array}{c} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t_1 \le t \le t_2 \end{array} \right\}$

$$P = \int_{t_1}^{t_2} y\dot{x}\,dt, \text{ kde } \begin{array}{c} a = x(t_1) \\ b = x(t_2) \end{array}$$



4) $P = \frac{1}{2} \oint_k x\,dy - y\,dx \overset{Green.v.}{=\!=} $

$$= \iint_{int\,k} dx\,dy$$

II. Objem tělesa $W \subset E_3$ $\quad \boxed{V = \iiint_W dx\,dy\,dz}$

1) $W = \{[x, y, z] \subset E_3; [x, y] \in B, 0 \le z \le f(x, y)\}$

$$V = \iint_B f(x, y)dx\,dy$$

2) W je rotační těleso vzniklé rotací křivky $y = f(x)$ $\left\{ \begin{array}{c} a \le x \le b \\ f(x) \ge 0 \end{array} \right\}$

kolem osy x : $\quad V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx,$ $\qquad$ kolem osy y : $\quad V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx.$

III. Délka křivky c $\quad \boxed{\ell = \int_c ds}$

1) $\quad c \subset E_2, \quad c : y = f(x), \quad a \le x \le b$

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

2) $c \subset E_2$, $c: P(t) = \Big(x(t), y(t)\Big)$, $t_1 \le t \le t_2$

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt$$

3) $c \subset E_2$, $c: \varrho = \varrho(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$

$$\ell = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\varrho^2 + (\varrho')^2}\, d\varphi$$

4) $c \subset E_3$, $c: P(t) = \Big(x(t), y(t), z(t)\Big)$, $t_1 \le t \le t_2$

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}\, dt$$

IV. Plošný obsah plochy $Q \subset E_3$ $\boxed{S = \iint_Q dp}$

1) $Q: z = f(x,y)$, $[x,y] \in B, B \subset E_2$

$$S = \iint_B \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

2) $Q: P(u,v) = \Big(p_1(u,v), p_2(u,v), p_3(u,v)\Big)$, $[u,v] \in B$

$$S = \iint_B |\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v|\, du\, dv$$

3) Q je rotační plocha vzniklá rotací křivky $c: y = f(x)$, $z = 0$
$a \le x \le b, f(x) \ge 0$ kolem osy x

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

obecněji $S = 2\pi \int_c y\, ds, c \subset E_2$

4) Q je část válcové plochy rovnoběžné s osou z, dané řídící křivkou $c \subset E_2$ a omezené rovinou $z = 0$ a plochou $z = f(x,y)$

$$S = \int_c f(x,y)\, ds$$

V. Hmotnost m útvaru $G \subset E_2$(resp.E$_3$), při hustotě $\varrho(X), X \in G$ $\boxed{m = \int_G \varrho(X)\, dX}$

1) G je rovinná deska $D \subset E_2$, $m = \iint_D \varrho(x,y)\, dx\, dy$

2) G je těleso $W \subset E_3$, $m = \iiint_W \varrho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$

3) G je oblouk křivky c

a) $c \subset E_2$, $m = \int_c \varrho(x,y)\, ds$

b) $c \subset E_3, \quad m = \int_c \varrho(x,y,z)\, ds$

4) G je plocha $Q \subset E_3, \quad m = \iint_Q \varrho(x,y,z)\, dp$

VI. Statický moment M útvaru G vzhledem k ose o (resp. k rovině α)

$$\boxed{\begin{array}{l} M_o = \int_G \mu_o(X) \cdot \varrho(X)\, dX, \\ M_\alpha = \int_G \mu_\alpha(X) \cdot \varrho(X)\, dX \end{array}},$$

kde $\mu_o(X)$ (resp. $\mu_\alpha(X)$) je vzdálenost libovolného bodu $X \in G$ od osy o (resp. od roviny α.)

1) G je rovinná deska $D \subset E_2$

$$M_x = \iint_D y \cdot \varrho(x,y)\, dx\, dy, \quad M_y = \iint_D x \cdot \varrho(x,y)\, dx\, dy$$

2) G je těleso $W \subset E_3$

a) vzhledem k ose, $M_x = \iiint_W \sqrt{y^2+z^2}\, \varrho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$; M_y, M_z analogicky

b) vzhledem k rovině, $M_{xy} = \iiint_W z \cdot \varrho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$; M_{xz}, M_{yz} analogicky

3) G je oblouk křivky c

a) $c \in E_2, \quad M_x = \int_c y \cdot \varrho(x,y)\, ds, \quad M_y = \int_c x \cdot \varrho(x,y)\, ds$

b) $c \in E_3, \quad M_x = \int_c \sqrt{y^2+z^2} \cdot \varrho(x,y,z)\, ds$; M_y, M_z analogicky

$M_{xy} = \int_c z \cdot \varrho(x,y,z)\, ds$; M_{xz}, M_{yz} analogicky

4) G je plocha $Q \subset E_3$

a) vzhledem k ose, $M_x = \iint_Q \sqrt{y^2+z^2} \cdot \varrho(x,y,z)\, dp$; M_y, M_z analogicky

b) vzhledem k rovině, $M_{xy} = \iint_Q z \cdot \varrho(x,y,z)\, dp$; M_{xz}, M_{yz} analogicky

Těžiště v $E_2 : T = \left[\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right]$, Těžiště v $E_3 : T = \left[\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m}\right]$

VII. Moment setrvačnosti I útvaru G vzhledem k ose o (resp. k rovině α resp. k bodu A)

$$\boxed{I_o = \int_G \mu_o^2(X) \cdot \varrho(X)\, dX},$$

kde $\mu_o(X)$ (resp. $\mu_\alpha(X)$ resp. μ_A) je vzdálenost libovolného bodu $X \in G$ od osy o (resp. od roviny α resp. od bodu A.)

např. pro těleso $W \subset E_3$:

$$I_z = \iiint_W (x^2+y^2) \cdot \varrho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$I_{yz} = \iiint_W x^2 \cdot \varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$I_{[0,0,0]} = \iiint_W (x^2+y^2+z^2) \cdot \varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

VIII. Práce A síly $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ podél orientované křivky $c \subset E_3$

$$\boxed{A = \int_c \vec{f} \cdot \vec{ds} = \int_c f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz}$$

Cirkulace Γ je práce po uzavřené křivce $\Gamma = \oint_c \vec{f} \cdot \vec{ds} =$

$= \oint_c f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz$. Je-li $c \subset E_2$, pak je $f_3 = 0, z = 0$

IX. Tok Φ vektororového pole $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ plochou $Q \subset E_3$ orientovanou jednotkovým normálovým vektorem $\vec{n}_0$. $\boxed{\Phi = \iint_Q \vec{f} \cdot \vec{dp}}$

$$\Phi = \iint_Q f_1\,dy\,dz + f_2\,dx\,dz + f_3\,dx\,dy = \iint_Q \vec{f} \cdot \vec{n}_o\,dp =$$

$= \pm \iint_{B(u,v)} \vec{f} \cdot (\mathbf{P}_u \times \mathbf{P}_v)\,du\,dv$, kde $P = P(u,v)$ je parametrizace plochy Q.

Doporučená literatura

[1] B.Budínský, J.Charvát : **Matematika II** SNTL/Alfa, Praha 1987 (*Podrobná, dobře a srozumitelně napsaná učebnice. V současnosti je též vydávána jako dvoudílné skriptum pro Stavební fakultu ČVUT.)*

[2] S.Čipera, M.Machalický : **Tématické celky pro přednášky z předmětu Matematika II - doplňkové skriptum** Ediční středisko ČVUT, Praha 1988 (*Soupis definic a vět s poznámkami .)*

[3] J.Neustupa, S.Kračmar : **Mathematics II** ČVUT, Praha 1998 (*Základní literatura pro přemět Matematika II vyučovaný v angličtině.)*

[4] K.Rektorys : **Přehled užité matematiky** SNTL Praha 1988 (*Rozsáhlá encyklopedie aplikované matematiky napsaná pro potřeby technických věd.)*