MB102 – 11. demonstrovaná cvičení
Vektorové prostory funkcí

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

3.5. 2011

Plán přednášky

Příklad 1. *Rozviňte do mocninné řady funkci* $f(x) = e^{-3x}$ *v bodě* 0 *a určete, pro která* $x \in \mathbb{R}$ *konverguje. Rozhodněte, zda je tato konvergence stejnoměrná.*

Příklad 1. *Rozviňte do mocninné řady funkci $f(x) = e^{-3x}$ v bodě 0 a určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje. Rozhodněte, zda je tato konvergence stejnoměrná.*

Řešení. $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n!} x^n$,
např. podílovým kriteriem zjistíme, že konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Příklad 2. *Udejte příklad posloupnosti* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *hladkých, Riemanovsky integrovatelných funkcí na intervalu* $\langle 0, 1\rangle$*, která bodově konverguje ke spojité funkci* f*, která je rovněž Riemanovsky integrovatelná, ale*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 f.$$

Příklad 2. *Udejte příklad posloupnosti* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *hladkých, Riemanovsky integrovatelných funkcí na intervalu* $\langle 0,1\rangle$*, která bodově konverguje ke spojité funkci* f*, která je rovněž Riemanovsky integrovatelná, ale*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n \neq \int_0^1 f.$$

Řešení.

$$f_n(x)=\begin{cases} ne^{-\frac{1}{nx-n^2x^2}} & \text{pro } x\in(0,\frac{1}{n}) \\ 0 & \text{jinak}\end{cases},$$

pro $n \geq 2$. $\square$

Příklad 3. *Určete následující limitu:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 3. *Určete následující limitu:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\, \mathrm{d}x.$$

Řešení. $\int_0^\infty \frac{1}{e^x} = 1.$ $\square$

Plán přednášky

Najděte ortonormální bázi vektorového prostoru generovaného funkcemi $\sin(x)$, $\cos(x)$ na intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$.

Určete kolmý průmět a vzdálenost funkce x od tohoto podprostoru.