$S_1(x) = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 \quad , \; S_1'(x) = 3a(x+1)^2 + 2b(x+1)$

$S_2(x) = c(x-1)^3 + d(x-1)^2 \quad , \; S_2''(x) = 3c(x-1)^2 + 2d(x-1)$

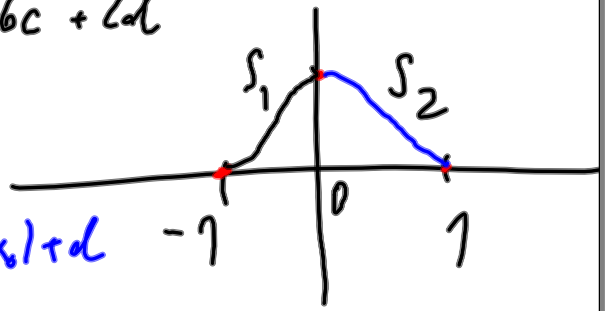
$S_1'' = 6a(x+1)+2b$

$S_2'' = 6c(x-1)+2d$

$S_1(0) = a + b = 1 = -c + d = S_2(0)$

$S_1'(0) = S_2'(0) \Leftrightarrow 3a + 2b = 3c - 2d$

$S_1''(0) = S_2''(0) \Leftrightarrow 6a + 2b = -6c + 2d$



$S = a \cdot (x-x_0)^3 + b(x-x_0)^2 + c(x-x_0) + d$

$S_1(x) = a(x+1)^3 + b(x+1)$, $S_1' = 3a(x+1)^2 + b$, $S_1'' = 6a(x+1)$

$S_2(x) = c(x-1)^3 + d(x-1)$, $S_2' = 3c(x-1)^2 + d$, $S_2'' = 6c(x-1)$

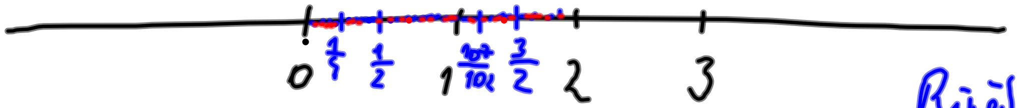
$S_1(0) = S_2(0) = 1: \quad a + b = -c - d$

$S_2'(0) = S_1'(0): \quad 3a + b = 3c + d$

$S_2''(0) = S_1''(0): \quad a = -c$

3 1-14:08

$A_1 = \{x \in \mathbb{Q},\ x^2 < 2\}$, $A_2 = \{x \in \mathbb{Q},\ x^2 > 2\}$



Bijekce mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}^+$

Ukážeme, že reálná čísla nelze seřadit do posloupnosti.
(neexistuje bijekce mezi $\mathbb{R}$ a $\mathbb{N}$):
Pro spor předpokládejme, že reálná čísla lze seřadit do posloupnosti:

x_1: $A, \underline{a_1}\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 \ldots$

x_2: $B, b_1\, \underline{b_2}\, b_3\, b_4\, b_5 \ldots$

x_3: $C, c_1\, c_2\, \underline{c_3}\, c_4\, c_5 \ldots$

x_4: $D, d_1\, d_2\, d_3\, \underline{d_4}\, d_5 \ldots$

Číslo

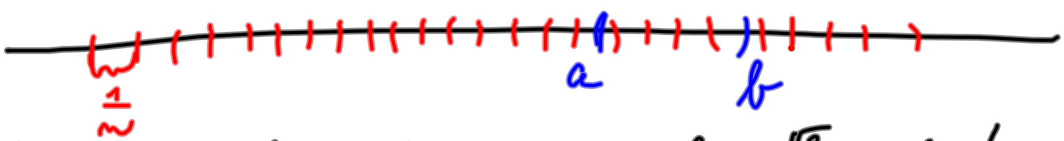
$0, r_1\, r_2\, r_3\, r_4 \ldots$

kde $r_1 \neq a_1$
$r_2 \neq b_2$
$r_3 \neq c_3$
$r_4 \neq d_4$
$\vdots$

určitě v dané posloupnosti z konstrukce nemůže být. Tedy reálná čísla nelze seřadit do posloupnosti.

Lemma. Nechť $(a; b)$ je interval, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak v tomto intervalu je jak racionální, tak iracionální číslo.

Důkaz: Položme $d = b - a$. Volme n tak, aby $\frac{1}{n} < d$, neboli $n > \frac{1}{d}$. Potom zřejmě nějaký prvek množiny $\left\{ \frac{p}{n} \mid p \in \mathbb{Z} \right\}$ náleží do int. (a, b).



Pro iracionální: volme n tak, aby $\frac{\sqrt{2}}{n} < d$ $\left(n > \frac{\sqrt{2}}{d}\right)$.

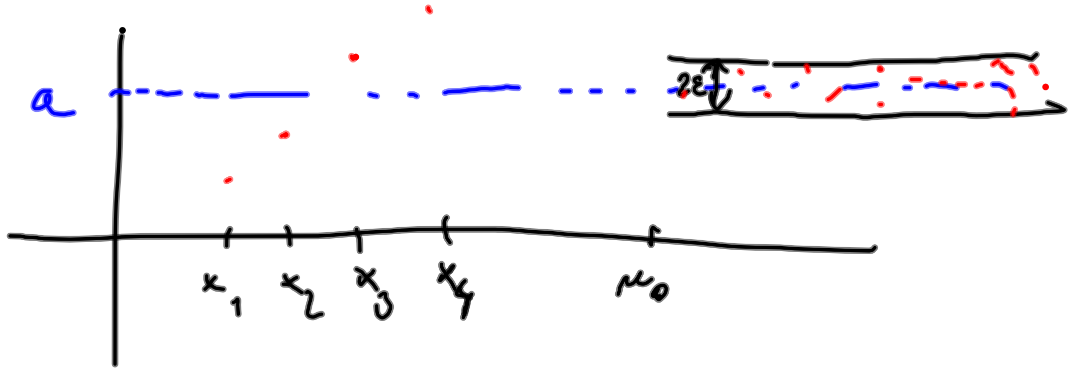
$$\left\{ \frac{p\sqrt{2}}{n} \mid p \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$10^{10^{10^{10^{10^{10^{10^{10^{10^{10^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}}}}}}$$

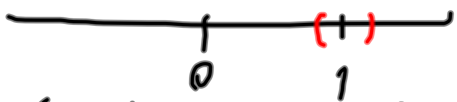
„$\Rightarrow$" nechť $s = \inf A$. Volme libovolné $\varepsilon > 0$.
Protože $s + \varepsilon > s$, tak $s + \varepsilon$ nemůže být dolní závorou A (jinak by s nebylo infimem).
Tedy $\exists x \in A$ takové, že $x < s + \varepsilon$.

„$\Leftarrow$" Ukažme, že dolní závora splňující (2) je infimem: stačí ukázat, že je ze všech dolních závor největší. Kdyby tomu tak nebylo, tak by ex. dolní závora b množiny A a $b > s$. Uvažme $\varepsilon = b - s > 0$. Pak dle (2) ex. $x \in A$ tak, že $x < s + \varepsilon = b$. Tedy b není dolní závorou.
Tedy s je největší dolní závorou, tedy $s = \inf A$.

Řekneme, že a je limitou posl. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,
jestliže $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)\ |x_n - a| < \varepsilon$



$(0,1\rangle$



Množina není otevřená, neboť libovolné okolí bodu 1 obsahuje body mimo int. $(0,1\rangle$.

Uvažme posl. $x_n = \frac{1}{n}$. Pak $x_n \in (0,1\rangle$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Ale $0 \notin (0,1\rangle$. Tudíž $(0,1\rangle$ není uzavřená.

3 1-15:23

Hromadné body: ukážeme, že libovolné reálné číslo x je hromadným bodem mn. $\mathbb{Q}$: vybereme racionální x_n z intervalu $\left(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right)$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, neboť $|x_n - x| < \frac{1}{n}$

Hraničním bodem je rovněž lib. reálné číslo, neboť libovolné okolí lib. reálného čísla obsahuje jak racionální, tak iracionální číslo.

$\emptyset$

$\langle 0, 1 \rangle$