5.1. Nalezněte hromadné, izolované, hraniční a vnitřní body mno ina

$$\mathbb{N}, \quad \mathbb{Q}, \quad X = \{x \in \mathbb{R};\, 0 \le x < 1\}$$

v $\mathbb{R}$.

Řešení. Mno ina $\mathbb{N}$. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ očividně platí

$$\mathcal{O}_1\,(n) \cap \mathbb{N} = (n-1, n+1) \cap \mathbb{N} = \{n\}.$$

Existuje tedy okolí bodu $n \in \mathbb{N}$ v $\mathbb{R}$, které obsahuje pouze jeden prvek mno iny $\mathbb{N}$ (pochopitelně právě uva ované n), tj. ka dý bod $n \in \mathbb{N}$ je izolovaný. Mno ina vnitřních bodů je proto prázdná (je-li bod izolovaný, nemů e být vnitřní). Bod $a \in \mathbb{R}$ je pak hromadným bodem A právě tehdy, kdy ka dé jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů A. Ov em mno ina

$$\mathcal{O}_1\,(a) \cap \mathbb{N} = (a-1, a+1) \cap \mathbb{N}, \quad \text{přičem } a \in \mathbb{R},$$

je konečná, z čeho plyne, e $\mathbb{N}$ hromadné body nemá. To, e tato mno ina je konečná, dále implikuje

$$\delta_b := \inf_{n \in \mathbb{N}} |\, b - n \,| = \inf_{n \in \mathcal{O}_1(b) \cap \mathbb{N}} |\, b - n \,| > 0 \quad \text{pro } b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

Odsud máme $\mathcal{O}_{\delta_b}\,(b) \cap \mathbb{N} = \emptyset$, tj. ádné $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ není hraničním bodem $\mathbb{N}$. Současně víme, e ka dý bod dané mno iny, který není vnitřním bodem, je nutně jejím hraničním bodem. Mno ina hraničních bodů tak obsahuje $\mathbb{N}$. Shrneme-li to, mno ina hraničních bodů $\mathbb{N}$ je $\mathbb{N}$.

Mno ina $\mathbb{Q}$. Racionální čísla tvoří tzv. hustou podmno inu mno iny v ech reálných čísel. To znamená, e ke ka dému reálnému číslu konverguje posloupnost racionálních čísel (představme si např. nekonečný desetinný rozvoj reálného čísla a jemu odpovídající posloupnost, kdy v následujícím členu přidáváme dal í cifru rozvoje). O této posloupnosti lze navíc předpokládat, e v echny její členy jsou navzájem různé (na poslední pozici konečného desetinného rozvoje se mů eme záměrně dopou tět chyby nebo kupř. číslu 1 přiřadíme desetinný rozvoj $0,999\ldots$ apod.). Mno ina hromadných bodů $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ je proto celé $\mathbb{R}$ a ka dý bod $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je hraniční. Zvlá tě dostáváme, e libovolné δ-okolí

$$\mathcal{O}_\delta \left(\frac{p}{q} \right) = \left(\frac{p}{q} - \delta,\, \frac{p}{q} + \delta \right), \quad \text{kde } p, q \in \mathbb{Z},\, q \ne 0,$$

racionálního čísla p/q musí obsahovat nekonečně mnoho racionálních čísel, co dává neexistenci izolovaných bodů. Číslo $\sqrt{2}/10^n$ není racionální pro ádné $n \in \mathbb{N}$. Předpokladem opaku (opět $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \ne 0$)

$$\frac{\sqrt{2}}{10^n} = \frac{p}{q}, \quad \text{tj.} \quad \sqrt{2} = \frac{10^n\, p}{q},$$

toti okam itě obdr íme spor – o číslu $\sqrt{2}$ víme, e není racionální. Libovolné okolí racionálního čísla p/q tak zároveň obsahuje nekonečně mnoho reálných čísel $p/q + \sqrt{2}/10^n$ ($n \in \mathbb{N}$), která nejsou racionální (mno ina $\mathbb{Q}$ jako těleso je uzavřená vzhledem k odečítání). V echny body $p/q \in \mathbb{Q}$ jsou tudí rovně hraniční a vnitřní body mno ina $\mathbb{Q}$ nemá.

Mno ina $X = [0, 1)$. Nech $a \in [0, 1)$ je zvoleno libovolně. Posloupnosti se členy (pro dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$)

$$a + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \subset [0, 1)$$

zjevně konvergují po řadě k hodnotám a, 1. Snadno jsme tak ukázali, e mno ina hromadných bodů obsahuje interval $[0, 1]$. Jiné hromadné body neexistují: pro jakékoli $b \notin [0, 1]$ existuje $\delta > 0$ takové, e $\mathcal{O}_\delta(b) \cap [0, 1] = \emptyset$ (pro $b < 0$ postačuje polo it $\delta = -b$ a pro $b > 1$ potom $\delta = b - 1$). Proto e ka dý bod intervalu $[0, 1)$ je hromadným bodem, mno ina izolovaných bodů je prázdná. Pro $a \in (0, 1)$ označme men í z kladných čísel a, $1 - a$ jako δ_a. Uvá íme-li

$$\mathcal{O}_{\delta_a}(a) = (a - \delta_a,\, a + \delta_a) \subseteq (0, 1), \quad a \in (0, 1),$$

vidíme, e libovolný bod intervalu $(0, 1)$ je vnitřním bodem intervalu $[0, 1)$. Pro ka dé $\delta \in (0, 1)$ je

$$\mathcal{O}_\delta(0) \cap [0, 1) = (-\delta,\, \delta) \cap [0, 1) = [0, \delta),$$
$$\mathcal{O}_\delta(1) \cap [0, 1) = (1 - \delta,\, 1 + \delta) \cap [0, 1) = (1 - \delta, 1),$$

tj. ka dé δ-okolí bodu 0 obsahuje jisté body intervalu $[0, 1)$ a hodnoty z intervalu $(-\delta, 0)$ a ka dé δ-okolí bodu 1 má neprázdný průnik s intervaly $[0, 1)$, $[1, 1 + \delta)$. Body 0 a 1 jsou tedy hraničními body. Celkem jsme zjistili, e mno ina v ech vnitřních bodů odpovídá intervalu $(0, 1)$ a mno ina hraničních bodů je $\{0, 1\}$. Stačí si uvědomit, e bod nemů e být současně vnitřní a hraniční a e hraniční bod musí být izolovaný, nebo hromadný. □

5.2. Stanovte

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n}.$$

Řešení. Zřejmě je $\sqrt[n]{n} \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Mů eme tedy polo it

$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \quad \text{pro jistá čísla} \quad a_n \geq 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

U itím binomické věty získáváme

$$n = (1 + a_n)^n = 1 + \binom{n}{1} a_n + \binom{n}{2} a_n^2 + \cdots + a_n^n, \quad n \geq 2\, (n \in \mathbb{N}).$$

Odsud plyne odhad (v echna čísla a_n jsou nezáporná)

$$n \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{n\,(n-1)}{2}\, a_n^2, \quad n \geq 2\, (n \in \mathbb{N}),$$

tj. po úpravě máme

$$0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \quad n \geq 2\, (n \in \mathbb{N}).$$

Podle Věty o třech limitách je

$$0 = \lim_{n \to \infty} 0 \leq \lim_{n \to \infty} a_n \leq \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0.$$

Obdr eli jsme tak výsledek

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + a_n) = 1 + 0 = 1.$$

Poznamenejme, e dal í u ití Věty o třech limitách mj. dává

$$1 = \lim_{n\to\infty} 1 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

pro libovolné reálné číslo $c \geq 1$. □

5.3. Spočítejte

(a)

$$\lim_{x\to\pi/3} \sin x;$$

(b)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2};$$

(c)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\arccos \frac{1}{x+1}\right)^3;$$

(d)

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x^4, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} (\sin x).$$

Řešení. Případ (a). Připomeňme, e funkce je spojitá v jistém bodě, kdy je v tomto bodě její limita rovna funkční hodnotě. O funkci $y = \sin x$ v ak víme, e je spojitá na $\mathbb{R}$. Dostáváme tak

$$\lim_{x\to\pi/3} \sin x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Případ (b). Přímé dosazení $x = 2$ dává nulový čitatel i jmenovatel. Přesto je příklad velmi snadno ře itelný. Jednoduché krácení

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x-1} = \frac{2+3}{2-1} = 5$$

toti vedlo ke správnému výsledku (díky spojitosti obdr ené funkce v bodě $x_0 = 2$). Uvědomme si zde, e limitu mů eme počítat pouze z funkčních hodnot v libovolně malém okolí daného bodu x_0 a e přitom limita nezávisí na hodnotě přímo v tomto bodě. Při počítání limit tedy mů eme vyu ívat krácení a roz iřování výrazů, které nemění hodnoty uva ované funkce v libovolně zvoleném ryzím okolí bodu x_0.

Případ (c). Dvojnásobná záměna pořadí limity a vněj í funkce převádí původní limitu na

$$\left(\arccos\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1}\right)\right)^3.$$

Lehce určíme, e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

Nebo je funkce $y = \arccos x$ spojitá v bodě 0, ve kterém nabývá hodnoty $\pi/2$, a funkce $y = x^3$ je spojitá v bodě $\pi/2$, platí

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\arccos\frac{1}{x+1}\right)^3 = \left(\arccos\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}\right)\right)^3 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3.$$

Případ (d). Funkce $y = \operatorname{arctg} x$ má vlastnosti „u itečné při počítání limit“ – je spojitá a prostá (rostoucí) na celé reálné ose. Tyto vlastnosti v dy (bez dal ích podmínek či omezení) umo ňují vnořit vy etřovanou limitu do argumentu takové reálné funkce. Proto uva ujme

$$\operatorname{arctg}\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\right),\quad \operatorname{arctg}\left(\lim_{x\to-\infty}x^4\right),\quad \operatorname{arctg}\left(\lim_{x\to-\infty}\sin x\right).$$

Zřejmě je

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0,\qquad \lim_{x\to-\infty}x^4 = +\infty$$

a limita $\lim_{x\to-\infty}\sin x$ neexistuje, co ji implikuje

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \operatorname{arctg} 0 = 0,\qquad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x^4 = \lim_{y\to+\infty}\operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}$$

a neexistenci poslední limity. □

5.4. Vyčíslete limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right).$$

Řešení. Ke stanovení limity postačuje její členy vyjádřit ve tvaru

$$2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}\cdots 2^{\frac{1}{2^n}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}.$$

Dostáváme tak

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right) = \lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$$
$$= 2^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)} = 2^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}}.$$

Ze známého vzorce pro součet geometrické řady

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2,\quad \text{tj.}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 2-1 = 1,$$

plyne výsledek

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right) = 2^1 = 2.$$

□

5.5. Určete

(a)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{(x-2)^6};$$

(b)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{(x-2)^5};$$

(c)

$$\lim_{x\to +\infty} \left(2+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}};$$

(d)

$$\lim_{x\to +\infty} x^{-x}.$$

Řešení. V tomto příkladu se budeme věnovat tzv. neurčitým výrazům. Přesněji řečeno, budeme se zabývat situacemi, kdy se o ně nejedná. Čtenáři doporučujeme, aby neurčité výrazy vnímal jako pojem pomocný, který mu má pouze usnadnit orientování se při prvním počítání limit, nebo obdr ený neurčitý výraz pouze znamená, e jsme „nic nezjistili“. Víme, e limita součtu je součet limit, limita součinu je součin limit a e limita podílu je podíl limit, pokud jednotlivé limity existují a nezískáme-li některý z výrazů $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $0/0$, ∞/∞, o kterých právě hovoříme jako o neurčitých. Pro úplnost dodejme, e tato pravidla mů eme kombinovat (pro limity v ech slo ek určené současně) a e za neurčitý výraz pak pova ujeme také ten, jen obsahuje alespoň jeden neurčitý výraz. Např. tedy výrazy

$$-\infty+\infty=\infty-\infty, \quad \frac{-\infty}{3+\infty}=-\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{(-\infty)^3+\infty}=0\cdot(\infty-\infty)^{-1}$$

označujeme jako neurčité a o výrazech

$$-\infty-\infty, \quad \frac{0}{3+\infty}, \quad \frac{0}{(-\infty)^3-\infty}$$

mů eme říci, e jsou „určité“ (pro ně jsme schopni ihned příslu nou limitu stanovit – výrazy odpovídají po řadě hodnotám $-\infty, 0, 0$).

V případě (a) podíl limit čitatele a jmenovatele dává výraz $4/0$. Zápis, ve kterém dělíme nulou, je sám o sobě přinejmen ím ne ádoucí (později bychom se mu měli být schopni vyvarovat). Přesto nám umo ní stanovit výsledek: nejedná se o neurčitý výraz. V imněme si, e jmenovatel se blí í k nule zprava (pro $x\neq 2$ je $(x-2)^6>0$). To zapisujeme jako $4/+0$. Čitatel a jmenovatel tak mají stejné znaménko v jistém ryzím okolí bodu $x_0=2$ a lze říci, e jmenovatel je v limitě „nekonečněkrát men í“ ne čitatel, tj.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{(x-2)^6}=+\infty,$$

co odpovídá polo ení $4/+0=+\infty$ (podobně se klade $4/-0=-\infty$).

Při určování druhé limity lze postupovat analogicky. Proto e čísla $a \in \mathbb{R}$ a a^5 mají stejná znaménka, dostáváme

$$\lim_{x\to 2+} \frac{x+2}{(x-2)^5} = +\infty \neq -\infty = \lim_{x\to 2-} \frac{x+2}{(x-2)^5},$$

tj. oboustranná limita neexistuje. Tomu odpovídá zápis $4/\pm 0$ (nebo obecněj í $a/\pm 0$, $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}^*$), který je „určitým výrazem“. Při důsledném oddělování symbolů $+0$ a -0 od ± 0 v dy $a/\pm 0$ pro $a \neq 0$ znamená, e limita neexistuje.

Případy (c), (d). Je-li $f(x) > 0$ pro v echna uva ovaná $x \in \mathbb{R}$, platí

$$f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = \mathrm{e}^{g(x)\cdot \ln f(x)}.$$

Vyu ijeme-li toho, e exponenciální funkce je spojitá a prostá na reálné přímce, mů eme nahradit limitu

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$$

za

$$\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0}(g(x)\cdot \ln f(x))}.$$

Připomeňme, e jedna z těchto limit existuje právě tehdy, kdy existuje druhá; a doplňme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} (g(x)\cdot \ln f(x)) = a \in \mathbb{R} \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^a,\\
\lim_{x\to x_0} (g(x)\cdot \ln f(x)) = +\infty \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty,\\
\lim_{x\to x_0} (g(x)\cdot \ln f(x)) = -\infty \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 0.
\end{aligned}$$

Mů eme tudí psát

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x)},$$

jestli e obě limity vpravo existují a neobdr íme-li neurčitý výraz $0\cdot\infty$. Není obtí né si uvědomit, e tento neurčitý výraz lze získat pouze ve třech případech odpovídajících zbylým neurčitým výrazům 0^0; ∞^0; 1^∞, kdy postupně je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \qquad &\text{a} \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0;\\
\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \qquad &\text{a} \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0;\\
\lim_{x\to x_0} f(x) = 1 \qquad &\text{a} \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty.
\end{aligned}$$

V ostatních případech nám tedy znalost (a pochopitelně existence) limit

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \qquad \lim_{x\to x_0} g(x)$$

umo ňuje uvést výsledek (při dodefinování některých zápisů)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Proto e

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}x=+\infty,$$

je

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=2^0=1;$$
$$\lim_{x\to+\infty}x^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^x=0$$

nebo

$$\lim_{x\to+\infty}x^{-x}=\lim_{x\to+\infty}(x^x)^{-1}=0.$$

Poslední výsledek pak bychom mohli vyjádřit zápisem $0^\infty=0$ či $\infty^\infty=\infty$, $\infty^{-1}=0$ (zdůrazněme, e se nejedná o neurčité výrazy).

Přesto e jsme kladli důraz na to, aby čtenář raději upřednostňoval úvahy o limitním chování funkcí před katulkováním výrazů na určité a neurčité (a tyto pojmy vnímal jen jako pomocné), je snad dobře patrný důvod, proč se budeme nadále zabývat předev ím neurčitými výrazy. □

5.6. Vypočítejte

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x+\pi x^2}{2\cos x-1-x^2};$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{x+1}+x^5-4x}{3^x+2^x+x^2};$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x-8x^6-2^x-167}{3^x-45x-\sqrt{11}\pi^{x+12}};$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-\sin^3 x+x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+2x+x^2}}.$$

Řešení. Vydělíme-li v případě první z limit čitatele i jmenovatele polynomem x^2, obdr íme

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x+\pi x^2}{2\cos x-1-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sin x}{x^2}+\pi}{\frac{2\cos x-1}{x^2}-1}.$$

Ohraničenost výrazů

$$|\sin x|\le 1,\quad |2\cos x-1|\le 3\quad \text{pro}\quad x\in\mathbb{R}$$

a $x^2\to+\infty$ pro $x\to+\infty$ pak dávají výsledek

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sin x}{x^2}+\pi}{\frac{2\cos x-1}{x^2}-1}=\frac{0+\pi}{0-1}=-\pi.$$

V přede lé úvaze jsme vlastně pou ili Větu o třech limitách a zápis $c/\infty=0$ platný pro $c\in\mathbb{R}$ (nebo přímo ohr./$\infty=0$, kde „ohr.“ značí ohraničenou funkci).

Tento postup lze zobecnit. Pro limitu tvaru

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_m(x)}{g_1(x)+g_2(x)+\cdots+g_n(x)},$$

přičem

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_i(x)}{f_1(x)} = 0, \quad i\in\{2,\ldots,m\},$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g_i(x)}{g_1(x)} = 0, \quad i\in\{2,\ldots,n\},$$

platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_m(x)}{g_1(x)+g_2(x)+\cdots+g_n(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

pokud limita na pravé straně existuje. Je přitom výhodné si uvědomit (třetí z limit lze určit např. pomocí l'Hospitalova pravidla, se kterým se seznámíme později), e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{c}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{b^x} = 0$$

pro

$$c\in\mathbb{R}, \quad 0<\alpha<\beta, \quad 1<a<b.$$

Odtud ihned plyne

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^{x+1}+x^5-4x}{3^x+2^x+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\cdot 3^x}{3^x} = 3;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4^x-8x^6-2^x-167}{3^x-45x-\sqrt{11}\pi^{x+12}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4^x}{-\sqrt{11}\pi^{12}\cdot\pi^x} = -\infty.$$

Uvědomíme-li si, e je

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \geq 1,$$

stejně snadno dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-\sin^3 x + x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+2x+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

□

5.7. Vyčíslete limity

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right).$$

Řešení. Nebo pro ka dé přirozené číslo $k\geq 2$ je (provádíme tzv. rozklad na parciální zlomky – budeme jej probírat u integrování racionálních lomených funkcí)

$$\frac{1}{(k-1)\,k} = \frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},$$

platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)=$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1.$$

Poznamenejme, e stanovení této limity je důle ité: určuje součet jedné z tzv. teleskopických řad (se kterou pracoval ji Johann I. Bernoulli).

Ke stanovení druhé limity vyu ijeme Větu o třech limitách. Odhady

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\geq\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

pro $n\in\mathbb{N}$ dávají

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)\leq\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Proto e

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2}}=1,\quad\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2}}=1,$$

je rovně

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

$\square$

5.8. Spočtěte

(a)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x};$$

(b)
$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{\cos(2x)};$$

(c)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^4}\left(\sqrt[3]{x^2+2x+3}-\sqrt[3]{x^2+2x+2}\right)\right).$$

Řešení. V echny uvedené limity vypočítáme pomocí vhodného roz íření zadaného výrazu. V případě první limity vynásobíme čitatele i jmenovatele výrazem

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$$

a vyu ijeme známého vztahu $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Takto obdr íme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1.\end{aligned}$$

Podobně vypočítáme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{\cos(2x)}&=\lim_{x\to\pi/4}\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{(\cos x+\sin x)\cos(2x)}\\&=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{(\cos x+\sin x)\cos(2x)}\\&=\lim_{x\to\pi/4}\frac{1}{\cos x+\sin x}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

U provedeného krácení připomeňme identitu

$$\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Abychom mohli při určování poslední limity pou ít

$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3,$$

k roz íření potřebujeme výraz

$$\sqrt[3]{\left(x^2+2x+3\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+2x+3}\cdot\sqrt[3]{x^2+2x+2}+\sqrt[3]{\left(x^2+2x+2\right)^2},$$

který odpovídá a^2+ab+b^2, resp. volíme

$$a=\sqrt[3]{x^2+2x+3},\qquad b=\sqrt[3]{x^2+2x+2}.$$

Tímto roz ířením převedeme limitu ze zadání na

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4}\left(\left(x^2+2x+3\right)-\left(x^2+2x+2\right)\right)}{\sqrt[3]{\left(x^2+2x+3\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+2x+3}\cdot\sqrt[3]{x^2+2x+2}+\sqrt[3]{\left(x^2+2x+2\right)^2}},$$

tj.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{\left(x^2+2x+3\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+2x+3}\cdot\sqrt[3]{x^2+2x+2}+\sqrt[3]{\left(x^2+2x+2\right)^2}}.$$

Poslední limitu umíme snadno vyčíslit. Víme toti , e je určena pouze jedním členem v čitateli a jedním ve jmenovateli, a to ax^p pro největ í p (v tomto případě je uva ovaný člen ve jmenovateli rozdělen na několik sčítanců). Platí tudí

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{\left(x^2+2x+3\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+2x+3}\cdot\sqrt[3]{x^2+2x+2}+\sqrt[3]{\left(x^2+2x+2\right)^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{\left(x^2\right)^2}+\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{\left(x^2\right)^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{3}.$$

Celkem tak je

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^4}\left(\sqrt[3]{x^2+2x+3}-\sqrt[3]{x^2+2x+2}\right)\right) = \frac{1}{3}.$$

□

5.9. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ určete limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+2nx)^n-(1+nx)^{2n}}{x^2}.$$

Řešení. Podle binomické věty je

$$(1+2nx)^n = 1+\binom{n}{1}2nx+\binom{n}{2}(2nx)^2+P\left(x\right)x^3, \quad x\in\mathbb{R},$$
$$(1+nx)^{2n} = 1+\binom{2n}{1}nx+\binom{2n}{2}(nx)^2+Q\left(x\right)x^3, \quad x\in\mathbb{R}$$

pro jisté polynomy P, Q. Raději vyzdvihněme, e předchozí vyjádření skutečně platí pro v echna $n \in \mathbb{N}$. Pro $n = 1$ si stačí uvědomit, e klademe $\binom{1}{2} = 0$ a e polynomy P, Q mohou být identicky rovny nule. Dostáváme tedy

$$(1+2nx)^n = 1+2n^2x+2n^3\left(n-1\right)x^2+P\left(x\right)x^3, \quad x\in\mathbb{R},$$
$$(1+nx)^{2n} = 1+2n^2x+n^3\left(2n-1\right)x^2+Q\left(x\right)x^3, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Pouhé dosazení a jednoduché úpravy ji dávají

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+2nx)^n-(1+nx)^{2n}}{x^2} =$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(2n^3\left(n-1\right)-n^3\left(2n-1\right)\right)x^2+\left(P(x)-Q(x)\right)x^3}{x^2} =$$
$$\lim_{x\to 0}\left(-n^3+\left(P(x)-Q(x)\right)x\right) = -n^3+0 = -n^3.$$

□

5.10. Spočítejte

$$\lim_{x\to\pi/4} \left(\operatorname{tg} x\right)^{\operatorname{tg}(2x)}.$$

Řešení. Limity typu $1^{\pm\infty}$ (jako je v zadání) lze počítat podle vzorce

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0}\left(\left(f(x)-1\right)g(x)\right)},$$

jestli e limita na pravé straně existuje a $f(x) \neq 1$ pro x z jistého ryzího okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Určeme proto

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi/4} ((\operatorname{tg} x - 1) \operatorname{tg}\,(2x)) &= \lim_{x\to\pi/4} \left(\left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1 \right) \frac{\sin (2x)}{\cos (2x)} \right) \\ &= \lim_{x\to\pi/4} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\cos x} \cdot \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \right) \\ &= \lim_{x\to\pi/4} -\frac{2 \sin x}{\cos x + \sin x} = -\frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = -1.\end{aligned}$$

Odtud máme

$$\lim_{x\to\pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}\,(2x)} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Doplňme, e pou itý vzorec platí obecněji pro „typ 1^{cokoli}“, tj. bez kladení jakýchkoli podmínek týkajících se limity $\lim_{x\to x_0} g(x)$, která tak ani nemusí existovat. □

5.11. Uka te, e je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Řešení. Uva ujme jednotkovou čtvrtkru nici v prvním kvadrantu a její bod $[\cos x, \sin x]$, $x \in (0, \pi/2)$. Délka kruhového oblouku mezi body $[\cos x, \sin x]$ a $[1, 0]$ je rovna x. Zřejmě tedy je

$$\sin x < x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Hodnotu $\operatorname{tg} x$ potom vyjadřuje délka úsečky s krajními body $[1, \sin x / \cos x]$ a $[1, 0]$. Vidíme, e je (příp. si nakreslete obrázek)

$$x < \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Tato nerovnost rovně vyplývá z toho, e trojúhelník s vrcholy $[0, 0]$, $[1, 0]$, $[1, \operatorname{tg} x]$ má očividně vět í obsah ne uva ovaná kruhová výseč. Dohromady jsme získali

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

tj.

$$\begin{aligned} 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, &\quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x, &\quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Z Věty o třech limitách nyní plynou nerovnosti

$$1 = \lim_{x\to 0+} 1 \geq \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x\to 0+} \cos x = \cos 0 = 1.$$

Dokázali jsme tak, e

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Funkce $y = (\sin x)/x$ definovaná pro $x \neq 0$ je ov em sudá, a tudí je

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Proto e obě jednostranné limity existují a jsou si rovny, existuje oboustranná limita a platí pro ni

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Poznamenejme je tě, e uvedenou limitu lo velmi snadno vyčíslit za pomoci l'Hospitalova pravidla. □

5.12. Stanovte limity

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin^2 x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\,\mathrm{tg}^2\, x}{5\,x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\,(3x)}{\sin(5x)};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{5x}-\mathrm{e}^{2x}}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{5x}-\mathrm{e}^{-x}}{\sin(2x)}.$$

Řešení. Při určování těchto limit vyu ijeme znalosti limit ($a \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

Víme tedy, e je

$$\mathrm{e}^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

Substituce $m = n - 1$ dává

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{m}{m+1}\right)^m \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{m}{m+1}.$$

Celkem máme

$$\mathrm{e}^{-1} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{m}{m+1}\right)^m \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{m}{m+1}.$$

Druhá z limit je zjevně rovna 1. Kdy změníme označení (nahradíme n za m), mů eme napsat výsledek

$$\mathrm{e}^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Dále platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^0 = 1$$

a

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{n} = 0.$$

Upozorněme, e první z přede lých vyčíslení vyplývá z limit

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = \mathrm{e}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

a druhé potom z

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}^{-1}, \qquad \lim_{n\to\infty} n = +\infty,$$

přičem klademe $\mathrm{e}^{-\infty} = 0$ (zápis označuje $\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x = 0$ – jedná se o určitý výraz).

Snadno lze získat

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0}\sin x \cdot \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 0\cdot 1 = 0.$$

Zřejmě je

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1^{-1} = 1$$

a limita

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}$$

neexistuje (zapisujeme $1/\pm 0$). Kdybychom tedy k výpočtu limity

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin^2 x}$$

u ili pravidla o limitě součinu, obdr eli bychom $1\cdot 1/\pm 0 = 1/\pm 0$. To znamená, e tato limita neexistuje (opět jde o určitý výraz). Ke stanovení

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$$

pou ijeme identitu $x = \sin(\arcsin x)$ platnou pro $x \in (-1,1)$, tj. v jistém okolí bodu 0. Pomocí substituce $y = \arcsin x$ dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = 1.$$

Poznamenejme, e $y \to 0$ plyne z dosazení $x = 0$ do $y = \arcsin x$ a ze spojitosti této funkce v počátku (to také zaručuje, e jsme tuto substituci mohli „bez obav“ zavést).

Ihned vidíme, e je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{3\,\mathrm{tg}^2\,x}{5\,x^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\right)\\ &= \frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{3}{5}\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Vhodné roz íření a substituce dávají

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{5x}{\sin(5x)}\cdot\frac{3}{5}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin(5x)}\cdot\frac{3}{5}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}\cdot\frac{3}{5} = 1\cdot 1\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Pomocí přede lého výsledku pak lehce spočítáme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,(3x)}{\sin(5x)} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}\cdot\frac{1}{\cos(3x)}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(3x)} = \frac{3}{5}\cdot 1 = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Podobně mů eme stanovit

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{5x}-\mathrm{e}^{2x}}{x} &= \lim_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^{2x}\,\frac{\mathrm{e}^{(5-2)x}-1}{(5-2)x}\,(5-2)\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{3x}\cdot 3\\ &= \mathrm{e}^0\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^y-1}{y}\cdot 3 = 1\cdot 1\cdot 3 = 3\end{aligned}$$

a rovně

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{5x}-\mathrm{e}^{-x}}{\sin(2x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{5x}-1}{\sin(2x)}-\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{\sin(2x)}\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{5x}-1}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\frac{5}{2}-\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{-x}\cdot\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{5x}-1}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\frac{5}{2}-\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{-x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{\mathrm{e}^{u}-1}{u}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}\cdot\frac{5}{2}-\lim_{v\to 0}\frac{\mathrm{e}^{v}-1}{v}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}+\frac{1}{2} = 3.$$

□

5.13. Vypočtěte limity

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{x\sin x};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Řešení. Spojením dříve prezentovaných postupů s jedním důle itým výsledkem

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

snadno získáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{x\sin x}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)}{x\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos^2 x\right)+\sin^2 x}{x\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}2\frac{\sin x}{x}=2;\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2\left(1+\cos x\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2\left(1+\cos x\right)}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Dodejme, e jsme také mohli hned vyu ít vyjádření

$$1-\cos(2x)=2\sin^2 x,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

□

5.14. Bez pou ití Věty o třech limitách doka te, e funkce

$$R(x)=\begin{cases}x, & x\in\left\{\frac{1}{n};\, n\in\mathbb{N}\right\};\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{n};\, n\in\mathbb{N}\right\}\end{cases}$$

je spojitá v bodě 0.

Řešení. Funkce R je spojitá v bodě 0, právě kdy je

$$\lim_{x\to 0}R(x)=R(0)=0.$$

Z definice limity uká eme, e tato limita se skutečně rovná 0. Při „obvyklém" značení je $a=0$, $x_0=0$. Nech $\delta>0$ je nadále libovolné. Pro jakékoli $x\in(-\delta,\delta)$ je $R(x)=0$, nebo $R(x)=x$, a tudí (v obou případech) dostáváme $R(x)\in(-\delta,\delta)$. Jinými slovy, vezmeme-li libovolné δ-okolí $(-\delta,\delta)$ hodnoty a a přiřadíme-li mu $(-\delta,\delta)$ (jako okolí bodu x_0), pak pro ka dé $x\in(-\delta,\delta)$ (z uva ovaného okolí x_0) platí, e $R(x)\in(-\delta,\delta)$ (zde na interval $(-\delta,\delta)$ nahlí íme jako na okolí a). To odpovídá znění definice limity (nemuseli jsme ani po adovat, aby bylo $x\neq x_0$).

Uva ovaná funkce R se nazývá Riemannova funkce (proto označení R). V literatuře se ov em uvádí v různých modifikacích. Např. o funkci

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Z};\\ \frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\text{ pro nesoudělná }p,q\in\mathbb{Z}\text{ a }q>1;\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

se „často“ hovoří jako o Riemannově. $\square$

5.15. Dodefinujte funkci

$$f(x) = \left(x^2 - 1\right) \sin \frac{2x-1}{x^2-1}, \quad x \neq \pm 1 \, (x \in \mathbb{R})$$

v bodech -1, 1 tak, aby byla spojitá na $\mathbb{R}$.

Řešení. Daná funkce je spojitá ve v ech bodech svého definičního oboru. V bodech -1, 1 bude spojitá, právě kdy polo íme

$$f(-1) := \lim_{x \to -1} \left(\left(x^2 - 1\right) \sin \frac{2x-1}{x^2-1} \right), \; f(1) := \lim_{x \to 1} \left(\left(x^2 - 1\right) \sin \frac{2x-1}{x^2-1} \right).$$

Pokud by jedna z těchto limit neexistovala (příp. byla nevlastní), funkci by ne lo spojitě dodefinovat. Očividně je

$$\left| \sin \frac{2x-1}{x^2-1} \right| \leq 1, \quad x \neq \pm 1 \, (x \in \mathbb{R}),$$

odkud plyne

$$-\left| x^2 - 1 \right| \leq f(x) \leq \left| x^2 - 1 \right|, \quad x \neq \pm 1 \, (x \in \mathbb{R}).$$

Proto e

$$\lim_{x \to \pm 1} \left| x^2 - 1 \right| = 0,$$

z Věty o třech limitách ji dostáváme výsledek $f(\pm 1) := 0$. $\square$

5.16. Ověřte, e je limita

(a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x) - 2\sin x}{2\mathrm{e}^x - x^2 - 2x - 2} \qquad \text{typu } \frac{0}{0};$$

(b)

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x} \qquad \text{typu } \frac{\infty}{\infty};$$

(c)

$$\lim_{x \to 1+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \qquad \text{typu } \infty - \infty;$$

(d)

$$\lim_{x \to 1+} \left(\ln(x-1) \cdot \ln x \right) \qquad \text{typu } 0 \cdot \infty;$$

(e)

$$\lim_{x \to 0+} (\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}} \qquad \text{typu } \infty^0;$$

(f)

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \qquad \text{typu } 1^\infty;$$

(g)

$$\lim_{x \to 1-} \left(\cos \frac{\pi x}{2} \right)^{\ln x} \qquad \text{typu } 0^0.$$

Poté ji spočtěte u itím l'Hospitalova pravidla.

Řešení. Bezprostředně mů eme potvrdit, e je

(a)
$$\lim_{x\to 0}\left(\sin(2x)-2\sin x\right)=0-0=0,$$
$$\lim_{x\to 0}\left(2\mathrm{e}^x-x^2-2x-2\right)=2-0-0-2=0;$$

(b)
$$\lim_{x\to 0+}\ln x=-\infty,\qquad \lim_{x\to 0+}\operatorname{cotg}x=+\infty;$$

(c)
$$\lim_{x\to 1+}\frac{x}{x-1}=+\infty,\qquad \lim_{x\to 1+}\frac{1}{\ln x}=+\infty;$$

(d)
$$\lim_{x\to 1+}\ln x=0,\qquad \lim_{x\to 1+}\ln(x-1)=-\infty;$$

(e)
$$\lim_{x\to 0+}\operatorname{cotg}x=+\infty,\qquad \lim_{x\to 0+}\frac{1}{\ln x}=0;$$

(f)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty;$$

(g)
$$\lim_{x\to 1-}\cos\frac{\pi x}{2}=0,\qquad \lim_{x\to 1-}\ln x=0.$$

Případ (a). Aplikování l'Hospitalova pravidla převádí limitu
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-2\sin x}{2\mathrm{e}^x-x^2-2x-2}$$
na limitu
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)-2\cos x}{2\mathrm{e}^x-2x-2},$$
která je ov em typu 0/0. Dal ími dvěma aplikacemi l'Hospitalova pravidla dostáváme
$$\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin(2x)+2\sin x}{2\mathrm{e}^x-2}$$
a (vý e uvedená limita je opět typu 0/0)
$$\lim_{x\to 0}\frac{-8\cos(2x)+2\cos x}{2\mathrm{e}^x}=\frac{-8+2}{2}=-3.$$
Celkem tak máme (vrátíme se k původní limitě)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-2\sin x}{2\mathrm{e}^x-x^2-2x-2}=-3.$$
Dodejme, e opakované u ití l'Hospitalova pravidla v jednom příkladu je bě né.

Nadále budeme klást, e se limity podílů derivací získané l'Hospitalovým pravidlem přímo rovnají původním limitám podílů. Takto si mů eme počínat, pokud obdr ené limity na pravých stranách budou existovat, tj. o platnosti zápisů se vlastně budeme přesvědčovat dodatečně.

Případ (b). Tentokráte derivování čitatele a jmenovatele dává

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\sin^2 x}{x}.$$

Poslední limitu umíme snadno určit (dokonce ji známe). Z

$$\lim_{x\to 0+} -\sin x = 0, \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

plyne výsledek $0 = 0 \cdot 1$. Také jsme mohli znovu pou ít l'Hospitalovo pravidlo (nyní pro výraz $0/0$) se ziskem

$$\lim_{x\to 0+} \frac{-\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{-2\cdot \sin x \cdot \cos x}{1} = \frac{-2\cdot 0\cdot 1}{1} = 0.$$

Případ (c). Pouze převodem na společného jmenovatele

$$\lim_{x\to 1+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1+} \frac{x\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x}$$

jsme obdr eli typ $0/0$. Je

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1+} \frac{\ln x + \frac{x}{x} - 1}{\frac{x-1}{x} + \ln x} = \lim_{x\to 1+} \frac{\ln x}{1 - \frac{1}{x} + \ln x}.$$

Máme podíl $0/0$, pro který (opět dle l'Hospitalova pravidla) platí

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\ln x}{1 - \frac{1}{x} + \ln x} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Návratem k původní limitě zapí eme výsledek

$$\lim_{x\to 1+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \frac{1}{2}.$$

Případ (d). Uvedený výraz převedeme na typ ∞/∞ (přesněji řečeno, na typ $-\infty/\infty$) vytvořením zlomku

$$\lim_{x\to 1+} (\ln(x-1)\cdot \ln x) = \lim_{x\to 1+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}.$$

Podle l'Hospitalova pravidla je

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1+} \frac{-x\ln^2 x}{x-1}.$$

Pro tento neurčitý výraz (typu $0/0$) lze pokračovat l'Hospitalovým pravidlem a stanovit

$$\lim_{x\to 1+} \frac{-x\ln^2 x}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{-\ln^2 x - 2x\ln x\cdot \frac{1}{x}}{1} = -\frac{0+0}{1} = 0.$$

Případy (e), (f), (g). Proto e

$$\lim_{x\to 0+} (\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln(\operatorname{cotg} x)}{\ln x}};$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2}};$$

$$\lim_{x\to 1-} \left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)^{\ln x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 1-} \left(\ln x\cdot \ln\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)\right)},$$

postačuje vypočítat limity uvedené v argumentu exponenciální funkce. Pomocí l'Hospitalova pravidla a jednoduchých úprav získáváme

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\operatorname{cotg} x)}{\ln x} = \left[\text{typ } \frac{+\infty}{-\infty}\right] = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\operatorname{cotg} x}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} =$$
$$\lim_{x\to 0+} \frac{-x}{\cos x\cdot \sin x} = \left[\text{typ } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0+} \frac{-1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{-1}{1-0} = -1;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2} = \left[\text{typ } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{2x^2\sin x}$$
$$= \left[\text{typ } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{4x\sin x + 2x^2\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{4\sin x + 2x\cos x}$$
$$= \left[\text{typ } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{4\cos x + 2\cos x - 2x\sin x} = \frac{-1}{4+2-0} = -\frac{1}{6},$$

a tudí

$$\lim_{x\to 0+} (\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}};$$
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{\mathrm{e}}}.$$

Obdobně lze postupovat při určování poslední limity. Platí

$$\lim_{x\to 1-} \left(\ln x\cdot \ln\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)\right) = \lim_{x\to 1-} \frac{\ln\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{1}{\ln x}} = \left[\text{typ } \frac{-\infty}{-\infty} = \frac{\infty}{\infty}\right]$$
$$= \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}\left(-\sin\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\pi}{2}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}}$$
$$= \frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1-} \frac{x\sin\frac{\pi x}{2}\cdot \ln^2 x}{\cos\frac{\pi x}{2}}.$$

Nebo je tento výraz typu 0/0, mohli bychom pokračovat l'Hospitalovým pravidlem; místo toho ale přejdeme od

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x\sin\frac{\pi x}{2}\cdot \ln^2 x}{\cos\frac{\pi x}{2}}$$

k součinu limit

$$\lim_{x\to 1-}\left(x\sin\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\lim_{x\to 1-}\frac{\ln^2 x}{\cos\frac{\pi x}{2}} = 1\cdot\lim_{x\to 1-}\frac{\ln^2 x}{\cos\frac{\pi x}{2}}.$$

Teprve nyní aplikujeme l'Hospitalovo pravidlo pro

$$\lim_{x\to 1-}\frac{\ln^2 x}{\cos\frac{\pi x}{2}} = \left[\text{typ } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1-}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{-\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Celkem máme

$$\lim_{x\to 1-}\left(\ln x\cdot\ln\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot 0 = 0,$$

tj.

$$\lim_{x\to 1-}\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)^{\ln x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

$\square$

5.17. Určete

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right).$$

Řešení. Uvědomíme-li si, e je

$$\lim_{x\to 0+}\operatorname{cotg} x = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0-}\operatorname{cotg} x = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x} = -\infty,$$

vidíme, e v případě obou jednostranných limit dostáváme typ $\infty - \infty$. Mů eme tedy uva ovat najednou oboustrannou limitu. Funkci kotangens zapí eme jako podíl kosinu a sinu a zlomky převedeme na společného jmenovatele, tj.

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}.$$

Obdr eli jsme výraz $0/0$, pro který platí (podle l'Hospitalova pravidla)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x}.$$

Druhým pou itím l'Hospitalova pravidla pro typ $0/0$ pak ji dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{0-0}{1+1-0} = 0.$$

$\square$

5.18. Vyčíslete

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x},\qquad \lim_{x\to0+} x\ln\frac{1}{x},\qquad \lim_{x\to0+} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}};$$

$$\lim_{x\to0-} x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}},\qquad \lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}},\qquad \lim_{x\to+\infty}(\ln x - x)\,;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+\ln x\cdot\cos x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[5]{x+3}},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Řešení. Snadno lze zjistit (např. n-násobným u itím l'Hospitalova pravidla), e pro libovolné $n\in\mathbb{N}$ je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\mathrm{e}^x}=0,\quad \text{tj.}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}=+\infty.$$

Z Věty o třech limitách potom pro reálná čísla $a>0$ ihned plyne zobecnění

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{\mathrm{e}^x}=0,\quad \text{tj.}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^a}=+\infty.$$

Uvá íme-li, e grafy funkcí $y=\mathrm{e}^x$ a $y=\ln x$ (inverzní funkce k $y=\mathrm{e}^x$) jsou symetrické vzhledem k přímce $y=x$, víme dále

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0,\quad \text{tj.}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty.$$

Získali jsme tak první výsledek. Ten přitom dává rovně l'Hospitalovo pravidlo, podle kterého je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Upozorněme, e l'Hospitalovo pravidlo lze pou ít k vyčíslení ka dé z dal ích pěti uvedených limit. Je ov em mo né určit tyto limity jednodu ími způsoby. Např. substituce $y=1/x$ vede na

$$\lim_{x\to0+} x\ln\frac{1}{x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}=0;$$

$$\lim_{x\to0+} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^y}{y}=+\infty.$$

Samozřejmě $x\to0+$ dává $y=1/x\to+\infty$ (pí eme $1/+0=+\infty$).

Pomocí substitucí $u=-1/x$, $v=1/x^2$ po řadě dostáváme

$$\lim_{x\to0-} x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=\lim_{u\to+\infty}-\frac{\mathrm{e}^u}{u}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim_{v\to+\infty}\frac{v^{50}}{\mathrm{e}^v}=0,$$

přičem $x\to0-$ odpovídá $u=-1/x\to+\infty$ (pí eme $-1/-0=+\infty$) a $x\to0$ potom $v=1/x^2\to+\infty$ (znovu $1/+0=+\infty$). Ji dříve jsme také objasnili, e platí

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x-x)=\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty.$$

Případné pochyby snad rozptýlí limita

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x - x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x}{\ln x}\right) = -\infty,$$

která dokazuje, e při zmen ení absolutní hodnoty uva ovaného výrazu (ani by do lo ke změně znaménka) stále výraz v absolutní hodnotě roste nade v echny meze.

Stejně snadno umíme určit

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+\ln x\cdot\cos x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1;$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[5]{x+3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x}} = +\infty;$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}} = 1.$$

Viděli jsme, e l'Hospitalovo pravidlo nemusí být nejlep í metodou výpočtu limity jednoho z typů $0/0$, ∞/∞. Na předchozích třech příkladech lze ilustrovat, e jej ani nelze v dy (pro neurčité výrazy) aplikovat. Kdybychom jej pou ili k ře ení prvního z nich, obdr eli bychom pro $x>0$ podíl

$$\frac{1}{1+\frac{\cos x}{x}-\ln x\cdot\sin x} = \frac{x}{x+\cos x - x\ln x\cdot\sin x},$$

který je slo itěj í ne původní. Dokonce pro $x\to+\infty$ limitu nemá. Není tedy splněn jeden z předpokladů l'Hospitalova pravidla. Ve druhém případě pak (libovolný počet opakovaných) pou ití l'Hospitalova pravidla vede na neurčité výrazy. Pro poslední limitu nás l'Hospitalovo pravidlo vrátí do zadání: dává nejdříve zlomek

$$\frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

a následně

$$\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Odsud mů eme odvodit, e limita je rovna 1 (hledáme nezápornou hodnotu $a\in\mathbb{R}$ takovou, aby platilo $a=a^{-1}$), pouze kdy dříve doká eme, e vůbec existuje. $\square$

0.19. Určete suprema a infima mno in

$$A=(-3,0]\cup(1,\pi)\cup\{6\};\quad B=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2};\, n\in\mathbb{N}\right\};\quad C=(-9,9)\cap\mathbb{Q}$$

v $\mathbb{R}$.

Řešení. Platí

$$\begin{aligned} \sup A &= 6, & \inf A &= -3; \\ \sup B &= \frac{1}{4}, & \inf B &= -1; \\ \sup C &= 9, & \inf C &= -9. \end{aligned}$$

0.20. Nalezněte $\sup A$ a $\inf A$ pro

$$A = \left\{ \frac{n + (-1)^n}{n};\ n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Řešení. Lehce lze ukázat, e

$$\sup A = \frac{3}{2}, \qquad \inf A = 0.$$

0.21. Je-li

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}, \quad \mathcal{M} = \left\{ -\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \mathcal{J} = (0, 2] \cup [3, 5] \setminus \{4\},$$

stanovte $\inf \mathbb{N}$, $\sup \mathcal{M}$, $\inf \mathcal{J}$ a $\sup \mathcal{J}$ v $\mathbb{R}$.

Řešení. Zřejmě je

$$\inf \mathbb{N} = 1, \quad \sup \mathcal{M} = 0, \quad \inf \mathcal{J} = 0, \quad \sup \mathcal{J} = 5.$$

0.22. Napi te příklad mno iny $M \subset \mathbb{R}$, která nemá v $\mathbb{R}$ infimum, ale má zde supremum; a udejte příklad mno iny $N \subset \mathbb{R}$, která nemá v $\mathbb{R}$ supremum, ale má zde infimum.

Řešení. Lze polo it kupř.

$$M := \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}; \qquad N := \mathbb{N}.$$

0.23. Uveďte podmno inu X mno iny $\mathbb{R}$, pro kterou je $\sup X \leq \inf X$.

Řešení. Uva te jakoukoli jednoprvkovou mno inu $X \subset \mathbb{R}$.

0.24. Udejte příklad mno in $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ takových, aby platilo

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad B \cap C = \emptyset, \quad \sup A = \inf B = \inf C = \sup C.$$

Řešení. Mno ina C musí být jednoprvková. Nech je tedy např. $C = \{0\}$. Nyní mů eme zvolit $A = (-1, 0)$, $B = (0, 1)$.

0.25. Z definice limity doka te, e je

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 - 2 \right) = -2.$$

Řešení. Pro ka dé $\varepsilon > 0$ stačí ε-okolí bodu -2 přiřadit δ-okolí bodu 0 předpisem
$$\varepsilon \mapsto \delta, \qquad \delta = \varepsilon,$$
přičem bez újmy na obecnosti lze po adovat, aby $\varepsilon \leq 1$. Pokud by toti bylo $\varepsilon > 1$, lze polo it $\delta = 1$.

0.26. Z definice limity určete
$$\lim_{x\to -1} \frac{(1+x)^2 - 3}{2},$$
tj. mj. napi te $\delta(\varepsilon)$-předpis jako v minulém příkladu.

Řešení. Existence limity a rovnost
$$\lim_{x\to -1} \frac{(1+x)^2 - 3}{2} = -\frac{3}{2}$$
např. opět plyne z volby $\delta := \varepsilon$ pro $\varepsilon \in (0,1)$.

0.27. Uka te z definice limity, e
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3\,(x-2)^4}{2} = +\infty.$$

Řešení. Nebo $-(x-2)^4 < x$ pro $x < 0$, dostáváme $3\,(x-2)^4/2 > -x$ pro $x < 0$.

0.28. Stanovte
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-2}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

Řešení. Platí
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-2}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+n-1}{n^2} \cdot \frac{n-1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

0.29. Vypočítejte
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3 - 11n^2 + 2} + \sqrt[5]{n^7 - 2n^5 - n^3} - n + \sin^2 n}{2 - \sqrt[3]{5n^4 + 2n^3 + 5}}.$$

Řešení. Snadno lze ukázat, e
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3 - 11n^2 + 2} + \sqrt[5]{n^7 - 2n^5 - n^3} - n + \sin^2 n}{2 - \sqrt[3]{5n^4 + 2n^3 + 5}} = -\infty.$$

0.30. Vyčíslete limitu
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n! + (n-2)! - (n-4)!}{n^{50} + n! - (n-1)!}.$$

Řešení. Limita je rovna 1.

0.31. Udejte příklad posloupností majících nevlastní limity se členy x_n, y_n, $n \in \mathbb{N}$, pro které je

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(x_n\, y_n^2\right) = +\infty.$$

Řešení. Kupř. lze polo it

$$x_n := n, \quad y_n := -n + 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

0.32. Napi te v echny hromadné body posloupnosti dané členy

$$a_n = \frac{(-1)^n\, 2n}{\sqrt{4n^2 + 5n + 3}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Správná odpověď je ± 1.

0.33. Spočtěte

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \quad \text{a} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n,$$

je-li

$$a_n = \frac{n^2 + 4n - 5}{n^2 + 9}\,\sin^2\frac{n\pi}{4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Výsledek je

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = 0.$$

0.34. Vyčíslete

$$\liminf_{n\to\infty}\left((-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Řešení. Platí

$$\liminf_{n\to\infty}\left((-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \sin\frac{n\pi}{4}\right) = -\mathrm{e} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

0.35. Určete obě jednostranné limity

$$\lim_{x\to 0+}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, \qquad \lim_{x\to 0-}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$$

Na základě výsledku rozhodněte o existenci limity

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$$

Řešení. Nebo

$$\lim_{x\to 0+}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to 0-}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2},$$

uva ovaná oboustranná limita neexistuje.

0.36. Existuje některá z limit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{5x^4+1}{x}?$$

Řešení. První z limit je rovna $+\infty$, druhá neexistuje.

0.37. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

Řešení. Limitu lze spočítat více způsoby. Nabízí se např.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} \cdot \frac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cotg} x} \right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x \cdot \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x\,(1-\cos^2 x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x\,(1+\cos x)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

0.38. Vyčíslete

$$\lim_{x\to\pi/6} \frac{2\sin^3 x + 7\sin^2 x + 2\sin x - 3}{2\sin^3 x + 3\sin^2 x - 8\sin x + 3}.$$

Řešení. Platí

$$\lim_{x\to\pi/6} \frac{2\sin^3 x + 7\sin^2 x + 2\sin x - 3}{2\sin^3 x + 3\sin^2 x - 8\sin x + 3} = \lim_{x\to\pi/6} \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = -3.$$

0.39. Pro libovolné $m, n \in \mathbb{N}$ určete

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}.$$

Řešení. Je

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{m}{n}.$$

0.40. Vyčíslete

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x \right).$$

Řešení. Po roz íření výrazem

$$\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

lze lehce dostat

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\frac{1}{2}.$$

0.41. Stanovte

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+x^2}-x^2\right).$$

Řešení. Platí

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+x^2}-x^2\right)=\frac{1}{2}.$$

0.42. Vypočítejte

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}.$$

Řešení. Je

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

0.43. Vyčíslete

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(4x)}{\sqrt{x+1}-1}.$$

Řešení. Roz ířením zlomku ze zadání je mo né obdr et

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(4x)}{\sqrt{x+1}-1}=8.$$

0.44. Spočtěte

$$\lim_{x\to0-}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1-\operatorname{tg}x}}{\sin x}.$$

Řešení. Platí

$$\lim_{x\to0-}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1-\operatorname{tg}x}}{\sin x}=1.$$

0.45. Stanovte

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x+\sqrt{1+x^2-x^9}-7x^5+44x^2}{3^x+\sqrt[5]{6x^6+x^2}-18x^5-592x^4}.$$

Řešení. Zřejmě je

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x+\sqrt{1+x^2-x^9}-7x^5+44x^2}{3^x+\sqrt[5]{6x^6+x^2}-18x^5-592x^4}=\frac{7}{18}.$$

0.46. Nech $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Je pravda, e $\lim_{x\to-\infty}(f(x)\cdot g(x)) = 0$ pro ka dou rostoucí funkci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Řešení. Výrok není pravdivý. Uva te kupř.

$$f(x) := \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0); \qquad g(x) := x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

0.47. V jakých bodech $x \in \mathbb{R}$ je funkce

$$y = \cos\left(\operatorname{arctg}\left(\left|\,12x^{21} + 11\,\right| \cdot \frac{\mathrm{e}^{\cos(x+2)-x^3}}{-11 - x^{12}}\right)\right) + \sin\left(\sin\left(\sin\left(\sin x\right)\right)\right)$$

s maximálním definičním oborem spojitá?

Řešení. Uvedená funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$.

0.48. Rozhodněte, zda je funkce

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0; \\ 0, & 0 \le x < 1; \\ x, & x = 1; \\ 0, & 1 < x < 2; \\ x, & 2 \le x \le 3; \\ \frac{1}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$$

spojitá; spojitá zleva; spojitá zprava v bodech $-\pi, 0, 1, 2, 3, \pi$.

Řešení. V bodech $-\pi$, 0, π je spojitá; v bodě 2 je spojitá pouze zprava a v bodě 3 pouze zleva; v bodě 1 není spojitá ani z jedné strany.

0.49. Dodefinujte funkci

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{5}{x^2}\right) \cdot \sin^2 x^5, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

pro $x = 0$ tak, aby byla v tomto bodě spojitá.

Řešení. Je nutné polo it $f(0) := 0$.

0.50. Uveďte $p \in \mathbb{R}$, pro které je funkce

$$f(x) = \frac{\sin(6x)}{3x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \qquad f(0) = p$$

spojitá v počátku.

Řešení. Funkce je spojitá právě pro $p = 2$.

0.51. Zvolte reálnou hodnotu a tak, aby funkce

$$h(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1}, \quad x > 1; \qquad h(x) = a, \quad x \le 1$$

byla spojitá v $\mathbb{R}$.

Řešení. Správná odpověď je $a = 4$.

0.52. Libovolným způsobem ověřte, e je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

Řešení. Limitu lze snadno určit např. pomocí l'Hospitalova pravidla.

0.53. Vypočtěte

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin^8 x}{x^3}; \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{\sin^8 x}{x^3}.$$

Řešení. Je

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin^8 x}{x^3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sin^8 x}{x^3} = 0.$$

0.54. Určete limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+5}\right)^{2n-1}.$$

Řešení. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+5}\right)^{2n-1} = \mathrm{e}^{-10}.$$

0.55. Spočítejte

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

Řešení. Trojnásobné pou ití l'Hospitalova pravidla dává

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

0.56. Vyčíslete limitu

$$\lim_{x\to 1-} \left((1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right).$$

Řešení. Výsledek je $2/\pi$.

0.57. Stanovte

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\operatorname{tg} x\right).$$

Řešení. Lze ukázat, e

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\operatorname{tg} x\right) = 1.$$

0.58. Pomocí l'Hospitalova pravidla určete

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\left(3^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}}\right) x\right).$$

Řešení. Je
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(3^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}\right)x\right)=\ln\frac{3}{2}.$$

0.59. Vypočtěte
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2\ln x}-\frac{1}{x^2-1}\right).$$

Řešení. Limita je rovna 1/2.

0.60. U itím l'Hospitalova pravidla spočtěte limitu
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{2}{x}\right)^{x^2}.$$

Řešení. Platí
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{2}{x}\right)^{x^2}=\mathrm{e}^{-2}.$$

0.61. Doplňte
$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{\sin x}=\dots$$

Řešení. Dvojnásobnou aplikací l'Hospitalova pravidla lze obdr et
$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{\sin x}=\mathrm{e}^0=1.$$

0.62. Určete následující dvě limity
$$\lim_{x\to 0+}x^{\frac{\alpha}{\ln x}},\qquad \lim_{x\to+\infty}x^{\frac{\alpha}{\ln x}},$$
přičem $\alpha\in\mathbb{R}$ je libovolné.

Řešení. V obou případech je výsledek e^{α}.