

Sada domácích úloh k přednášce Matematika II
k odevzdání 23. května 2011
(stačí spočítat některé tři příklady nebo pouze příklad č.13)

Příklad 1. Rozhodněte, zda existují parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby polynom

$$ax^2 + a^2x + b$$

splňoval podmínky

$$P(1) = 1, P(2) = -1, P(3) = 1.$$

Příklad 2. Určete limity posloupností:

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\ln n},$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n!}.$$

Příklad 3. Určete limity funkcí:

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2^{1/x}}{3 + 2^{1/x}},$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2^{1/x}}{3 + 2^{1/x}}.$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\sqrt{x^2 - x}}$$

Příklad 4. Z definice (bez použití L'Hospitalova pravidla) určete derivaci funkce $\sqrt[4]{2x - 1}$.

Příklad 5. Určete vzdálenost bodu $(1, 0)$ od paraboly $y = x^2 - x + 1$.

Příklad 6. Určete maximální objem válce vepsaného do rotačního kužele o poloměru podstavy r a výšce h .

Příklad 7. Určete integrály

1.

$$\int (9 + x^2)^{\frac{3}{2}},$$

2.

$$\int \sin^4(x) dx$$

3.
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$$

4.
$$\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx$$

5.
$$\int x \arcsin(x) dx$$

6.
$$\int \frac{x^2 + x - 1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

7.
$$\int \frac{1}{3 - 2 \cos(x)} dx$$

Příklad 8. Vypočítejte integrály

1.
$$\int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx$$

2.
$$\int_1^3 \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) dx$$

3.
$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^2(x)}$$

4.
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1 + 4x^2}$$

Příklad 9. Rozhodněte, zda konvergují následující řady

1.
$$\sum_n \frac{n}{2^{2n}}$$

2.
$$\sum_n n \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Příklad 10. Rozviňte do mocninné řady funkci $\arctan(x)$ v bodě 0 a určete pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje.

Příklad 11. Určete objem tělesa vzniklého rotací paraboly $y = 3x^2 + 1$ kolem osy x pro $x \in \langle 1, 3 \rangle$.

Příklad 12. Vyšetřete průběh funkce $\ln\left(\frac{x^2-2}{x-2}\right)$.

Příklad 13. Mezi polynomy třetího stupně s koeficienty v \mathbb{R} najděte takový $f(x)$, pro který je hodnota $\max_{x \in \langle -1, 1 \rangle} f(x)$ minimální.