Přehled rozložení náhodných veličin

V tomto přehledu jsou uvedeny vzorce pro pravděpodobnostní funkce, respektive hustoty pravděpodobnosti náhodných veličin, dále pro jejich střední hodnoty, rozptyly a popřípadě kovariance. Pro názornost uvádíme též grafy pravděpodobnostních funkcí či hustot pravděpodobnosti. V explicitním vyjádření některých hustot se vyskytuje funkce gama, která se v základním kursu matematické analýzy pro posluchače učitelského studia nepřednáší. Proto uvedeme nejprve její definici a některé vlastnosti.

Definice. Buď $s > 0$. Definujeme $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$.

Věta. Funkce $\Gamma(s)$ má následující vlastnosti:

(i) Je spojitá v každém bodě svého definičního oboru a má zde derivaci.

(ii) $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$

(iii) Pro každé přirozené n platí $\Gamma(n) = (n-1)!$

(iv) $\Gamma(1) = 1, \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

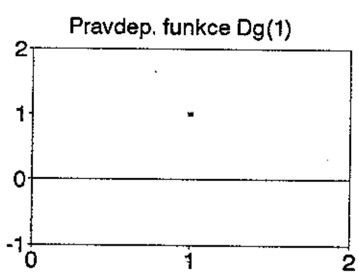
(v) $\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$ pro $p > 0, q > 0$.

Vybraná rozložení diskrétních náhodných veličin

1. Degenerované rozložení $Dg(\mu)$

Náhodná veličina $X \sim Dg(\mu)$ nabývá s pravděpodobností 1 pouze konstantní hodnoty μ.

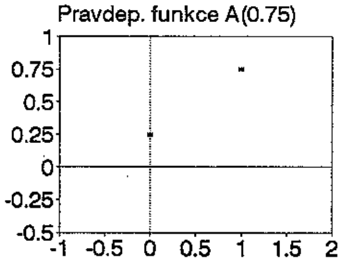
$$\pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = \mu \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, E(X) = \mu, D(X) = 0$$



2. Alternativní rozložení $A(\vartheta)$

Náhodná veličina $X \sim A(\vartheta)$ nabývá pouze hodnot 0 nebo 1, znamenající např. absenci nebo prezenci nějakého „úspěchu", jehož pravděpodobnost je ϑ, kde $\vartheta \in (0,1)$.

$$\pi(x) = \begin{cases} 1-\vartheta & \text{pro } x = 0 \\ \vartheta & \text{pro } x = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, E(X) = \vartheta, D(X) = \vartheta(1-\vartheta)$$

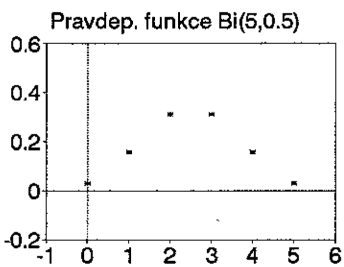


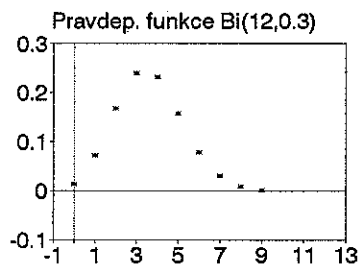
3. Binomické rozložení $Bi(n,\vartheta)$

Náhodná veličina $X \sim Bi(n,\vartheta)$ udává celkový počet úspěchů v posloupnosti n nezávisle opakovaných pokusů, přičemž v každém z těchto pokusu nastává „úspěch" s pravděpodobností ϑ, kde $\vartheta \in (0,1)$ a n je přirozené číslo.

$$\pi(x) = \begin{cases} \binom{n}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x} & \text{pro } x = 0,1,\dots,n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$E(X) = n\vartheta, D(X) = n\vartheta(1-\vartheta)$



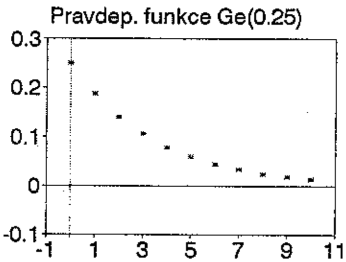


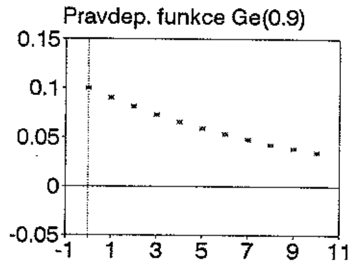
4. Geometrické rozložení $Ge(\vartheta)$

Náhodná veličina $X \sim Ge(\vartheta)$ udává celkový počet „neúspěchů", které v nekonečné posloupnosti nezávislých opakovaných pokusů předcházejí prvnímu „úspěchu".Pravděpodobnost „úspěchu" v každém pokusu je ϑ, kde $\vartheta \in (0,1)$.

$$\pi(x) = \begin{cases} (1-\vartheta)^x \cdot \vartheta & \text{pro } x = 0,1,\dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$E(X) = (1-\vartheta)/\vartheta, D(X) = (1-\vartheta)/\vartheta^2$



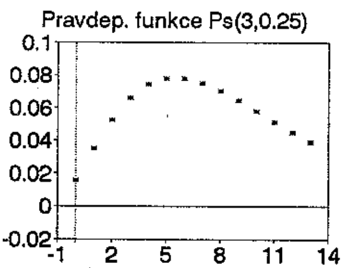


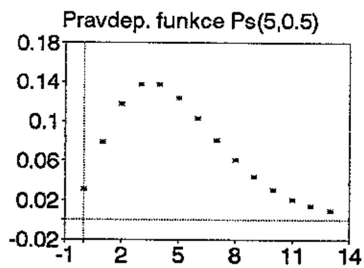
5. Pascalovo rozložení $Ps(k,\vartheta)$

Náhodná veličina $X \sim Ps(k,\vartheta)$ udává celkový počet „neúspěchů", které v nekonečné posloupnosti nezávislých opakovaných pokusů předcházejí k-tému „úspěchu". Pravděpodobnost „úspěchu" v každém pokusu je ϑ, $\vartheta \in (0,1)$, k je přirozené číslo. Pro $k = 1$ dostaneme geometrické rozložení.

$$\pi(x) = \begin{cases} \binom{x+k-1}{x}(1-\vartheta)^x\vartheta^k & \text{pro } x = 0,1,\dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$E(X) = k(1-\vartheta)/\vartheta, D(X) = k(1-\vartheta)/\vartheta^2$



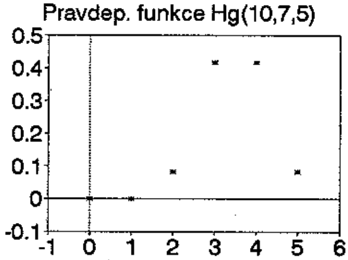


6. Hypergeometrické rozložení $Hg(N, M, n)$

V souboru N prvků je M prvků označeno ($M \leq N$). Ze souboru náhodně vybereme n prvků bez vracení ($n \leq N$). Náhodná veličina $X \sim Hg(N, M, n)$ udává počet vybraných označených prvků.

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} & \text{pro } x = \max\{0, M-N+n\}, \ldots, \min\{n, M\} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{Mn}{N}, D(X) = \frac{Mn}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$$



7. Vícerozměrné hypergeometrické rozložení $Hg(N, M_1, ..., M_k, n)$

Náhodný vektor $(X_1, ..., X_k) \sim Hg(N, M_1, ..., M_k, n)$ udává počet prvků prvního až k-tého druhu ve výběrovém souboru bez opakování o rozsahu n, který jsme vylosovali ze základního souboru rozsahu N, který se skládá z M_1 prvků prvního druhu atd., až z M_k prvků k-tého druhu, přičemž $M_1 + ... + M_k = N$. Čísla $N, M_1, ..., M_k, n$ jsou přirozená.

$\pi(x_1, ..., x_k) = \frac{\binom{M_1}{x_1}\cdots\binom{M_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}$ pro $x_1 \in \{0, 1, ..., n\}, ..., x_k \in \{0, 1, ..., n\}, x_1 + ... + x_k = n$

$\pi(x_1, ..., x_k) = 0$ jinak

Pro každé $i \in \{1, ..., k\}$ platí:

$$E(X_i) = \frac{nM_i}{N}, D(X_i) = \frac{nM_i}{N}\left(1 - \frac{M_i}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$$

Pro každé $i \in \{1, ..., k\}, j \in \{1, ..., k\}, i < j$ platí:

$$C(X_i, X_j) = -\frac{M_i}{N}\frac{M_j}{N}\frac{N-n}{N-1}$$

8. Rovnoměrné diskrétní rozložení $Rd(G)$

Náhodný vektor $(X_1, ..., X_n) \sim Rd(G)$ nabývá se stejnou pravděpodobností každé z hodnot v konečné množině $G \subseteq R^n$.

$$\pi(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} \frac{1}{card(G)} & \text{pro } (x_1, ..., x_n) \in G \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

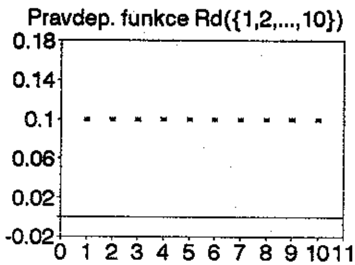
Ve speciálním jednorozměrném případě dostáváme pro

$$G = \{0, 1, ..., \delta - 1\},$$

kde δ je přirozené číslo a tedy card$(G) = \delta$,

$$\pi(x) = \begin{cases} 1/\delta & \text{pro } x = 0, 1, ..., \delta - 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$E(X) = (\delta - 1)/2, D(X) = (\delta^2 - 1)/12$$

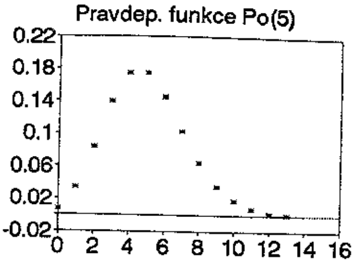


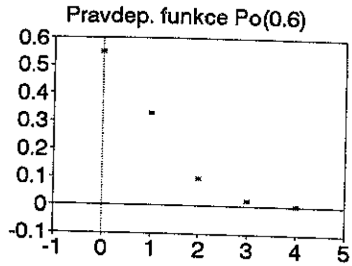
9. Poissonovo rozložení $Po(\lambda)$

Náhodná veličina $X \sim Po(\lambda)$ udává počet událostí, které nastanou v jednotkovém časovém intervalu, případně v jednotkové oblasti, jestliže k událostem dochází náhodně, jednotlivě a vzájemně nezávisle. Parametr $\lambda > 0$ udává střední počet výskytů těchto událostí.

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \text{pro } x = 0, 1, ... \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, E(X) = \lambda, D(X) = \lambda$$

Pravděpodobnostní funkce je tabelována v Příloze B.





10. Multinomické rozložení $Mu(n, \vartheta_1, ..., \vartheta_k)$

Náhodný vektor $(X_1, ..., X_k) \sim Mu(n, \vartheta_1, ..., \vartheta_k)$ udává celkový počet výsledků prvního až k-tého druhu, které se nashromáždí v n nezávisle opakovaných pokusech. Předpokládáme, že při každém pokusu nastane výsledek právě jednoho z k možných druhů, a to s pravděpodobností $\vartheta_1 \in (0,1), ..., \vartheta_k \in (0,1)$, přičemž platí $\vartheta_1 + ... + \vartheta_k = 1$. Čísla n, k jsou přirozená.

$\pi(x_1, ..., x_k) = \frac{n!}{x_1!...x_k!}\vartheta_1^{x_1}...\vartheta_k^{x_k}$

pro $x_1 \in \{0, 1, ..., n\}, ..., x_k \in \{0, 1, ..., n\}, x_1 + ... + x_k = n$

$\pi(x_1, ..., x_k) = 0$ jinak

Pro každé $i \in \{1, ..., n\}$ platí:

$E(X_i) = n\vartheta_i, D(X_i) = n\vartheta_i(1 - \vartheta_i)$

Pro každé $i \in \{1, ..., k\}, j \in \{1, ..., k\}, i < j$ platí:

$C(X_i, X_j) = -n\vartheta_i\vartheta_j$

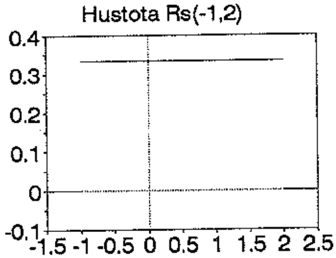
Vybraná rozložení spojitých náhodných veličin

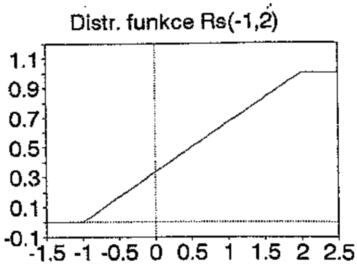
11. Rovnoměrné spojité rozložení $Rs(a, b)$

Náhodná veličina $X \sim Rs(a, b)$, kde $a < b$, má na intervalu (a, b) konstantní hustotu pravděpodobnosti.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in (a,b) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$E(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$





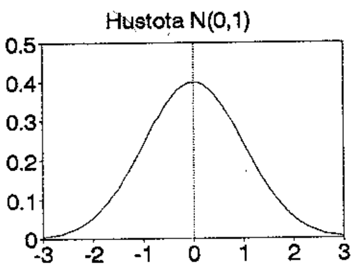
12. Normální rozložení $N(\mu, \sigma^2)$

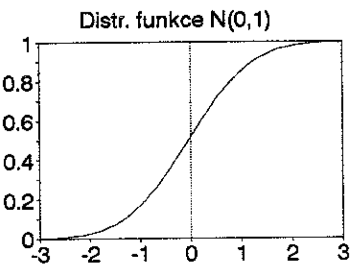
Náhodná veličina $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ má dominantní postavení v počtu pravděpodobnosti. Vyskytuje se v takových situacích, kdy se ke konstantní střední hodnotě $\mu \in (-\infty, \infty)$ přičítá velké množství nezávislých náhodných veličin („náhodných vlivů") kolísajících nepatrně kolem nuly. Vzniklá variabilita je charakterizována směrodatnou odchylkou $\sigma \in (0, \infty)$.

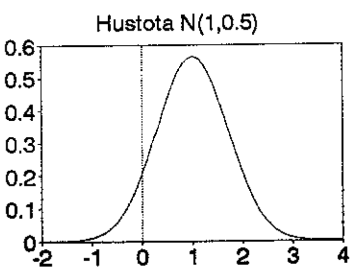
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \text{ pro } x \in (-\infty, \infty)$$

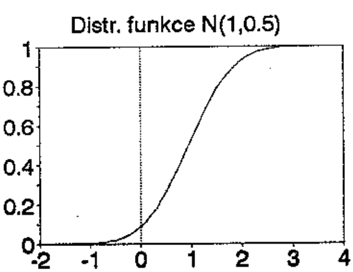
$$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$$

Ve speciálním případě $X \sim N(0,1)$ dostáváme *standardizované normální rozložení*. Jeho distribuční funkce je tabelována v Příloze B, rovněž tak jeho kvantily.



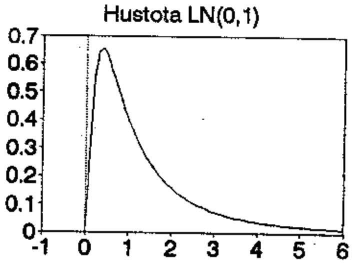


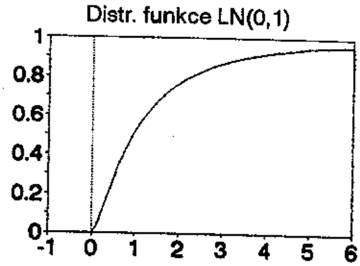




$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\tau\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\lambda}{\tau}\right)^2\right] & \text{pro } x \in (0,\infty) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$E(X) = e^{\lambda+\tau^2/2}, D(X) = e^{2\lambda+\tau^2(e^{\tau^2}-1)}$$



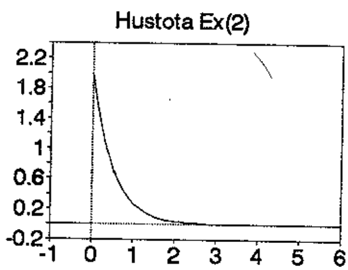


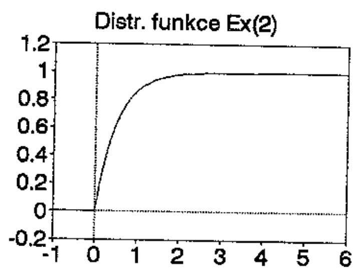
15. Exponenciální rozložení $Ex(\lambda)$

Náhodná veličina $X \sim Ex(\lambda)$, $\lambda > 0$ vyjadřuje náhodnou dobu čekání na nějakou událost, která se může dostavit se stejnou šancí každým okamžikem, bez ohledu na dosud pročekanou dobu. Přitom $1/\lambda$ je střední doba čekání.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \end{cases}$$

$$E(X) = 1/\lambda, D(X) = 1/\lambda^2$$





16. Erlangovo rozložení $Er(k, \delta)$

Náhodná veličina $X \sim Er(k, \delta)$, $\delta > 0$ vyjadřuje souhrnnou dobu čekání na k-tý výskyt nějaké události, která se může dostavit se stejnou šancí

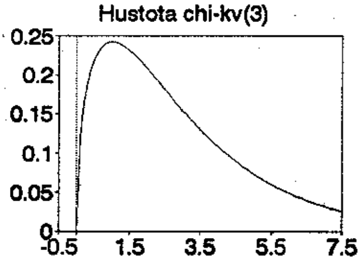
18. Pearsonovo rozložení chí kvadrát $\chi^2(\nu)$

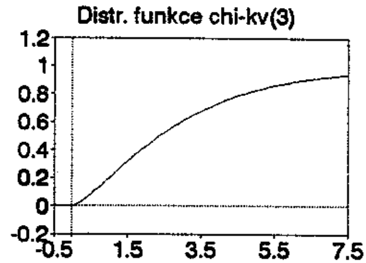
Náhodné veličiny $X \sim \chi^2(\nu)$ se užívá v matematické statistice. Parametr $\nu = 1, 2, \ldots$ nazýváme počtem *stupňů volnosti* a nejčastěji vyjadřuje počet nezávislých pozorování zmenšený o počet lineárních podmínek na pozorování kladených.

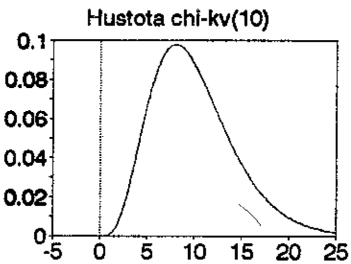
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\nu/2)2^{\nu/2}} x^{\nu/2-1} e^{-x/2} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

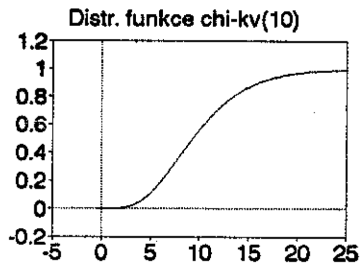
$E(X) = \nu, D(X) = 2\nu$

Kvantily jsou tabelovány v Příloze B.









19. Studentovo rozložení $t(\nu)$

Náhodné veličiny $X \sim t(\nu)$ se užívá v matematické statistice. Parametr $\nu = 1, 2, \ldots$ zvaný počet stupňů volnosti má stejný význam jako u Pearsonova rozložení.

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\nu\pi}}(1 + x^2/\nu)^{-(\nu+1)/2} \text{ pro } x \in (-\infty, \infty)$$

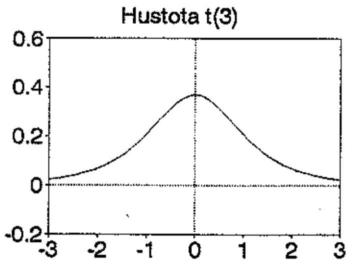
$E(X) = 0$ pro $\nu \geq 2$, pro $\nu = 1$ střední hodnota neexistuje.
$D(X) = \nu/(\nu - 2)$ pro $\nu \geq 3$, pro $\nu = 1, 2$ rozptyl neexistuje.

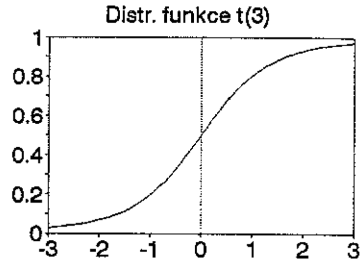
Kvantily jsou tabelovány v Příloze B.

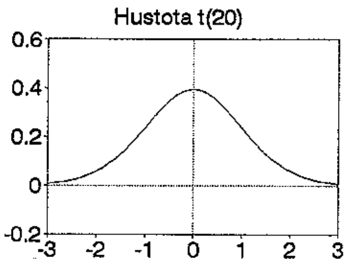
Speciálním případem Studentova rozložení pro $\nu = 1$ je Cauchyovo rozložení:

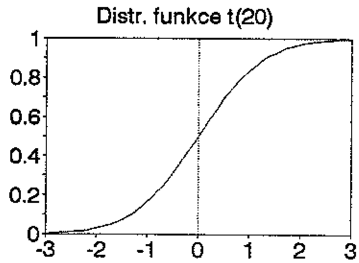
$\varphi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ pro $x \in (-\infty, \infty)$

$E(X)$ ani $D(X)$ neexistují.









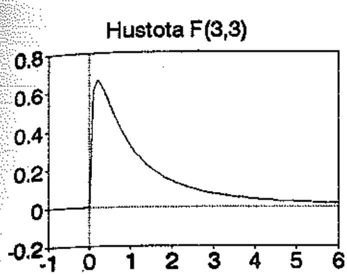
20. Fisherovo-Snedecorovo rozložení $F(\nu_1, \nu_2)$

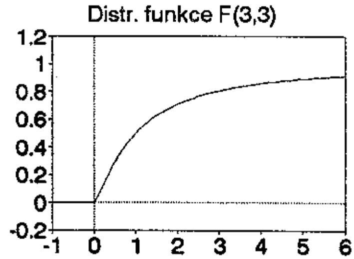
Náhodné veličiny $X \sim F(\nu_1, \nu_2)$ se užívá v matematické statistice. Paramtery $\nu_1 = 1, 2, ...$ a $\nu_2 = 1, 2, ...$ zvané počet stupňů volnosti čitatele a jmenovatele mají stejný význam jako u Pearsonova rozložení.

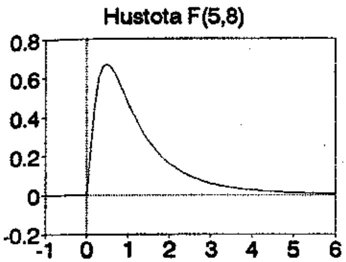
$\varphi(x) = \frac{\Gamma[(\nu_1+\nu_2)/2]\nu_1^{\nu_1/2}\nu_2^{\nu_2/2}}{\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)} \cdot \frac{x^{(\nu_1-2)/2}}{(\nu_2+\nu_1 x)^{(\nu_1+\nu_2)/2}}$ pro $x > 0$,

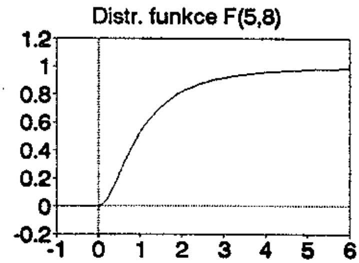
$\varphi(x) = 0$ jinak

$E(X) = \nu_2/(\nu_2 - 2)$ pro $\nu_2 \geq 3$, $E(X)$ neexistuje pro $\nu_2 = 1, 2$.
$D(X) = 2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)/[\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)]$ pro $\nu_2 \geq 5$,
$D(X)$ neexistuje pro $\nu_2 = 1, 2, 3, 4$.
Kvantily jsou tabelovány v Příloze B.


Hustota F(3,3)
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-1 0 1 2 3 4 5 6


Distr. funkce F(3,3)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-1 0 1 2 3 4 5 6


Hustota F(5,8)
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-1 0 1 2 3 4 5 6


Distr. funkce F(5,8)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-1 0 1 2 3 4 5 6