

Cvičení 10: Číselné charakteristiky a transformace náhodných veličin

Teorie:

Střední hodnota diskrétní náhodné veličiny X s pravděpodobnostní funkcí $p_X(x)$ nenulovou pouze pro x_i , kde $i \in I$, je definována jako

$$E(X) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x) = \sum_{i \in I} x_i \cdot p_X(x_i).$$

Střední hodnota spojitě náhodné veličiny X s hustotou $f_X(x)$ je definována jako

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx.$$

Střední hodnotou náhodného vektoru je vektor střední hodnot jeho jednotlivých složek (náhodných veličin).

Rozptylem (variancí) náhodné veličiny X , která má konečnou střední hodnotu, nazýváme číslo

$$D(X) = \text{var } X = E([X - E(X)]^2),$$

odmocnina z rozptylu $\sqrt{D(x)}$ se pak nazývá **směrodatná odchylka**. Na výpočet rozptylu je vhodné použít vzorec $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$, platí rovněž $D(a + bX) = b^2 D(X)$.

Kovariancí náhodných veličin X_1, X_2 rozumíme

$$C(X_1, X_2) = E(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2)).$$

Je-li $C(X_1, X_2) = 0$, říkáme, že X_1, X_2 jsou nekorelované. Stochasticky nezávislé náhodné veličiny jsou vždy nekorelované (nikoliv obráceně, nulová kovariance pouze znamená nulovou **lineární** závislost, nikoliv úplnou nezávislost!). **Koeficient korelace** je jen speciální název pro kovarianci dvou normovaných náhodných veličin:

$$R(X, Y) = \rho_{X,Y} = C \left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \right).$$

Kvantily: Pro ryze monotóní distribuční funkci F_X (tj. spojitou náhodnou veličinu X s všude nenulovou hustotou, jako je tomu např. u normálního rozdělení) jde o inverzní funkci $F_X^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. To znamená, že hodnota $y = F_X^{-1}(\alpha)$ je taková, že $P(X < y) = \alpha$. Obecněji, je-li $F_X(x)$ distribuční funkce náhodné veličiny X , pak definujeme **kvantilovou funkci**

$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Kvantil s $\alpha = 0,5$ nazýváme medián.

Transformace (funkce) náhodné veličiny

Náhodnou veličinu $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ můžeme pomocí vhodné třídy (tzv. borelovských) funkcí $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ transformovat na jinou náhodnou veličinu $Y = g(X)$ vztahem $\forall \omega \in \Omega : Y(\omega) = g(X(\omega))$. Přitom pro rozdělení pravděpodobnosti **diskrétní** náhodné veličiny Y zřejmě platí

$$P(Y = y) = \sum_{i: g(x_i)=y} P(X = x_i)$$

a pokud existuje inverzní funkce k funkci g (například při afinní závislosti, která není konstatní), dostáváme pro pravděpodobnostní funkce vztah

$$p_Y(y) = p_{g(X)}(y) = p_X(g^{-1}(y)).$$

Pro **spojitou** náhodnou veličinu s distribuční funkcí F_X dostáváme za předpokladu, že transformace g je rostoucí (analogicky klesající) funkce, vztah

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)),$$

odkud pro hustotu

$$f_Y(y) = \frac{dF(y)}{dy} = f_X(g^{-1}(y)) \frac{dg(y)}{dy}.$$

.

Příklad 142. Uveďte příklad

- a) diskrétní,
- b) spojité

náhodné veličiny, pro níž neexistuje střední hodnota.

Příklad 143. Pravděpodobnost zásahu cíle jedním výstřelem je 0,75. Náhodná veličina X udává počet zásahů při 5 nezávislých výstřelech. Určete její rozdělení pravděpodobnosti, střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku.

Příklad 144. Diskrétní náhodná veličina X nabývá hodnot $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ s pravděpodobnostmi $P(X = k) = p(1 - p)^k$ (tzv. geometrické rozdělení). Určete $E(X)$ (střední doba čekání na úspěch) a $D(X)$.

Příklad 145. Náhodná veličina X má hustotu $f_X(x) = \frac{3}{x^4}$ pro $x \in (1, \infty)$ a jinde nulovou. Určete její distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl.

Příklad 146. Náhodná veličina X má hustotu rovnu $f_X(x) = \cos x$ pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ a jinde nulovou. Určete střední hodnotu, rozptyl a medián této veličiny.

Příklad 147. Náhodná veličina X má hustotu rovnu $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pro $x \geq 0$, kde $\lambda > 0$ je daný parametr rozdělení, a jinde nulovou (tzv. exponenciální rozdělení). Určete střední hodnotu, rozptyl, modus (reálné číslo s maximální hustotou, resp. pravděpodobnostní funkcí) a medián této veličiny.

Příklad 148. Diskrétní náhodný vektor (X_1, X_2) má simultánní pravděpodobnostní funkci $\pi(0, -1) = c, \pi(0, 0) = \pi(0, 1) = \pi(1, -1) = \pi(2, -1) = 0, \pi(1, 0) = \pi(0, 1) = \pi(2, 1) = 2c, \pi(2, 0) = 3c$ a rovnou nule jinde. Určete konstantu c a vypočtěte:

1. kovarianci $C(X_1, X_2)$,
2. korelační koeficient $R(X_1, X_2)$.

Příklad 149. Náhodná veličina X má hustotu $f(x)$. Určete hustotu náhodné veličiny Y tvaru

- a) $Y = e^X, x \geq 0$,
- b) $Y = \sqrt{X}, x > 0$,
- c) $Y = \ln X, x > 0$,
- d) $Y = \frac{1}{X}, x > 0$.

Příklad 150. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Určete jeho hustotu a hustotu transformovaných veličin $Y = \sin X, Z = \operatorname{tg} X$.

Příklad 151. Náhodná veličina X má hustotu rovnu $\cos x$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ a nulovou jinde. Určete hustotu náhodné veličiny $Y = X^2$ a vypočtěte $E(Y), D(Y)$.