6 Cvičení 6: Polynomy s reálnými a komplexními koeficienty

Teorie: Zde pro nás bude teorie kraťoučká. Půjde o sérii tvrzení, která byla odvozena na přednášce. Než se do nich pustíme, uveďme jistou paralelu mezi polynomy a celými čísly. Také se zde můžeme bavit o dělitelnosti, stanovovat Euklidovým algoritmem největší společný dělitel a hledat koeficienty v Bezoutově rovnosti.

Věta 17. *Má-li polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ komplexní kořen $a + bi$, potom má i kořen $a - bi$.*

Věta 18. *Každý polynom s reálnými koeficienty lichého stupně má reálný kořen.*

Věta 19. *Má-li polynom f s reálnými koeficienty vícenásobný kořen a, potom je a kořenem polynomu $f'(x)$ a tedy i polynomu $gcd(f, f')$.*

Věta 20. *Polynom s reálnými koeficienty je nad $\mathbb{R}$ ireducibilní právě tehdy, když je lineární nebo kvadratický se záporným diskriminantem.*

Věta 21. *Polynom s komplexními koeficienty je nad $\mathbb{C}$ ireducibilní právě tehdy, když je lineární.*

Příklad 94. Dokažte, že jsou dané polynomy $f, g \in \mathbb{R}[x]$ nesoudělné a nalezněte příslušné koeficienty v Bezoutově rovnosti.

1. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 4^x + 2$, $g(x) = x^2 + 2x + 2$
2. $f(x) = 2x^3 + x + 1$, $g = x^2 + 1$
3. $f(x) = x^5 + 1$, $g = x^3 - 1$

Příklad 95. Určete největší společný dělitel polynomů $f, g \in \mathbb{R}[x]$ a nalezněte příslušné koeficienty v Bezoutově rovnosti.

1. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9$, $g(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 3$.
2. $f(x) = x^6 + 9x^4 + 27x^2 + 27$, $g(x) = x^4 + 6x^2 + 9$.
3. $x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + l, g = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Příklad 96. Nalezněte všechny kořeny polynomu $f \in \mathbb{R}[x]$, víte-li, že má násobný kořen. Daný polynom rozložte na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

1. $f(x) = x^4 - 40x + 400$
2. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 60x + 225$
3. $f(x) = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 12x^2 - 4$
4. $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1$

Příklad 97. Určete všechny kořeny polynomu $f = x^7 - 4x^6 + 8x^5 - 7x^4 + 8x^2 - 8x + 4 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má dvojnásobný kořen $1 + i$. Rozložte tento polynom na ireducibilní faktory nad $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$.

Příklad 98. Určete všechny kořeny polynomu $f = x^6 + 8x^5 + 24x^4 + 24x^3 - 27x^2 - 80x - 50 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má dvojnásobný kořen $2 + i$. Rozložte tento polynom na ireducibilní faktory nad $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$.

Příklad 99. Určete všechny kořeny polynomu $f = x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má kořen $1 + i$. Rozložte tento polynom na ireducibilní faktory nad $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$.

Příklad 100. Mezi všemi normovanými polynomy s reálnými koeficienty nalezněte ten nejnižšího stupně, který má

1. dvojnásobný kořen $1 + i$ a jednoduchý kořen 2.
2. dvojnásobný kořen 1 a jednoduchý kořen $2 - 3i$.
3. trojnásobný kořen i a jednoduchý kořen $-1 - i$.
4. jednoduché kořeny $i + 1, 2 - i, i - 3$.

Rozložte tyto polynomy na ireducibilní faktory nad $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$.

Příklad 101. Zjistěte násobnost kořene -1 polynomu $x^5 - ax^2 - ax + 1 \in \mathbb{C}[x]$ v závislosti na parametru $a \in \mathbb{C}$.

Příklad 102. Určete normované polynomy $f, g \in \mathbb{R}[x]$ čtvrtého stupně tak, aby $f(1+i) = 0$ a aby g měl dva dvojnásobné kořeny, přičemž $gcd(f, g) = x^2 + x + 1$.

Příklad 103. Rozložte polynom $x^4 - x^2 - 2$ na součin ireducibilních prvků v oborech $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}_5[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$.

Příklad 104. Určete všechny kořeny polynomů $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, víte-li, že mají společný kořen. Rozložte tyto polynomy na ireducibilní faktory nad $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$.

Příklad 105. Určete všechny kořeny polynomů $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - x^2 + 11x + 5$, $g(x) = 2x^4 - 11x^3 + 20x^2 - 7x - 10$, víte-li, že mají společný racionální kořen. Rozložte tyto polynomy na ireducibilní faktory nad $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$.

Příklad 106. Určete všechny kořeny polynomů $f(x) = x^6 - 4x^5 + 9x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 8x + 4$, $g(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x + 4$, víte-li, že mají společný násobný kořen. Rozložte tyto polynomy na ireducibilní faktory nad $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$.

Výsledek. $f(x) = (x-(1+i))^2(x-(1-i))^2(x-i)(x+i)$, $g(x) = (x-(1+i))^2(x-(1-i))^2(x+1)$

Příklad 107. Určete všechny kořeny polynomu

1. $f(x) = 6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6$
2. $f(x) = 5x^4 - 26x^3 + 10x^2 - 26x + 5$

Příklad 108. Rozložte na ireducibilní faktory nad $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ polynom $x^6 + 27$.

Příklad 109. Polynom $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 15$ má kořen $2 + i$. Určete reálná čísla a, b a ostatní kořeny tohoto polynomu.

Příklad 110. Aniž byste počítali kořeny polynomu $x^3 - 4x^2 + 6x - 4$, určete polynom, který bude mít dvojnásobné kořeny.

Příklad 111. Aniž byste počítali kořeny polynomu $2x^3 - 5x^2 - x + 6$, určete polynom, který bude mít kořeny, které budou převrácenými hodnotami kořenů zadaného polynomu.