8. demonstrační cvičení

Ω – základní prostor, množina všech elementárních jevů (výsledků)
$\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots$ – elementární jevy
$A \subseteq \Omega$ – náhodný jev,
$A^c = \bar{A} = \Omega \setminus A$ – jev opačný,
$A, B \in \mathcal{A}$ pro které $A \cap B = \emptyset$ – neslučitelné jevy,
$\mathcal{A}$ – jevové pole, je systém podmnožin Ω, splňující:

- jistý jev $\Omega \in \mathcal{A}$,
- pro libovolné $A, B \in \mathcal{A}$ je i $A \setminus B \in \mathcal{A}$
- pro libovolnou nejvýše spočetnou množinu jevů A_i, kde $i \in I$ jsou prvky vhodné indexové množiny, je i $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Pravděpodobnostní prostor je jevové pole $\mathcal{A}$ podmnožin (konečného) základního prostoru Ω, na kterém je definována funkce $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s následujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$ pro všechny jevy A,
- je aditivní, tj. $P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$, pro každý nejvýše spočetný systém po dvou neslučitelných jevů,
- pravděpodobnost jistého jevu je $P(\Omega) = 1$.

Funkci P nazýváme pravděpodobností na jevovém poli $(\Omega, \mathcal{A})$.

Příklad 1. *Náhodný pokus spočívá v hodu kostkou. Jev A znamená, že padne liché číslo, jev B, padne-li prvočíslo.*

a) *Určete základní prostor Ω.*

b) *Uveďte všechny možné výsledky příznivé nastoupení jevů A, B.*

c) *Pomocí A, B a operací s jevy vyjádřete:*

- *padne sudé číslo,*
- *padne číslo 2,*
- *padne číslo 2 nebo 3*

d) *Určete nejmenší měřitelný prostor $(\Omega, \mathcal{A})$, obsahující jevy A i B.*

Příklad 2. *Přístroj se skládá ze dvou částí, první část má 2 bloky, druhá 3 bloky. Nechť jev* A_1*, resp.* A_2*, znamená, že blok 1, resp. blok 2, první části je v pořádku, jevy* B_1, B_2, B_3 *jsou analogické pro druhou část. Přístroj je schopen provozu, pokud jsou alespoň jeden blok první části a alespoň dva bloky druhé části v pořádku.*

Zapište jev C *vyjadřující, že přístroj je schopen provozu.*

Příklad 3. *a) Z urny, v níž je a bílých a b černých koulí, vybereme postupně (bez vracení) dvě koule. Jaká je pravděpodobnost. že druhá koule je bílá, za předpokladu, že první byla bílá.*

b) Ze skupiny 100 výrobků, která obsahuje 10 zmetků, vybereme náhodně bez vracení 3 výrobky. Určete pravděpodobnost, že:

- *třetí je zmetek za podmínky, že první 2 byly kvalitní.*
- *první 2 jsou kvalitní a třetí zmetek.*

Příklad 4. *Střelec střílí třikrát nezávisle na sobě do terče. Pravděpodobnosti zásahu jsou postupně 0,4 , 0,5 a 0,7.Jaká je pravděpodobnost, že zasáhne terč*

a) právě jednou,

b) aspoň jednou?

Příklad 5. *Nechť* $A_1, \ldots, A_n$ *jsou stochasticky nezávislé náhodné jevy,* $P(A_i) = p_i$ *pro* $i = 1, \ldots, n$. *Vyjádřete pravděpodobnost, že*

a) nastane aspoň jeden z uvedených jevů,

b) nastanou všechny uvedené jevy,

c) nastane právě jeden z uvedených jevů.

Příklad 6. *Dva střelci vystřelí nezávisle na sobě do téhož terče každý jednu ránu. Po střelbě byl v teči nalezen 1 zásah. Určete pravděpodobnost, že zásah patří 1. střelci, pokud tento trefuje terče s pravděpodobností 0,8, zatímco druhý střelec s pravděpodobností 0,4.*

[Odpověď: 6/7]

Příklad 7. *V testu jsou u každé otázky 4 možné odpovědi. Pokud student nezná odpověď, tak hádá (uhodne s pravděpodobností $\frac{1}{4}$). Dobrý student zná 75% odpovědí, slabý 30%. Jestliže byla určitá otázka zodpovězena správně, určete pravděpodobnost, že student jen hádal, jde-li o:*

- *dobrého studenta,*
- *špatného studenta,*
- *náhodného studenta, kdy navíc víme, že dobrých studentů jsou 2/3.*

[Odpověď: 1/13;7/19;1/7]

Příklad 8. *Turistický oddíl si předává zprávy Morseovou abecedou s těmito vlastnostmi: pokud je odvysílána tečka, pak ve 40% případů je přijata čárka (jinak tečka), pokud je odvysílána čárka, je v 1/3 případů přijata tečka (jinak čárka). Zpráva obsahuje tečky a čárky v poměru* $5:3$. *Určete pravděpodobnost,*

- *že byla vyslaná tečka, pokud je přijatá čárka,*
- *že byla vyslaná tečka, pokud je přijatá tečka.*

[Odpověď: 3/4; 1/2]

Příklad 9. *Jaká je pravděpodobnost, že dvě náhodně zvolená čísla z intervalu* $(0,1)$ *budou mít součet menší než 1 a součin větší než* $2/9$*?*

[Odpověď: $1/6 - 2/9 \cdot \ln 2 \approx 0{,}126$*.]*

Příklad 10. *Osoby X a Y přijdou na smluvené místo kdykoliv mezi 9.00 a 10.00 (okamžiky příchodu jsou nezávislé a stejně možné během celého intervalu). Určete pravděpodobnost, že:*

1. *první z příchozích nebude muset na druhého čekat déle než 10 minut,*
2. *osoba Y přijde až jako druhá, jestliže přijde po 9.30.*

[*Odpověď:* $1 - (5/6)^2; (3/8)/(1/2)$]

[Odpověď: $2l/\pi d$]

Příklad 11 (Buffonova úloha). *Rovina je rozdělena rovnoběžkami umístěnými rovnoměrně ve vzdálenosti d. Do roviny je náhodně umístěna jehla délky $l < d$. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne některou rovnoběžku.*