## 9. demonstrační cvičení

**Náhodná veličina:** Je-li $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pravděpodobnostní prostor, pak zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazveme **náhodná veličina**, pokud

$$\forall B \in \mathcal{B} : X^{-1}(B) \in \mathcal{A},$$

tj. vzor každé borelovské množiny je (měřitelný) jev. Jev $X^{-1}(B)$ častěji zapisujeme jako $(X \in B)$ nebo $[X \in B]$ a jeho pravděpodobnost jako $P(X \in B)$.

**Distribuční funkce** $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ náhodné veličiny $X$ je definována vztahem $F_X(x) = P(X \leq x)$ a je neklesající, zprava spojitá, s hodnotami z intervalu $[0, 1]$. Dále zřejmě $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

**Diskrétní náhodná veličina** je taková, jež nabývá jen nejvýše spočetně mnoha hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \in \mathbb{R}$ a pro níž existuje tzv. **pravděpodobnostní funkce** $p(x)$ taková, že

$$p(x) = \begin{cases} P(X = x_i) > 0 & \text{pro } x = x_i \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

**Spojitá náhodná veličina** je taková, pro níž existuje tzv. **hustota pravděpodobnosti** $f(x)$ s vlastností, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pro hustotu platí $f(x) = F'_X(x)$ a $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

**(Stochasticky) nezávislé** jsou takové **náhodné veličiny** $X_1, \ldots, X_n$, pro něž platí:

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} : F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n),$$

kde $F$ je (sdružená) distribuční funkce náhodného vektoru $(X_1, \ldots, X_n)$ a $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ příslušné marginální ditribuční funkce. Ekvivalentně, $p(x_1, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdots p_{X_n}(x_n)$ pro diskrétní, resp. $f(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)$ pro spojité náhodné veličiny.

**Příklad 1.** *Třikrát nezávisle na sobě hodíme mincí. Náhodná veličina $X$ udává počet hlav, které padnou při těchto hodech. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny $X$.*

**Příklad 2.** *Pravděpodobnost, že výrobek bude vyhovovat všem technickým požadavkům, je* 0,9*. Popište rozdělení náhodné veličiny udávající počet nevyhovujících výrobků mezi 3 výrobky.*

**Příklad 3.** *Předpokládejme, že $X$ má diskrétní rozdělení takové, že*

$$P(X = k) = c \cdot k^2 \quad \textit{pro} \quad k = 1, 2, 3$$

*a $P(X = k) = 0$ jinak. Určete*

1. *hodnotu $c$,*
2. *$P(X \geq 2)$,*
3. *$P(X \in \{1, 3\})$.*

**Příklad 4.** *Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou hustotami (mimo vymezený interval je vždy funkce nulová, c je vhodná konstanta – v případě, že jde o hustotu, tuto konstantu určete):*

1. $c$ *pro* $x \in (-1, 1)$,
2. $cx$ *pro* $x \in (0, 1)$,
3. $cx$ *pro* $x \in (-1, 2)$,
4. $cx \sin x$ *pro* $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
5. $ce^x$ *pro* $x \in (0, \infty)$,
6. $ce^{-x}$ *pro* $x \in (0, \infty)$,
7. $\frac{c}{1+x^2}$.

**Příklad 5.** *Náhodná veličina $X$ má distribuční funkci*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{pro } x \leq 0 \\ c \cdot x^2 & \textit{pro } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \textit{pro } x \geq 2. \end{cases}$$

*Jaké hodnoty může nabývat konstanta $c$?*

**Příklad 6.** *Náhodná veličina $X$ má distribuční funkci*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq -5 \\ \frac{x+5}{7} & \text{pro } -5 \leq x < 2 \\ 1 & \text{pro } x \geq 2. \end{cases}$$

*Určete:*

1. *hustotu pravděpodobnosti* $f(x)$,
2. $P(-2 < X < 2)$,
3. $P(X = 2)$,
4. $P(-6 < X < 1)$.

**Příklad 7.** *V zásilce s 10 výrobky je 8 kvalitních (z nich je 5 první jakosti a 3 jsou druhé jakosti) a 2 zmetky. Ze zásilky vybereme bez vracení 2 výrobky. Náhodná veličina $X$ nechť značí počet vybraných kvalitních výrobků a $Y$ počet vybraných výrobků první jakosti. Určete sdruženou i marginální pravděpodobností funkci a rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny $X$ a $Y$ stochasticky nezávislé.*

**Příklad 8.** *Spojitý náhodný vektor* $(X, Y)$ *má hustotu*

$$f(x, y) = 24x^2y(1 - x)$$

*pro* $0 \le x, y < 1$ *a jinde nulovou. Dokažte, že* $X$ *a* $Y$ *jsou stochasticky nezávislé.*

**Příklad 9.** *Spojitý náhodný vektor* $(X, Y, Z)$ *má hustotu* $k \cdot xyz$ *pro* $0 < x, y < 1, 0 < z < 3$ *a jinak rovnou nule. Určete konstantu* $k$ *a vypočtěte*

$$P\left(0 < X < \frac{1}{2}, \frac{1}{3} < Y < \frac{2}{3}, 1 < Z < 2\right).$$

**Příklad 10.** *V lese tvaru trojúhelníka s vrcholy v bodech* $(-1, 0), (1, 0)$ *a* $(0, \sqrt{3})$ *se ztratilo dítě. Pravděpodobnost výskytu dítěte v určité části lesa je úměrná velikosti této části, nikoliv umístění této části. Určete rozdělení vzdálenosti dítěte od zvolené strany lesa,*

*[Odpověď:* $P(R \leq r) = \frac{2}{\sqrt{3}}r - \frac{r^2}{3}$ *(pro* $r \leq \sqrt{3}$*).]*