Příklad 1. *Náhodná veličina X je dána pravděpodobnostní funkcí*

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{pro } x = -2 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 3 \\ \frac{1}{6} & \text{pro } x = 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$x - E(x)$	x	$2x+5$	x^2
-3	-2	1	4
2	3	11	9
0	1	7	1

Určete $E(X), E(2X+5), E(X^2), D(X)$ a $D(2X+1)$.

$$E(X) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) = -2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$E(2X+5) = 2 \cdot E(X) + 5 = 2 \cdot 1 + 5 = 7$$

$$\left[\text{nebo: } = 1 \cdot \frac{1}{3} + 11 \cdot \frac{1}{2} + 7 \cdot \frac{1}{6} = \frac{42}{6} = 7\right]$$

$$E(X^2) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p(x) = 4 \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

$$D(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} (x-1)^2 p(x) = 9 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{6} = 5$$

Lépe: $D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 6 - 1^2 = 5$

$$D(2X+1) = 2^2 \cdot D(X) = 20$$

4 26-15:53

Příklad 2. *Nekorelované náhodné veličiny X a Y mají rozptyly $D(X) = a$ a $D(Y) = 2$. Určete konstantu a, jestliže rozptyl náhodné veličiny $Z = 3Y - X$ je $D(Z) = 25$.*

$$C(X,Y) = 0 \Rightarrow D(X+Y) = D(X) + D(Y)$$

NE OBECNĚ

$$25 = D(Z) = D(3Y - X) = D(3Y) + D(-X) =$$

$$C(3Y, -X) = 3(-1) \cdot C(X,Y) = 0$$

$$9 \cdot D(Y) + (-1)^2 \cdot D(X) = 18 + a$$

$$\Rightarrow a = 7$$

4 26-15:53

Příklad 3. *Náhodná veličina X má na intervalu $(0, a)$ konstantní hustotu pravděpodobnosti (a jinde nulovou). S využitím vlastností střední hodnoty a rozptylu určete:*

$a > 0$

rovnoměrné spojité

$f_X(x) = \frac{1}{a}$ pro $x \in (0, a)$

1. $E(2X+3)$,
2. $E(3X^2 - 2X + 1)$,
3. $D(2X+3)$,
4. $D(X^2+1)$,
5. *momentovou vytvořující funkci $E(e^{tX})$ náhodné veličiny X.*

ad 1. $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^a x \cdot \frac{1}{a}\,dx = \frac{1}{a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{a}{2}$

$E(2X+3) = 2 \cdot E(X) + 3 = a + 3$

ad 2. $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^a x^2 \cdot \frac{1}{a}\,dx = \frac{1}{a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^2}{3}$

$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{a^2}{3} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{12}$

$\sqrt{D(X)} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

$E(3X^2 - 2X + 1) = 3E(X^2) - 2E(X) + 1 = 3 \cdot \frac{a^2}{3} - 2 \cdot \frac{a}{2} + 1 = a^2 - a + 1$

ad 3. $D(2X+3) = 2^2 \cdot D(X) = \frac{a^2}{3}$

ad 4. $D(X^2+1) = D(X^2) = E\left((X^2)^2\right) - \left(E(X^2)\right)^2 = E(X^4) - E(X^2)^2$

$E(X^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x)\,dx = \int_0^a x^4 \cdot \frac{1}{a}\,dx = \frac{1}{a}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^a = \frac{a^4}{5}$

$D(X^2+1) = \frac{a^4}{5} - \left(\frac{a^2}{3}\right)^2 = \frac{a^4}{5} - \frac{a^4}{9} = \frac{4}{45}a^4$

4 26-15:53

Momentová vytvořující funkce

obecné momenty: $\mu_1' := E(X)$, $\mu_2' := E(X^2)$, $\mu_k' := E(X^k)$

centrální momenty: $\mu_2 := E(X - EX)^2, \ldots$

$$M_X(t) = E(e^{t \cdot X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t \cdot x} f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^a e^{t \cdot x} \frac{1}{a}\,dx = \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{1}{t} \cdot e^{t \cdot x}\right]_0^a =$$

$$= \frac{1}{at}\left(e^{at} - 1\right)$$

Platí: $M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k' \cdot \frac{t^k}{k!}$

$M_X(0) = \mu_0' = 1$

$M_X'(0) = \mu_1' = E(X)$

$M_X^{(k)}(0) = \mu_k' = E(X^k)$

4 26-16:44

$$M_X(t) = \frac{1}{at}\left(e^{at} - 1\right)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$= \frac{1}{at}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} - 1\right) = \frac{1}{\cancel{at}}\left(1 + \frac{\cancel{at}}{1} + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \ldots - 1\right)$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{at}{2!} + \frac{(at)^2}{3!} + \ldots + \frac{(at)^{k-1}}{k!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^k}{(k+1)!}$$

$\mu_1' = EX$ $\quad \mu_2' = \frac{a^2}{3}$

$$= \sum \frac{a^k}{(k+1)} \frac{t^k}{k!}$$

$\mu_k' = E(X^k)$

např. $E(X^4) = \mu_4' = \frac{a^4}{5}$

4 26-16:50

Příklad 4. *Náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení (tj. pravděpodobnostní funkci $p(x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$), Určete její momentovou vytvořující funkci, střední hodnotu a rozptyl.*

$x \geq 0$

$$X \sim Po(\lambda) \qquad p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = 1$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{t \cdot k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t \cdot \lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^t} = e^{\lambda \cdot (e^t - 1)}$$

$$EX = \mu_1' = M_X'(0) = \left(e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t\right)_{t=0} = \lambda$$

$$E(X^2) = \mu_2' = M_X''(0) = \left(e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t \cdot \lambda e^t + e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t\right)_{t=0} = \lambda^2 + \lambda$$

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

4 26-15:54

Jinak (bez M.V.F.):

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!}}_{e^{\lambda}} =$$

$k-1 \to l$

$$= \lambda$$

4 26-17:10

Příklad 5. *1. Dokažte Markovovu nerovnost*

$X \geq 0$ $\quad P[X > \lambda] < \frac{EX}{\lambda}.$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}^+$

2. Z Markovovy nerovnosti odvoďte Čebyševovu nerovnost

$$P(|X - EX| \geq \epsilon) \leq \frac{DX}{\epsilon^2}. \qquad \sigma = \sqrt{DX}$$

3. Počet aut vjíždějících do křižovatky v určitém časovém intervalu se řídí Poissonovým rozdělením se střední hodnotou 120. Určete dolní odhad pravděpodobnosti, že v tomto intervalu vjede do křižovatky 100 až 140 aut.

Čebyšev: $P(|X - EX| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$

$$P(|X - EX| \leq t \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$

$$P(|X - EX| \geq t\sigma) \leq \frac{1}{t^2}$$

$$P(|X - EX| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9}$$

4 26-15:54

Markov: $\lambda \in \mathbb{R}^+$

$$P[X > \lambda] < \frac{EX}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \cdot P[X > \lambda] < EX$$

spojitá:

$$\lambda \cdot P[X > \lambda] = \lambda \cdot \int_{\lambda}^{\infty} f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_{\lambda}^{\infty} \lambda f_X(x)\,dx \leq \int_{\lambda}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx \leq$$

$$\leq \int_{0}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = E(X)$$

4 26-17:20

Čebyšev: $P(|X - EX| > \lambda) < \frac{DX}{\lambda^2}$

$X \leftarrow (X - EX)^2$ do Markovovy nerovnosti

$\lambda \leftarrow \lambda^2$

$$P((X - EX)^2 > \lambda^2) < \frac{E((X - EX)^2)}{\lambda^2} = \frac{DX}{\lambda^2}$$

$\Updownarrow$

$P(|X - EX| > \lambda)$ ✓

4 26-17:25

ad 3. (Pozn. víme-li, že je $X \sim$ Poisson(λ), je lepší využít přímo hodnot kvantilů, uděláme příště)

Čebyšev:

$$P(|X - \underbrace{120}_{EX}| \leq 20) \geq 1 - \frac{\overbrace{120}^{DX}}{20^2} = 0{,}7$$

$X \sim \text{Pois}(120) \Rightarrow EX = 120$

$DX = 120$

4 26-17:29

Příklad 6. *Nechť má X binomické rozdělení s parametry $n = 4, p = 2/3$. Určete rozdělení transformované náhodné veličiny $Y = (X - 2)^2$ a nakreslete graf její distribuční funkce.*

$X \sim Bi(4, \frac{2}{3})$ $\quad P(X = k) = \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4-k}$

$k = 0, 1, 2, 3, 4$ $\quad = \binom{4}{k} \cdot \frac{2^k}{3^4}$

$$P(Y = l) = P((X-2)^2 = l) = P(|X-2| = \sqrt{l})$$

$$= P((X = \sqrt{l} + 2) \cup (X = 2 - \sqrt{l}))$$

$\sqrt{l} + 2 \leq 4 \Rightarrow \sqrt{l} \leq 2 \Rightarrow l \leq 4$, $l = \square$, $l \geq 0$

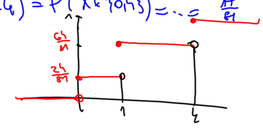
$\Rightarrow l \in \{0, 1, 4\}$

$$P(Y = 0) = P(X = \sqrt{0} + 2) = P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \frac{2^2}{3^4} = \frac{24}{81}$$

$$P(Y = 1) = P((X = \sqrt{1} + 2) \cup (X = 2 - \sqrt{1})) =$$

$$= P(X \in \{3, 1\}) = \binom{4}{3} \cdot \frac{2^3}{81} + \binom{4}{1} \cdot \frac{2^1}{81} = \frac{40}{81}$$

$$P(Y = 4) = P(X \in \{0, 4\}) = \ldots = \frac{17}{81}$$



4 26-15:54

Příklad 7. *Mějme náhodnou veličinu* X *hustoty* $f(x) = 2xe^{-x^2}$ *pro* $x > 0$ *(a jinde nulové). Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny* $Y = X^2$.

4 26-15:54

Příklad 8. *Na výrobcích měříme délku s přesností* $\pm 0{,}5$*mm a šířku s přesností* $\pm 0{,}2$*mm. Náhodná veličina* X *udává chybu při měření délky a* Y *chybu při měření šířky. Předpokládejme, že simultánní hustota pravděpodobnosti* $\varphi(x, y)$ *je uvnitř mezí chyb konstantní (a jinde samozřejmě nulová). Určete*

1. *tuto konstantu,*
2. *obě marginální hustoty pravděpodobnosti,*
3. *simultánní distribuční funkci,*
4. *obě marginální distribuční funkce,*
5. $P(-0{,}1 < X < 0{,}1)$,
6. *zda jsou* X *a* Y *stochasticky nezávislé.*

4 26-15:54