Příklad 1. *Mějme náhodnou veličinu X hustoty $f(x) = 2xe^{-x^2}$ pro $\boxed{x > 0}$ (a jinde nulové). Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = X^2$.*

nejprve distribuční funkci $F_Y(t)$.

$$F_Y(t) = P(Y < t) = P(X^2 < t)$$

zřejmě pro $t < 0$ je $F_Y(t) = 0$

pro $t \geq 0$:

$$F_Y(t) = P(X^2 < t) = P(|X| < \sqrt{t}) = P(-\sqrt{t} < X < \sqrt{t}) = \underbrace{P(-\sqrt{t} < X \leq 0)}_{=0} + P(0 < X < \sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) - F_X(0) =$$

$$= F_X(\sqrt{t}) = \int_0^{\sqrt{t}} 2x e^{-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \\ x = 0 \Rightarrow u = 0 \\ x = \sqrt{t} \Rightarrow u = t \end{array} \right|$$

$$= \int_0^t e^{-u} du = \left[-e^{-u}\right]_0^t = 1 - e^{-t}$$

odtud hustota

$$f_Y(t) = (1 - e^{-t})' = e^{-t}$$

5 3-16:02

Příklad 2. ***Popisná statistika:*** *Pro data ze souboru průměrných měsíčních teplot v Klementinu v letech 1771-2010 určete pomocí tabulkového procesoru:*

a) aritmetický průměr, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$

b) medián,

c) kvartily,

d) rozptyl a $\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)$

e) znázorněte příslušný krabicový diagram. (box plot / box and whiskers plot)

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\text{rozptyl} = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum x_i^2\right) - \bar{x}^2$$

5 3-16:02

Příklad 3. *Pomocí tabulkového procesoru vytvořte statistickou tabulku*

a) distribuční funkce rozdělení $N(20, 16)$,

b) distribuční funkce normovaného (standardizovaného) normálního rozdělení,

c) kvantilové funkce. normovaného norm. rozdělení

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ... normální rozdělení

$EX = \mu$

$DX = \sigma^2$

5 3-16:02

Příklad 4. *Určete pravděpodobnost, že náhodná veličina $X \sim N(20, 16)$ nabude hodnoty:*

- *menší než 16,*
- *větší než 20,*
- *v mezích od 12 do 28,*
- *menší než 12 nebo větší než 28?*

z tabulky Př. 3

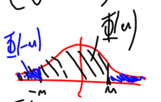
$$P(X < 16) = F_X(16) = 0{,}15866$$

Jinak: normujeme X:

$$U = \frac{X - 20}{\sqrt{16}} = \frac{X - 20}{4} \Leftrightarrow X = 4U + 20$$

$\boxed{U \sim N(0,1)}$

$$P(X < 16) = P(4U + 20 < 16) = P(4U < -4) = P(U < -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}84135 = 0{,}15865$$



$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$$

5 3-16:02

- $P(X > 20) = P(20 + 4U > 20) = P(4U > 0) = P(U > 0) = 0{,}5$
- $P(12 < X < 28) = P(12 < 20 + 4U < 28) = P(-8 < 4U < 8) = P(-2 < U < 2) = \Phi(2) - \underbrace{\Phi(-2)}_{1 - \Phi(2)} = 2\Phi(2) - 1 = 0{,}97725 \cdot 2 - 1 = 0{,}9545$
- $P((X < 12) \vee (X > 28)) = P(X < 12) + P(X > 28) = 1 - P(12 \leq X \leq 28) = 1 - 0{,}9545 = 0{,}0455$

5 3-16:39

Příklad 5. *Nechť jsou X_1, X_2 stochasticky nezávislé náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením. Určete rozdělení ~~rozdělení~~ transformované náhodné veličiny $Y = 3 + X_1 - 2X_2$ a najděte její dolní kvartil.* !

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

$$D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \end{array}\right\} \Rightarrow X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

stoch. nez.

$X_1, X_2 \sim N(0,1)$ $\quad Y = 3 + X_1 - 2X_2$

$$EY = 3 + EX_1 - 2EX_2 = 3 + 0 - 2 \cdot 0 = 3$$

$$DY = DX_1 + D(2X_2) = DX_1 + 4DX_2 = 5$$

$D(a + b \cdot X) = b^2 \cdot D(X)$

$\Rightarrow Y \sim N(3, 5)$ normujeme

$$U = \frac{Y - 3}{\sqrt{5}} \sim N(0,1)$$

$P(u_{0{,}25} > U) = 0{,}25$ $\quad -u_{0{,}75} = u_{0{,}25}$ $\quad u_{0{,}75} = 0{,}685$

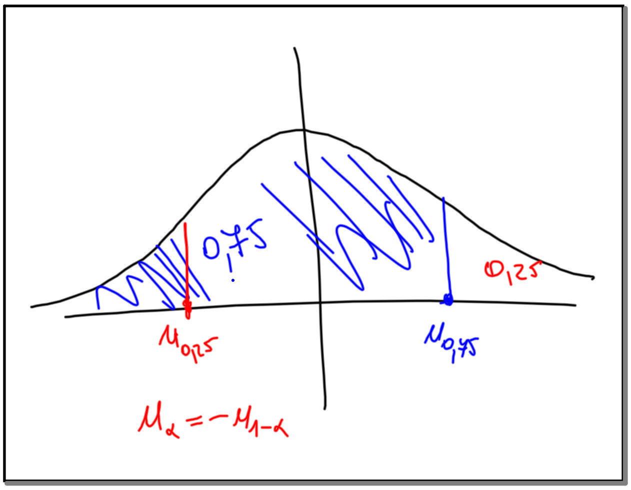
ze statTab.pdf $\Rightarrow$

$$0{,}25 = P(U < u_{0{,}25}) = P\left(\frac{Y - 3}{\sqrt{5}} < u_{0{,}25}\right) = P(Y < \underbrace{3 + u_{0{,}25} \cdot \sqrt{5}}_{\text{hledaný dolní kvartil}})$$

$$= 3 - 0{,}685 \cdot \sqrt{5}$$

(přesněji: $3 - 0{,}67449 \cdot \sqrt{5}$)

5 3-16:03



5 3-17:31

$E(X\cdot Y) = EX \cdot EY$

Příklad 6. *Uvažte nezávislé náhodné veličiny $X \sim N(0,1)$ a α, kde $P(\alpha = 1) = P(\alpha = -1) = 1/2$. Určete:*

1. *rozdělení náhodné veličiny αX,*
2. *kovarianci $C(X, \alpha X)$.*
3. *Ukažte, že X a αX nejsou nezávislé.*

ad 1. $F := F_{\alpha X}$

$F(t) = P(\alpha \cdot X < t) = \frac{1}{2}P(X<t) + \frac{1}{2}P(X > -t)$

$P(X>-t) = P(X<t)$

$= \frac{1}{2}\Phi(t) + \frac{1}{2}\Phi(t)$

$= \Phi(t) \Rightarrow \alpha X$ má rozdělení $N(0,1)$

ad 2. $C(X, \alpha X) = E\big((X - \underbrace{EX}_{0})(\alpha X - \underbrace{E(\alpha X)}_{0})\big)$

$= E(X \cdot \alpha X) = E(\alpha \cdot X^2) = E(\alpha)\cdot E(X^2) = 0$

$\Rightarrow X, \alpha X$ jsou nekorelované

ad 3. $X, \alpha X$ nejsou nezávislé

$\forall a, b: P(X \le a \wedge \alpha X \le b) = P(X \le a) \cdot P(\alpha X \le b)$

$a = 1, b = 1$:

$P(X \le 1) = \Phi(1)$; $P(\alpha X \le 1) = \Phi(1)$

$P(X \le 1 \wedge \alpha X \le 1) = \frac{1}{2}P(X \le 1) + \frac{1}{2}(-1 \le X \le 1)$

$= \frac{1}{2}\Phi(1) + \frac{1}{2}(2\Phi(1) - 1) =$

$\frac{1}{2}(3\Phi(1) - 1) \ne \Phi(1)^2$

$\Rightarrow X, \alpha X$ nejsou nezávislé

5 3-16:03

5 3-17:19