Příklad 1. *Televizní stanice, která vysílá seriál Vražedná čísla, by ráda věděla, kolik času se průměrný student matematiky vydrží dívat na TV, aby na ně mohla zaměřit případnou reklamní kampaň. Náhodným výběrem* $M = 20,\ S = 5$

a) 100 studentů, $n = 100$

b) 5 studentů $n = 5$ $\quad \alpha = 0{,}05 \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ neznámé

zjistila, že týdně sledují TV průměrně 20 hodin s (výběrovou) směrodatnou odchylkou 5 hodin. Za předpokladu, že se počet hodin u TV řídí normálním rozdělením, sestrojte v obou případech 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu hodin, který matematici stráví před TV obrazovkou.

$V = M,\ W = T = \frac{M-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ Studentovo t-rozdělení s n−1 stupni volnosti

int. spolehlivosti pro μ:

$$\left(M - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1);\ M + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$

dosadíme

a) $\left(20 - \frac{5}{\sqrt{100}} \cdot t_{0{,}975}(99);\ 20 + \frac{5}{\sqrt{100}} \cdot t_{0{,}975}(99)\right)$

$t_{0{,}975}(99) = 1{,}984$, lze použít odhad pro $n \gg 0$ $\quad t_\alpha(n) \approx u_\alpha(n)$ stand. norm. rozd.

$\left(20 - \frac{5}{10} \cdot 1{,}984;\ 20 + \frac{5}{10} \cdot 1{,}984\right)$

$= (19{,}008;\ 20{,}992)$

b) $\left(20 - \frac{5}{\sqrt{5}} \cdot t_{0{,}975}(4);\ 20 + \frac{5}{\sqrt{5}} t_{0{,}975}(4)\right)$, $t_{0{,}975}(4) = 2{,}776$

$= (13{,}793;\ 26{,}207)$

5 17-16:00

Příklad 2. *Pevnost nosníků má normální rozdělení s variabilitou vyjádřenou směrodatnou odchylkou* $\boxed{\sigma = 120.}$ (BALAST, OLD) *Nová technologie výroby bude akceptována, jestliže zajistí variabilitu nejvýše 100.*

Rozhodněte, zda je možné na základě 16 měření s výběrovou směrodatnou odchylkou rovnou 107,5 s rizikem 0,05 přijmout novou technologii.

a) 107,5; b) 90; 0,05 = α

$1 - \alpha = P(\sigma \le H) = P(\sigma^2 \le H^2) =$ ($\sigma = \sigma_{NEW}$; H neznámý param. $\sigma(?)$)

$= P\left(\frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \le \frac{H^2}{(n-1)S^2}\right) =$

$= P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge \frac{(n-1)S^2}{H^2}\right) \Leftrightarrow$ $\quad K \sim \chi^2(n-1)$

$\alpha = P\left(K \le \frac{(n-1)S^2}{H^2}\right) =$

$F\left(\frac{(n-1)S^2}{H^2}\right)$, kde F je distr. fce rozdělení $\chi^2(n-1)$

$\alpha = F\left(\frac{(n-1)S^2}{H^2}\right) \Leftrightarrow \frac{(n-1)S^2}{H^2} = \chi^2_\alpha(n-1)$

$\Leftrightarrow H^2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_\alpha(n-1)}$, $\quad \chi^2_{0{,}05}(15) \approx 7{,}4$ tab. $7{,}261$

a) $H^2 = \frac{15 \cdot 107{,}5^2}{7{,}261} \Leftrightarrow H \approx 154$

b) $H^2 = \frac{15 \cdot 90^2}{7{,}261} \Leftrightarrow H \approx 129$

c) jaké S_{max} potřebujeme, má-li být $H = 100$

$100^2 = \frac{15 \cdot S_{max}^2}{7{,}261} \Rightarrow S_{max} \approx 69{,}57$

5 17-16:00

$M = ?,\ S^2 = ?$

Příklad 3. *Spotřeba nového modelu auta byla testována 11 řidiči s výsledky 7,5; 7,8; 6,9; 8,2; 8,0; 7,5; 9,0; 7,6; 8,1; 7,9; 8,3. Rozhodněte, zda je možné se spolehlivostí 0,95 vyvrátit tvrzení výrobce o průměrné spotřebě 7,7 l/100 km.*

jednostranný interval spolehlivosti pro μ $\quad 0{,}95 = P(\mu \ge D)$

Vypočteme $M \doteq 7{,}89$

$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - M)^2 \doteq 0{,}293$

Statistika $T = \frac{M-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$0{,}95 = P(\mu \ge D) = P(-\mu \le -D) =$

$= P(M - \mu \le M - D) = P\left(\frac{M-\mu}{S/\sqrt{n}} \le \frac{M-D}{S/\sqrt{n}}\right)$

$\Leftrightarrow 0{,}95 = P\left(T \le \frac{M-D}{S/\sqrt{n}}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{M-D}{S/\sqrt{n}} = t_{0{,}95}(10) \doteq 1{,}813$

$\Rightarrow D = M - 1{,}813 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} =$

$= 7{,}89 - 1{,}813 \cdot \frac{0{,}541}{\sqrt{11}} \doteq 7{,}595$

$0{,}95 = P(\mu \ge 7{,}595)$

nemůžeme vyvrátit tvrzení výrobce

5 17-16:01

Příklad 4. *Hloubka moře se měří přístrojem, jehož systematická chyba je nulová a náhodné chyby měření mají normální rozdělení se směrodatnou odchylkou* $\sigma = 1\,m$. *Určete, kolik měření je třeba provést, aby se hloubka moře určila s chybou nejvýše 1/4 metru při riziku 0,05.*

$n = ?$ $\quad \alpha = 0{,}05$

náhodný výběr z rozdělení $N(\mu; 1^2)$

int. spol. α pro μ:

$$\left(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}};\ M + \boxed{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

Chceme, aby $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{1}{4}$

$\sqrt{n} \ge 4\sigma u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 4 \cdot 1 \cdot 1{,}96$

$\Rightarrow n \ge (4 \cdot 1{,}96)^2 \doteq 61{,}5$

Je třeba alespoň 62 měření!

5 17-16:01

Příklad 5. *31 pacientů s rakovinou plic, léčených novým lékem, má průměrnou dobu přežití 28 měsíců se směrodatnou odchylkou 4 měsíce. Z předchozích studií je známo, že průměrné přežití pacientů bez podávání nového léku je 26 měsíců.* (28 = M, 4 = S)

a) Lze na základě těchto dat usoudit, že nový lék prodlužuje dobu přežití ($\alpha = 0{,}01$)*?*

b) Jak se změní závěr, pokud se významně zvětší počet pacientů, resp. rozptyl?

$0{,}99 = P(\mu \ge D)$ dolní odhad μ

$\Updownarrow$

$0{,}99 = P\left(\frac{M-\mu}{S/\sqrt{n}} \le \frac{M-D}{S/\sqrt{n}}\right)$ $\quad T \sim t(n-1)$

a) $D = M - t_{0{,}99}(30) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \doteq 26{,}235$

Se spolehlivostí 0,99 lze tvrdit, že nový lék prodlužuje dobu přežití

b) větší $n \Rightarrow$ stejný závěr

větší $S^2 \Rightarrow$ potenciálně odlišný závěr tj. pro $D < 26$, nelze tvrdit „nový lék pomáhá".

5 17-16:01

Příklad 6. *Aktivní studenti chtěli dopravnímu podniku dokázat, že autobusy trpí většími výkyvy příjezdových dob na danou zastávku než tramvaje a provedli měření odchylek od jízdního řádu:*

autobus	0	2	4	-3	2	-4	-3	0	0	5
tramvaj	4	6	3	0	-2	2	0	1	1	0

Z tabulky lze snadno vypočítat, že $S_1^2 = 9{,}12$ *a* $S_2^2 = 5{,}39$. *Na hladině 0,05 testujte nulovou hypotézu, že autobus i tramvaj jsou stejně spolehlivé oproti alternativní hypotéze, že tramvaj je spolehlivější.* (0,025)

Statistika $F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1) = F(9,9)$

jednostranný int. spolehlivosti 0,95 pro σ_1^2/σ_2^2 je

$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{0{,}975}(9,9)},\ \infty\right) = (0{,}420;\ \infty)$, $F_{0{,}975}(9,9) = 4{,}026$

Přitom $1 > 0{,}42$, proto nelze tvrdit se spol. 0,975, že busy jsou méně spolehlivé.

5 17-16:02

Příklad 7. *Ve dvou nádržích se zkoumal obsah chlóru. Z první bylo odebráno 22 vzorků, z druhé 10 vzorků. Byly vypočteny následující hodnoty výběrových průměrů a rozptylů:* $M_1 = 34{,}23$, $M_2 = 35{,}73$, $S_1^2 = 1{,}76$, $S_2^2 = 1{,}81$. *Hodnoty zjištěné z odebraných vzorků považujeme za realizace dvou nezávislých náhodných výběrů z rozdělení* $N(\mu_1, \sigma^2)$, *resp.* $N(\mu_2, \sigma^2)$. *Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot* $\mu_1 - \mu_2$ *a vyslovte závěr na dané hladině spolehlivosti o podstatnosti rozdílu naměřených hodnot.*

S_*^2 … vážený průměr výběrových rozptylů

$$S_*^2 = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{(m-1+n-1)} = \frac{21 \cdot 1{,}76 + 9 \cdot 1{,}81}{30} \doteq 1{,}775$$

$\Rightarrow S_* \doteq 1{,}33$

$$M_1 - M_2 \pm S_* \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\, t_{0{,}975}(30) =$$

$$-1{,}5 \pm 1{,}33 \sqrt{\frac{1}{22} + \frac{1}{10}} \cdot 2{,}042 =$$

$$= (-2{,}536; -0{,}464)$$

$0 \notin I \Rightarrow$ závěr: obsah chlóru v nádržích je podstatně odlišný

5 17-16:02

5 17-17:33