

13. demonstrační cvičení

Algoritmus konstrukce intervalu spolehlivosti

1. Zvolíme statistiku V , která je nestranným bodovým odhadem parametru θ .
2. Najdeme tzv. *pivotovou statistiku* W , která je transformací V se známým rozdělením a nezávisí na neznámé hodnotě θ .
3. Najdeme příslušné kvantily rozdělení statistiky W tak, že

$$P(w_{\alpha/2} \leq W \leq w_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

4. Nerovnost $w_{\alpha/2} \leq W \leq w_{1-\alpha/2}$ převedeme ekvivalentními úpravami na nerovnost $T_L \leq \theta \leq T_U$.
5. Z daného výběru zjistíme konkrétní číselné realizace statistik T_L, T_U a dostaneme tak intervalový odhad požadované spolehlivosti $1 - \alpha$.

Intervaly spolehlivosti pro parametry normálního rozdělení

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}, M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2})$
σ^2 (neznáme μ)	$(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)})$

Příklad 1. *Televizní stanice, která vysílá seriál Vražedná čísla, by ráda věděla, kolik času se průměrný student matematiky vydrží dívat na TV, aby na ně mohla zaměřit případnou reklamní kampaň. Náhodným výběrem*

a) 100 studentů,

b) 5 studentů

zjistila, že týdně sledují TV průměrně 20 hodin s (výběrovou) směrodatnou odchylkou 5 hodin. Za předpokladu, že se počet hodin u TV řídí normálním rozdělením, sestrojte v obou případech 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu hodin, který matematici stráví před TV obrazovkou.

[Odpověď: a) (19,01;20,99); b) (13,79;26,20)]

Příklad 2. *Pevnost nosníků má normální rozdělení s variabilitou vyjádřenou směrodatnou odchylkou $\sigma = 120$. Nová technologie výroby bude akceptována, jestliže zajistí variabilitu nejvýše 100.*

Rozhodněte, zda je možné na základě 16 měření s výběrovou směrodatnou odchylkou rovnou 107,5 s rizikem 0,05 přijmout novou technologii.

Příklad 3. *Spotřeba nového modelu auta byla testována 11 řidiči s výsledky 7,5; 7,8; 6,9; 8,2; 8,0; 7,5; 9,0; 7,6; 8,1; 7,9; 8,3. Rozhodněte, zda je možné se spolehlivostí 0,95 vyvrátit tvrzení výrobce o průměrné spotřebě 7,7 l/100 km.*

Příklad 4. *Hloubka moře se měří přístrojem, jehož systematická chyba je nulová a náhodné chyby měření mají normální rozdělení se směrodatnou odchylkou $\sigma = 1$ m. Určete, kolik měření je třeba provést, aby se hloubka moře určila s chybou nejvýše $1/4$ metru při riziku 0,05.*

[Odpověď: 62]

Příklad 5. 31 pacientů s rakovinou plic, léčených novým lékem, má průměrnou dobu přežití 28 měsíců se směrodatnou odchylkou 4 měsíce. Z předchozích studií je známo, že průměrné přežití pacientů bez podávání nového léku je 26 měsíců.

- a) Lze na základě těchto dat usoudit, že nový lék prodlužuje dobu přežití ($\alpha = 0,01$)?
- b) Jak se změní závěr, pokud se významně zvětší počet pacientů, resp. rozptyl?

Intervaly spolehlivosti pro parametry 2 normálních rozdělení

$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_* \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} t_{1-\alpha/2}$
společný rozptyl σ^2	$\left(\frac{(m+n-2)S_*^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(m+n-2)}, \frac{(m+n-2)S_*^2}{\chi_{\alpha/2}^2(m+n-2)} \right)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1, n-1)} \right)$

Příklad 6. *Aktivní studenti chtěli dopravnímu podniku dokázat, že autobusy trpí většími výkyvy příjezdových dob na danou zastávku než tramvaje a provedli měření odchylek od jízdního řádu:*

autobus	0	2	4	-3	2	-4	-3	0	0	5
tramvaj	4	6	3	0	-2	2	0	1	1	0

Z tabulky lze snadno vypočítat, že $S_1^2 = 9,12$ a $S_2^2 = 5,39$. Na hladině 0,05 testujte nulovou hypotézu, že autobus i tramvaj jsou stejně spolehlivé oproti alternativní hypotéze, že tramvaj je spolehlivější.

Příklad 7. *Ve dvou nádržích se zkoumal obsah chlóru. Z první bylo odebráno 22 vzorků, z druhé 10 vzorků. Byly vypočteny následující hodnoty výběrových průměrů a rozptylů: $M_1 = 34,23$, $M_2 = 35,73$, $S_1^2 = 1,76$, $S_2^2 = 1,81$. Hodnoty zjištěné z odebraných vzorků považujeme za realizace dvou nezávislých náhodných výběrů z rozdělení $N(\mu_1, \sigma^2)$, resp. $N(\mu_2, \sigma^2)$. Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot $\mu_1 - \mu_2$ a vyslovte závěr na dané hladině spolehlivosti o podstatnosti rozdílu naměřených hodnot.*

[Odpověď: Dosadíme do vztahu $M_1 - M_2 \pm S_ \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$ hodnoty $M_1 - M_2 = -1,5$, $S_* = 1,3323$ a dostaneme interval $(-2,5377; -0,4623)$. Do tohoto intervalu 0 nepatří, proto je rozdíl $\mu_1 - \mu_2$ statisticky významně různý od nuly.]*