Příklad 1. *Třikrát nezávisle na sobě hodíme mincí. Náhodná veličina X udává počet hlav, které padnou při těchto hodech. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny X.*

diskrétní

HHH $x=3$

HHT, HTH, THH $x=2$

HTT, THT, TTH $x=1$

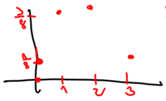
TTT $x=0$

$p(0)=P(X=0)=\frac{1}{8}$

$p(1)=P(X=1)=\frac{3}{8}$

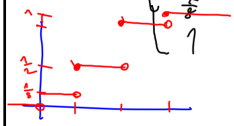
$p(2)=P(X=2)=\frac{3}{8}$

$p(3)=P(X=3)=\frac{1}{8}$



$F_X(x)=\boxed{P(X\le x)}$ $x\in\mathbb{R}$

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{8} & x\in\langle 0,1)\\ \frac{1}{2} & x\in\langle 1,2)\\ \frac{7}{8} & x\in\langle 2,3)\\ 1 & x\in\langle 3,\infty)\end{cases}$$



4 19-15:58

Příklad 2. *Pravděpodobnost, že výrobek bude vyhovovat všem technickým požadavkům, je 0,9. Popište rozdělení náhodné veličiny udávající počet nevyhovujících výrobků mezi 3 výrobky.*

N ... # nevyhovujících výrobků $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

$p(0)=P(N=0)=0{,}9^3$

$p(1)=P(N=1)=3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^2$

$p(2)=P(N=2)=\binom{3}{2}\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9$

$p(3)=P(N=3)=0{,}1^3$

4 19-16:20

Příklad 3. *Předpokládejme, že X má diskrétní rozdělení takové, že*

$$P(X=k)=c\cdot k^2 \quad pro \quad k=1,2,3$$

a $P(X=k)=0$ jinak. Určete

1. *hodnotu c,*
2. *$P(X\ge 2)$,*
3. *$P(X\in\{1,3\})$.*

$P(X=1)=p(1)=c$

$P(X=2)=p(2)=4c$

$P(X=3)=p(3)=9c$

ad 1. $c\ge 0, 4c\ge 0, 9c\ge 0 \iff c\ge 0$

$p(1)+p(2)+p(3)=1=P(X\in\Omega)=P(-\infty<X<\infty)$

$c+4c+9c=1\iff c=\frac{1}{14}$

ad 2. $P(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{13}{14}$

$1-F_X(1)=1-P(X\le 1)$

ad 3. $P(X\in\{1,3\})=p(1)+p(3)=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$

4 19-16:27

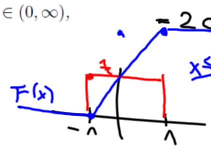
Příklad 4. *Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou hustotami (mimo vymezený interval je vždy funkce nulová, c je vhodná konstanta – v případě, že jde o hustotu, tuto konstantu určete):*

1. *c pro $x\in(-1,1)$,*
2. *cx pro $x\in(0,1)$,*
3. *cx pro $x\in(-1,2)$,*
4. *$cx\sin x$ pro $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,*
5. *ce^x pro $x\in(0,\infty)$,*
6. *ce^{-x} pro $x\in(0,\infty)$,*
7. *$\frac{c}{1+x^2}$.*

ad 1. $f(x)=c$

$f(x)=c\ge 0$

$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}c\,dx=c\cdot\int_{-1}^{1}dx=c\cdot[1-(-1)]=2c\Rightarrow c=\frac{1}{2}$ ANO



$x\le 1$: $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt=\int_{-1}^{x}c\,dt=c(x+1)=\frac{1}{2}(x+1)$

4 19-16:33

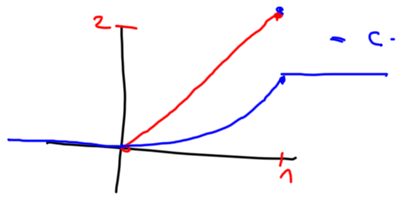
ad 2. $f(x)=c\cdot x$, $x\in(0,1)$ ANO

$f(x)\ge 0\Rightarrow c\ge 0$

$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\int_{0}^{1}c\cdot x\,dx=c\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{c}{2}$

$\Rightarrow c=2$

$x\le 1$: $F(x)=\int_0^x c\cdot t\,dt=c\cdot\frac{x^2}{2}=x^2$



4 19-16:14

ad 3. $f(x)=c\cdot x$, $x\in(-1,2)$

$f(x)\ge 0$ $\forall x\in(-1,2)$

$c\cdot x$

$\Rightarrow c=0\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=0$

NENÍ HUSTOTOU PRO ŽÁDNÉ $c\in\mathbb{R}$.

ad 4. $f(x)=c\,x\sin x$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$f(x)\ge 0\iff c\ge 0$

$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}c\,x\sin x\,dx=\left|\begin{matrix}u=x & u'=1\\ v'=\sin x & v=-\cos x\end{matrix}\right|$

$=c\left(\left[-x\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\right)=c\cdot\left[\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=2c\Rightarrow c=\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{1}{2}x\cdot\sin x$ je hustota na $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

4 19-16:42

ad 5. $f(x) = c \cdot e^x$, $x \in (0, \infty)$

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow c \geq 0$

$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} c \cdot e^x\,dx = c \cdot [e^x]_0^{\infty} =$

$= \infty$ NENÍ HUSTOTA

ad 6. $f(x) \geq 0 \Rightarrow c \geq 0$

$1 = \int_0^{\infty} c \cdot e^{-x}\,dx = c \cdot [-e^{-x}]_0^{\infty} = c \cdot (0 - (-1))$

$\Rightarrow \underline{c = 1}$ JE TO HUSTOTA

ad 7. $f(x) = \frac{c}{1+x^2}$, $x \in (-\infty, \infty)$

$c \geq 0$

$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{1+x^2}\,dx = c \cdot [\operatorname{arctg} x]_{-\infty}^{\infty}$

$= c \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\Rightarrow c = \frac{1}{\pi}$

$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ je hustota na $\mathbb{R}$

4 19-16:50

Příklad 5. *Náhodná veličina X má distribuční funkci*

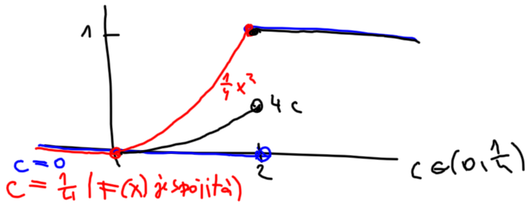
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ c \cdot x^2 & \text{pro } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{pro } x \geq 2. \end{cases}$$

Jaké hodnoty může nabývat konstanta c?

a) $0 \leq F(x) \leq 1$ neklesající $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

$\Downarrow$

$c \geq 0$ $1 \geq F(2) = c \cdot 4 \Rightarrow c \leq \frac{1}{4}$



Odpověď: $c \in \langle 0, \frac{1}{4} \rangle$

4 19-16:56

Příklad 6. *Náhodná veličina X má distribuční funkci*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq -5 \\ \frac{x+5}{7} & \text{pro } -5 \leq x < 2 \\ 1 & \text{pro } x \geq 2. \end{cases}$$

Určete:

1. *hustotu pravděpodobnosti f(x),*
2. *P(−2 < X < 2),*
3. *P(X = 2),*
4. *P(−6 < X < 1).*

ad 1. $f(x) = 0$ pro $x \leq -5$

$f(x) = 0$ pro $x \geq 2$

$x \in \langle -5, 2 \rangle$: $f(x) = F'(x) = \frac{1}{7}$

ad 2. $P(-2 < X \leq 2) = F(2) - F(-2) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$

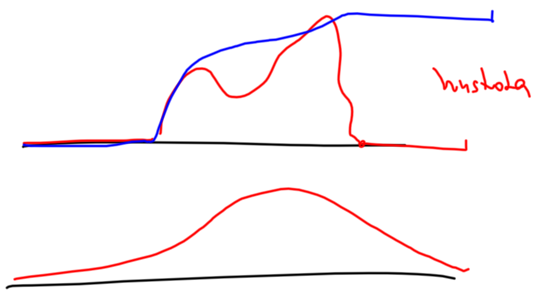
$<$ $= \lim_{x \to 2^-} F(x) - F(-2) = -\text{"}-$

ad 3. $P(X = 2) = F(2) - \lim_{x \to 2^-} F(x) = 0$

ad 4. $P(-6 < X < 1) = P(-5 < X \leq 1) =$

$F(1) - F(-5) = \frac{6}{7} - 0 = \frac{6}{7}$

4 19-17:04



4 19-17:09

Příklad 7. *V zásilce s 10 výrobky je 8 kvalitních (z nich je 5 první jakosti a 3 jsou druhé jakosti) a 2 zmetky. Ze zásilky vybereme bez vracení 2 výrobky. Náhodná veličina X nechť značí počet vybraných kvalitních výrobků a Y počet vybraných výrobků první jakosti. Určete sdruženou i marginální pravděpodobností funkci a rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y stochasticky nezávislé.*

$p(x, y) = P(X = x, Y = y)$ ... sdružená pr. fce

X \ Y	0	1	2	
0	$\frac{1}{45}$	0	0	$p_X(0) = \frac{1}{45}$
1	$\frac{6}{45}$	$\frac{10}{45}$	0	$p_X(1) = \frac{16}{45}$
2	$\frac{3}{45}$	$\frac{15}{45}$	$\frac{10}{45}$	$p_X(2) = \frac{28}{45}$
	$p_Y(0) = \frac{10}{45}$	$p_Y(1)$	$p_Y(2)$	

$p(0,0) = \frac{1}{\binom{10}{2}}$

$p(x, y) = \frac{\binom{5}{y} \cdot \binom{3}{x-y} \cdot \binom{2}{2-x}}{\binom{10}{2}}$ $x \geq y$

Marginální pr. fce $p_X(x) = \sum_y p(x, y)$

NEZÁVISLÉ $\Leftrightarrow \forall x, y$: $p(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$ $\boxed{\text{NE}}$JSOU

4 19-17:13

Příklad 8. *Spojitý náhodný vektor (X, Y) má hustotu*

$$f(x, y) = 24x^2y(1-x)$$

pro $0 \leq x, y < 1$ a jinde nulovou. Dokažte, že X a Y jsou stochasticky nezávislé.

Marginální hustoty f_X, f_Y:

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 24x^2y(1-x)\,dy =$

$= 24x^2(1-x) \int_0^1 y\,dy = 24x^2(1-x) \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \underline{12x^2(1-x)}$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 24x^2y(1-x)\,dx = 24y \int_0^1 x^2 - x^3\,dx =$

$= 24y \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \underline{2y}$

Platí $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \Rightarrow$ ST. NEZ.

$24x^2y(1-x) \quad = \quad 12x^2(1-x) \cdot 2y$

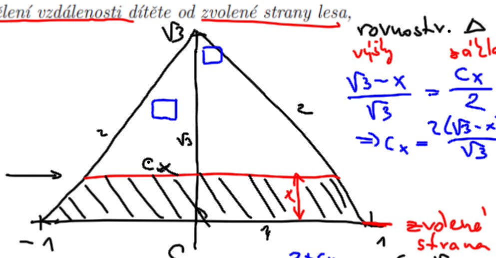
4 19-17:25

Příklad 10. *V lese tvaru trojúhelníka s vrcholy v bodech $(-1,0)$, $(1,0)$ a $(0,\sqrt{3})$ se ztratilo dítě. Pravděpodobnost výskytu dítěte v určité části lesa je úměrná velikosti této části, nikoliv umístění této části. Určete rozdělení vzdálenosti dítěte od zvolené strany lesa,*

rovnostr. Δ

výšky základy

$$\frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}} = \frac{c_x}{2} \Rightarrow c_x = \frac{2(\sqrt{3}-x)}{\sqrt{3}}$$



$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{S_{▱}}{S_\Delta} = \frac{\frac{2+c_x}{2}\cdot x}{\sqrt{3}} = \frac{\left(1+\frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}}\right)\cdot x}{\sqrt{3}}$$

$x \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle$

4 19-17:25