

Matematika IV – 10. přednáška

Transformace a číselné charakteristiky náhodných veličin

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

27. 4. 2011

Obsah přednášky

- 1 Transformace náhodných veličin
- 2 Číselné charakteristiky náhodných veličin

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, e-text.
- Karel Zvára, Josef Štěpán, **Pravděpodobnost a matematická statistika**, Matfyzpress, 4. vydání, 2006, 230 stran, ISBN 80-867-3271-1.
- Marie Budíková, Štěpán Mikoláš, Pavel Osecký, **Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika (sbírka příkladů)**, Masarykova univerzita, 3. vydání, 2004, 117 stran, ISBN 80-210-3313-4.
- Marie Budíková, **Statistika**, Masarykova univerzita, 2004, distanční studijní opora ESF, <http://www.math.muni.cz/~budikova/esf/Statistika.zip>.
- Marie Budíková, Tomáš Lerch, Štěpán Mikoláš, **Základní statistické metody**, Masarykova univerzita, 2005, 170 stran, ISBN 80-210-3886-1.

Plán přednášky

- 1 Transformace náhodných veličin
- 2 Číselné charakteristiky náhodných veličin

Věta (de Moivre-Laplaceova)

Pro náhodné veličiny X_n s rozdělením $\text{Bi}(n, p)$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[a < \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b \right] = \Phi(b) - \Phi(a),$$

kde Φ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.

Příklad

Hodíme kostkou celkem 12 000 krát. Určete pravděpodobnost toho, že počet hozených šestek je mezi 1 800 a 2 100.

Věta (de Moivre-Laplaceova)

Pro náhodné veličiny X_n s rozdělením $Bi(n, p)$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[a < \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b \right] = \Phi(b) - \Phi(a),$$

kde Φ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.

Příklad

Hodíme kostkou celkem 12 000 krát. Určete pravděpodobnost toho, že počet hozených šestek je mezi 1 800 a 2 100.

Řešení

Přesná pravděpodobnost je dána výrazem

$\sum_{k=1800}^{2100} \binom{12000}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{12000-k}$, což je obtížně vyčíslitelné.

Řešení (pokr.)

Využijeme tvrzení Moivre-Laplaceovy věty, přepsaného do tvaru

$$P[A < X_n < B] - \left(\Phi \left(\frac{B - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right) - \Phi \left(\frac{A - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right) \right) \rightarrow 0$$

pro $n \rightarrow \infty$.

Řešení (pokr.)

Využijeme tvrzení Moivre-Laplaceovy věty, přepsaného do tvaru

$$P[A < X_n < B] - \left(\Phi\left(\frac{B - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{A - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \right) \rightarrow 0$$

pro $n \rightarrow \infty$.

Volbou $p = 1/6$, $A = 1800$, $B = 2100$, $n = 12000$ dostáváme odhad

$$\begin{aligned} P &\approx \Phi\left(\frac{2100 - 2000}{\sqrt{12000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}\right) - \Phi\left(\frac{1800 - 2000}{\sqrt{12000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}\right) = \\ &= \Phi(\sqrt{6}) - \Phi(-2\sqrt{6}) \approx 0,992. \end{aligned}$$

Moivre-Laplaceova věta – opakování

Příklad

Nezávisle opakujeme pokus s výsledky 1 a 0, které mají **neznámé** pravděpodobnosti p a $1 - p$. Parametr p chceme odhadnout pomocí *relativních četností* X_n/n (X_n je počet jedniček při n pokusech). Víme, že je $X_n \sim \text{Bi}(n, p)$, proto nám Moivre-Laplaceova věta umožní určit počet pokusů n potřebný k zajištění požadované přesnosti odhadu δ se spolehlivostí $1 - \beta$.

Řešení

Hledáme nejmenší n , splňující nerovnost

$P[|X_n/n - p| < \delta] \geq 1 - \beta$, kterou můžeme podle věty
aproximovat nerovností

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \\ & = 2\Phi\left(\frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1 \geq 1 - \beta. \end{aligned}$$

Řešení

Hledáme nejmenší n , splňující nerovnost

$P[|X_n/n - p| < \delta] \geq 1 - \beta$, kterou můžeme podle věty aproximovat nerovností

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \\ & = 2\Phi\left(\frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1 \geq 1 - \beta. \end{aligned}$$

Ta je ekvivalentní s podmínkou $n\delta/\sqrt{np(1-p)} \geq z(\beta/2)$, kde $z(p)$ je řešení rovnice $\Phi(z(p)) = 1 - p$ (tzv. *kritická hodnota* normovaného normálního rozdělení nebo $1 - p$ -tý kvantil).

Řešení

Hledáme nejmenší n , splňující nerovnost

$P[|X_n/n - p| < \delta] \geq 1 - \beta$, kterou můžeme podle věty aproximovat nerovností

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \\ & = 2\Phi\left(\frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1 \geq 1 - \beta. \end{aligned}$$

Ta je ekvivalentní s podmínkou $n\delta/\sqrt{np(1-p)} \geq z(\beta/2)$, kde $z(p)$ je řešení rovnice $\Phi(z(p)) = 1 - p$ (tzv. *kritická hodnota* normovaného normálního rozdělení nebo $1 - p$ -tý kvantil). Pro $\delta = 0,05$ a $1 - \beta = 0,9$ máme z tabulek $z(\beta/2) \approx 1,645$ a s využitím snadného odhadu $p(1-p) \leq 1/4$ dostáváme $n \geq (z(\beta/2)/2\delta)^2 \approx 270,6$.

Transformace normálně rozložené veličiny

Zkusme nyní afinně transformovat veličinu Z s normálním rozdělením $N(0, 1)$. Pro pevně zvolená čísla $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ spočtěme rozdělení náhodné veličiny $X = \mu + \sigma Z$. Dostáváme distribuční funkci

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X < x) = P(\mu + \sigma Z < x) \\ &= F_Z\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x - \mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(s - \mu)^2}{2\sigma^2}} ds, \end{aligned}$$

kde poslední úprava vychází ze substituce $s = \mu + \sigma t$. Hustota naší nové náhodné veličiny X je proto

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

a takovému rozdělení se říká normální typu $N(\mu, \sigma)$.

Plán přednášky

- 1 Transformace náhodných veličin
- 2 Číselné charakteristiky náhodných veličin

Střední hodnota

Při statistickém zkoumání hodnot náhodných veličin (např. zpracování výsledků nějakého měření) hledáme výpovědi o náhodné veličině pomocí různých z ní odvozených čísel.

Jako nejjednodušší příklad může sloužit **střední hodnota**¹ $E(X)$ náhodné veličiny X , která je definována

$$E(X) = \begin{cases} \sum_i x_i \cdot f_X(x_i) & \text{pro diskrétní veličinu} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx & \text{pro spojitou veličinu.} \end{cases}$$

Obecně střední hodnota náhodných veličin nemusí existovat, protože příslušné sumy či integrály nemusí konvergovat.

¹Často se místo $E(X)$ píše EX .

Příklad

Spočtěme střední hodnotu binomického rozdělení.

Příklad

Spočtěme střední hodnotu binomického rozdělení.

Řešení

Pro $X \sim \text{Bi}(n, p)$ je

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} p^j (1-p)^{n-1-j} = \\ &= np(p + (1-p))^{n-1} = np. \end{aligned}$$

Základní vlastnosti střední hodnoty

Věta

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a X, Y jsou náhodné veličiny s existující střední hodnotou. Pak

- $E(a) = a,$

Základní vlastnosti střední hodnoty

Věta

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a X, Y jsou náhodné veličiny s existující střední hodnotou. Pak

- $E(a) = a,$
- $E(a + bX) = a + bE(X),$

Základní vlastnosti střední hodnoty

Věta

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a X, Y jsou náhodné veličiny s existující střední hodnotou. Pak

- $E(a) = a,$
- $E(a + bX) = a + bE(X),$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y),$

Základní vlastnosti střední hodnoty

Věta

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a X, Y jsou náhodné veličiny s existující střední hodnotou. Pak

- $E(a) = a,$
- $E(a + bX) = a + bE(X),$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y),$
- *jsou-li X a Y **nezávislé**, pak $E(XY) = E(X) \cdot E(Y).$*

Základní vlastnosti střední hodnoty

Věta

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a X, Y jsou náhodné veličiny s existující střední hodnotou. Pak

- $E(a) = a,$
- $E(a + bX) = a + bE(X),$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y),$
- *jsou-li X a Y **nezávislé**, pak $E(XY) = E(X) \cdot E(Y).$*

Základní vlastnosti střední hodnoty

Věta

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a X, Y jsou náhodné veličiny s existující střední hodnotou. Pak

- $E(a) = a,$
- $E(a + bX) = a + bE(X),$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y),$
- *jsou-li X a Y **nezávislé**, pak $E(XY) = E(X) \cdot E(Y).$*

Důkazy těchto tvrzení jsou přímočaré, zkuste si je udělat!
Analogická tvrzení platí i pro náhodné vektory.

Příklad

Spočtěme ještě jednu střední hodnotu binomického rozdělení, tentokrát s využitím vlastností střední hodnoty.

Příklad

Spočtěme ještě jednou střední hodnotu binomického rozdělení, tentokrát s využitím vlastností střední hodnoty.

Řešení

Vyjádříme počet zdarů v n pokusech jako počet zdarů v jednotlivých pokusech

$$X = \sum_{k=1}^n Y_k,$$

přičemž náhodné veličiny Y_k mají všechny alternativní rozdělení $A(p)$. Snadno spočítáme $E(Y_k) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$. Dále víme, že střední hodnota součtu je součtem středních hodnot, proto

$$E(X) = \sum_{k=1}^n E(Y_k) = np.$$

Kvantily

Dalšími užitečnými charakteristikami jsou tzv. **kvantily**. Pro ryze monotónní distribuční funkci F_X (tj. spojitou náhodnou veličinu X s všude nenulovou hustotou, jako je tomu např. u normálního rozdělení) jde prostě o inverzní funkci $F_X^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. To znamená, že hodnota $y = F^{-1}(\alpha)$ je taková, že $P(X < y) = \alpha$. Obecněji, je-li $F_X(x)$ distribuční funkce náhodné veličiny X , pak definujeme **kvantilovou funkci**²

$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Zřejmě jde o zobecnění předchozí definice.

²Uvědomte si, že jsme se již s kvantily setkali, jen jsme jím tak zatím neřekli.

Kvantily

Dalšími užitečnými charakteristikami jsou tzv. **kvantily**. Pro ryze monotónní distribuční funkci F_X (tj. spojitou náhodnou veličinu X s všude nenulovou hustotou, jako je tomu např. u normálního rozdělení) jde prostě o inverzní funkci $F_X^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. To znamená, že hodnota $y = F^{-1}(\alpha)$ je taková, že $P(X < y) = \alpha$. Obecněji, je-li $F_X(x)$ distribuční funkce náhodné veličiny X , pak definujeme **kvantilovou funkci**²

$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Zřejmě jde o zobecnění předchozí definice.

Nejčastěji jsou používané kvantily s $\alpha = 0.5$, tzv. **medián**, s $\alpha = 0.25$, tzv. **první kvartil**, $\alpha = 0.75$, tzv. **třetí kvartil**, a podobně pro **decily** a **percentily** (kdy je α rovno násobkům desetin a setin). K těmto hodnotám se vrátíme v popisné statistice později.

²Uvědomte si, že jsme se již s kvantily setkali, jen jsme jím tak zatím neříkali.

Rozptyl a směrodatná odchylka

Tyto číselné charakteristiky rozdělení náhodné veličiny nepopisují nějakou střední či typickou hodnotu (jako střední hodnota či medián), ale míru „kolísání“ náhodné veličiny kolem střední hodnoty.

Rozptyl a směrodatná odchylka

Tyto číselné charakteristiky rozdělení náhodné veličiny nepopisují nějakou střední či typickou hodnotu (jako střední hodnota či medián), ale míru „kolísání“ náhodné veličiny kolem střední hodnoty.

Rozptylem (variancí) náhodné veličiny X , která má konečnou střední hodnotu, nazýváme číslo

$$D(X) = \text{var } X = E([X - E(X)]^2),$$

odmocnina z rozptylu $\sqrt{D(x)}$ se pak nazývá **směrodatná odchylka**.

Základní vlastnosti rozptylu

Věta

Pro náhodnou veličinu X a reálná čísla a, b platí:

① $D(X) = E(X^2) - E(X)^2,$

Základní vlastnosti rozptylu

Věta

Pro náhodnou veličinu X a reálná čísla a, b platí:

- 1 $D(X) = E(X^2) - E(X)^2,$
- 2 $D(a + bX) = b^2 D(X),$

Základní vlastnosti rozptylu

Věta

Pro náhodnou veličinu X a reálná čísla a, b platí:

- 1 $D(X) = E(X^2) - E(X)^2,$
- 2 $D(a + bX) = b^2 D(X),$
- 3 $\sqrt{D(a + bX)} = |b| \sqrt{D(X)}.$

Základní vlastnosti rozptylu

Věta

Pro náhodnou veličinu X a reálná čísla a, b platí:

- 1 $D(X) = E(X^2) - E(X)^2,$
- 2 $D(a + bX) = b^2 D(X),$
- 3 $\sqrt{D(a + bX)} = |b| \sqrt{D(X)}.$

Základní vlastnosti rozptylu

Věta

Pro náhodnou veličinu X a reálná čísla a, b platí:

- 1 $D(X) = E(X^2) - E(X)^2,$
- 2 $D(a + bX) = b^2 D(X),$
- 3 $\sqrt{D(a + bX)} = |b| \sqrt{D(X)}.$

Důkaz.

Důkaz je přímočarý. Poznamenejme, že tvrzení 1 se často používá k výpočtům $D(X)$. □

Kovariance

O závislosti dvou náhodných veličin do jisté míry vypovídá tzv. **kovariance**, definovaná předpisem

$$C(X, Y) = \text{cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]).$$

Veličinám X, Y , pro něž je $C(X, Y) = 0$, říkáme **nekorelované** .

Kovariance

O závislosti dvou náhodných veličin do jisté míry vypovídá tzv. **kovariance**, definovaná předpisem

$$C(X, Y) = \text{cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]).$$

Veličinám X, Y , pro něž je $C(X, Y) = 0$, říkáme **nekorelované**.

Věta

Pro náhodné veličiny s existujícími rozptyly platí:

- 1 $C(X, Y) = C(Y, X),$

Kovariance

O závislosti dvou náhodných veličin do jisté míry vypovídá tzv. **kovariance**, definovaná předpisem

$$C(X, Y) = \text{cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]).$$

Veličinám X, Y , pro něž je $C(X, Y) = 0$, říkáme **nekorelované**.

Věta

Pro náhodné veličiny s existujícími rozptyly platí:

- 1 $C(X, Y) = C(Y, X),$
- 2 $C(X, X) = D(X),$

Kovariance

O závislosti dvou náhodných veličin do jisté míry vypovídá tzv. **kovariance**, definovaná předpisem

$$C(X, Y) = \text{cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]).$$

Veličinám X, Y , pro něž je $C(X, Y) = 0$, říkáme **nekorelované**.

Věta

Pro náhodné veličiny s existujícími rozptyly platí:

- 1 $C(X, Y) = C(Y, X),$
- 2 $C(X, X) = D(X),$
- 3 $C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y),$

Kovariance

O závislosti dvou náhodných veličin do jisté míry vypovídá tzv. **kovariance**, definovaná předpisem

$$C(X, Y) = \text{cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]).$$

Veličinám X, Y , pro něž je $C(X, Y) = 0$, říkáme **nekorelované**.

Věta

Pro náhodné veličiny s existujícími rozptyly platí:

- 1 $C(X, Y) = C(Y, X),$
- 2 $C(X, X) = D(X),$
- 3 $C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y),$
- 4 $C(a + bX, c + dY) = bd \cdot C(X, Y),$

Kovariance

O závislosti dvou náhodných veličin do jisté míry vypovídá tzv. **kovariance**, definovaná předpisem

$$C(X, Y) = \text{cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]).$$

Veličinám X, Y , pro něž je $C(X, Y) = 0$, říkáme **nekorelované**.

Věta

Pro náhodné veličiny s existujícími rozptyly platí:

- 1 $(X, Y) = C(Y, X)$,
- 2 $C(X, X) = D(X)$,
- 3 $C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$,
- 4 $C(a + bX, c + dY) = bd \cdot C(X, Y)$,
- 5 $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2C(X, Y)$, speciálně, jsou-li X, Y nezávislé, je $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, tj. $C(X, Y) = 0$ a X, Y jsou nekorelované.

Koeficient korelace

Koeficient korelace je jen speciální název pro kovarianci dvou normovaných náhodných veličin:

$$R(X, Y) = \rho_{X,Y} = C \left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \right).$$

Koeficient korelace

Koeficient korelace je jen speciální název pro kovarianci dvou normovaných náhodných veličin:

$$R(X, Y) = \rho_{X,Y} = C \left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \right).$$

Věta

① $R(X, X) = 1,$

Koeficient korelace

Koeficient korelace je jen speciální název pro kovarianci dvou normovaných náhodných veličin:

$$R(X, Y) = \rho_{X,Y} = C \left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \right).$$

Věta

- 1 $R(X, X) = 1,$
- 2 $R(a + bX, c + dY) = \operatorname{sgn}(bd)R(X, Y),$

Koeficient korelace

Koeficient korelace je jen speciální název pro kovarianci dvou normovaných náhodných veličin:

$$R(X, Y) = \rho_{X,Y} = C \left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \right).$$

Věta

- 1 $R(X, X) = 1,$
- 2 $R(a + bX, c + dY) = \operatorname{sgn}(bd)R(X, Y),$
- 3 *jsou-li X, Y nezávislé, je $R(X, Y) = 0,$*

Koeficient korelace

Koeficient korelace je jen speciální název pro kovarianci dvou normovaných náhodných veličin:

$$R(X, Y) = \rho_{X,Y} = C \left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \right).$$

Věta

- 1 $R(X, X) = 1,$
- 2 $R(a + bX, c + dY) = \operatorname{sgn}(bd)R(X, Y),$
- 3 *jsou-li* X, Y *nezávislé,* je $R(X, Y) = 0,$
- 4 (*Cauchyova nerovnost*) $|R(X, Y)| \leq 1.$

Příklad

Spočtíme rozptyl binomického rozdělení.

Příklad

Spočtěme rozptyl binomického rozdělení.

Řešení

Stejně jako dříve lze psát $X = \sum_{k=1}^n Y_k$, kde Y_1, \dots, Y_n jsou nezávislé náhodné veličiny vyjadřující úspěch v k -tém pokusu.

Snadno vypočteme $E(Y_k^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1 - p) = p$, proto $D(Y_k) = E(Y_k^2) - E(Y_k)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$. Protože pro **nezávislé** Y_k platí $D(\sum Y_k) = \sum D(Y_k)$, je $D(X) = np(1 - p)$.

Normovaná náhodná veličina a limitní věty

Všimněme si, že výraz $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ vystupující v Moivre-Laplaceově větě je totéž, co $\frac{X_n - E(X_n)}{\sqrt{D(x)}}$ a jde tedy o tzv. **normovanou** náhodnou veličinu (tj. veličinu lineárně transformovanou tak, aby měla střední hodnotu 0 a rozptyl 1). Moivre-Laplaceova věta pak říká, že pro $n \rightarrow \infty$ se rozložení této náhodné veličiny blíží normovanému normálnímu rozdělení $N(0, 1)$.

Normovaná náhodná veličina a limitní věty

Všimněme si, že výraz $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ vystupující v Moivre-Laplaceově větě je totéž, co $\frac{X_n - E(X_n)}{\sqrt{D(x)}}$ a jde tedy o tzv. **normovanou** náhodnou veličinu (tj. veličinu lineárně transformovanou tak, aby měla střední hodnotu 0 a rozptyl 1). Moivre-Laplaceova věta pak říká, že pro $n \rightarrow \infty$ se rozložení této náhodné veličiny blíží normovanému normálnímu rozdělení $N(0, 1)$. Jde o speciální případ limitních vět, ukazujících, že za určitých podmínek platí „zákony velkých čísel“, kdy se obdobným způsobem transformované náhodné veličiny chovají jako normální rozdělení (podrobněji příště).

Další momenty

Někdy je užitečné studovat řadu dalších charakteristik rozdělení náhodných veličin. Za rozumných předpokladů jsou definovány **k -té obecné momenty**

$$\mu'_k = E(X^k)$$

a **k -té centrální momenty**

$$\mu_k = E([X - E(X)]^k).$$

Další momenty

Někdy je užitečné studovat řadu dalších charakteristik rozdělení náhodných veličin. Za rozumných předpokladů jsou definovány **k -té obecné momenty**

$$\mu'_k = E(X^k)$$

a **k -té centrální momenty**

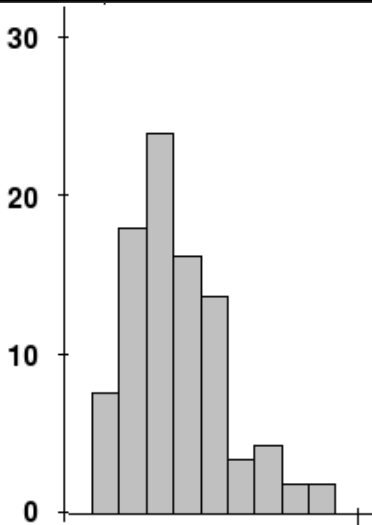
$$\mu_k = E([X - E(X)]^k).$$

Pomocí momentů pak definujeme např. **šikmost** (asymetrii) náhodné veličiny X jako

$$\frac{\mu_3}{\sqrt{D(x)}^3}$$

nebo **špičatost** (exces) jako

$$\frac{\mu_4}{D(x)^2} - 3.$$



Kladná šikmost distribuce (více vysokých kladných hodnot než odpovídá normálnímu rozdělení s nulovou šikmostí).

Momentová vytvořující funkce

Definice

Reálnou funkci proměnné $t \in \mathbb{R}$ $M_X(t) = E(e^{tX})$ nazveme **momentovou vytvořující funkcí** náhodné veličiny X .

Poznámka

Je-li X např. spojitá, platí

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2!} + \dots\right) f(x) dx = \\ &= 1 + t\mu'_1 + \frac{t^2 \mu'_2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

a jde vlastně o *exponenciální vytvořující funkci* posloupnosti k -tých obecných momentů μ'_k .

Věta

Pro momentovou vytvořující funkci platí:

- $\mu'_k = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t) |_{t=0}$.

Věta

Pro momentovou vytvořující funkci platí:

- $\mu'_k = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t) |_{t=0}$.
- *Platí-li $M_X(t) = M_Y(t)$ pro všechna $t \in \langle -b, b \rangle$, mají náhodné veličiny stejné rozdělení, tj. $F_X(x) = F_Y(x)$.*

Věta

Pro momentovou vytvořující funkci platí:

- $\mu'_k = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t) |_{t=0}$.
- *Platí-li $M_X(t) = M_Y(t)$ pro všechna $t \in \langle -b, b \rangle$, mají náhodné veličiny stejné rozdělení, tj. $F_X(x) = F_Y(x)$.*
- $M_{a+bX}(t) = e^{at} M_X(bt)$.

Věta

Pro momentovou vytvořující funkci platí:

- $\mu'_k = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t) |_{t=0}$.
- *Platí-li $M_X(t) = M_Y(t)$ pro všechna $t \in \langle -b, b \rangle$, mají náhodné veličiny stejné rozdělení, tj. $F_X(x) = F_Y(x)$.*
- $M_{a+bX}(t) = e^{at} M_X(bt)$.
- *Jsou-li X, Y nezávislé, je $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$.*

Příklad

Určete momentovou vytvořující funkci binomického rozdělení.

Příklad

Určete momentovou vytvořující funkci binomického rozdělení.

Řešení

$$\begin{aligned}M(t) &= E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} = \\&= (pe^t + (1-p))^n = (p(e^t - 1) + 1)^n.\end{aligned}$$

Příklad

Určete momentovou vytvořující funkci binomického rozdělení.

Řešení

$$\begin{aligned}M(t) &= E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} = \\&= (pe^t + (1-p))^n = (p(e^t - 1) + 1)^n.\end{aligned}$$

Snáze jsme mohli funkci určit s využitím předchozích vět a momentové vytvořující funkce alternativního rozdělení, neboť pro $Y \sim A(p)$ je $E(e^{tY}) = e^{t \cdot 1} \cdot p + e^{t \cdot 0}(1-p) = p(e^t - 1) + 1$.

Příklad

Naposled spočtíme střední hodnotu a rozptyl binomického rozdělení, tentokrát s využitím vytvořující funkce.

Příklad

Naposled spočtěme střední hodnotu a rozptyl binomického rozdělení, tentokrát s využitím vytvořující funkce.

Řešení

$M(t) = (p(e^t - 1) + 1)^n$, proto je

$$\frac{d}{dt}M(t) = n(p(e^t - 1) + 1)^{n-1}e^t p,$$

což pro $t = 0$ dá $E(X) = \mu'_1 = np$.

Podobně spočítáme i $D(x) = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$.

Momenty normálního rozdělení

Přímý výpočet střední hodnoty a rozptylu normovaného normálního rozdělení není triviální. S využitím momentové vytvořující funkce je ale poměrně jednoduchý.

Nechť $Z \sim N(0, 1)$. Pak

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2 - 2tz + t^2 - t^2}{2}\right) dz = \\ &= \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z-t)^2}{2}\right) dz = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Poslední integrál je roven 1 díky tomu, že na místě integrované funkce je funkce s vlastnostmi hustoty.

Střední hodnota a rozptyl normálního rozdělení

S využitím předchozího výpočtu $M_Z(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$ snadno spočítáme, že

$$M'_Z(t) = t \exp\left(\frac{t^2}{2}\right),$$

$$M''_Z(t) = t^2 \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) + \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Dosazením $t = 0$ pak dostaneme

$$E(Z) = 0, D(Z) = 1.$$

Střední hodnota a rozptyl normálního rozdělení

S využitím předchozího výpočtu $M_Z(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$ snadno spočítáme, že

$$M'_Z(t) = t \exp\left(\frac{t^2}{2}\right),$$

$$M''_Z(t) = t^2 \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) + \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Dosazením $t = 0$ pak dostaneme

$$E(Z) = 0, D(Z) = 1.$$

Pro transformovanou náhodnou veličinu $Y = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ pak snadno odvodíme z vlastností střední hodnoty, resp. rozptylu, že $E(Y) = \mu, D(Y) = \sigma^2$ (což zpětně zdůvodňuje zápis $N(\mu, \sigma^2)$).

Momentová vytvořující funkce má tvar $M_Y(t) = \exp\left(\mu t + \sigma^2 \frac{t^2}{2}\right)$.

Příklad

Určete rozdělení součtu nezávislých náhodných veličin

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2), Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2).$$

Příklad

Určete rozdělení součtu nezávislých náhodných veličin
 $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

Řešení

Z vlastností momentové vytvořující funkce dostáváme

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= \exp(\mu_X t + \sigma_X^2 \frac{t^2}{2}) \exp(\mu_Y t + \sigma_Y^2 \frac{t^2}{2}) = \\ &= \exp((\mu_X + \mu_Y)t + (\sigma_X^2 + \sigma_Y^2) \frac{t^2}{2}). \end{aligned}$$

Proto $X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$.