Matematika IV – 12. přednáška
Náhodný výběr z normálního rozdělení a intervalové odhady

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

18. 5. 2011

Obsah přednášky

1. Náhodný výběr z normálního rozdělení
2. Bodové a intervalové odhady
3. Testování hypotéz

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, *e*-text.
- Karel Zvára, Josef Štěpán, **Pravděpodobnost a matematická statistika**, Matfyzpress, 4. vydání, 2006, 230 stran, ISBN 80-867-3271-1.
- Marie Budíková, **Statistika**, Masarykova univerzita, 2004, distanční studijní opora ESF, `http://www.math.muni.cz/~budikova/esf/Statistika.zip`.
- Marie Budíková, Štěpán Mikoláš, Pavel Osecký, **Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika (sbírka příkladů)**, Masarykova univerzita, 3. vydání, 2004, 117 stran, ISBN 80-210-3313-4.

Plán přednášky

1. Náhodný výběr z normálního rozdělení
2. Bodové a intervalové odhady
3. Testování hypotéz

Náhodný výběr – připomenutí

Definice

Náhodným výběrem rozsahu n rozumíme n-tici **nezávislých** a **stejně rozdělených** náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n \sim F_X(x)$ (někdy také hovoříme o n nezávislých kopiích náhodné veličiny X).

Náhodný výběr – připomenutí

Definice

Náhodným výběrem rozsahu n rozumíme n-tici **nezávislých** a **stejně rozdělených** náhodných veličin $X_1, \dots, X_n \sim F_X(x)$ (někdy také hovoříme o n nezávislých kopiích náhodné veličiny X).

Náhodným výběrem rozsahu n **z** p**-rozměrného rozdělení** rozumíme n-tici **nezávislých** a **stejně rozdělených** p-rozměrných náhodných vektorů.

Náhodný výběr – připomenutí

Definice

Náhodným výběrem rozsahu n rozumíme n-tici **nezávislých** a **stejně rozdělených** náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n \sim F_X(x)$ (někdy také hovoříme o n nezávislých kopiích náhodné veličiny X).

Náhodným výběrem rozsahu n **z** p**-rozměrného rozdělení** rozumíme n-tici **nezávislých** a **stejně rozdělených** p-rozměrných náhodných vektorů.

V matematické statistice často pracujeme s transformacemi náhodného výběru, takovým náhodným veličinám (příp. vektorům) říkáme **statistiky**. V následujícím zavedeme několik důležitých statistik a ukážeme jejich souvislost s číselnými charakteristikami náhodných veličin.

Základní statistiky

Definice

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr. Statistiku

$$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

nazýváme **výběrový průměr**, statistiku

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2$$

výběrový rozptyl a statistiku $S = \sqrt{S^2}$ **výběrová směrodatná odchylka**. Analogicky se definují i výběrová kovariance, příp. výběrový korelační koeficient pro dvourozměrný náhodný výběr.

Vlastnosti statistik

Protože jsou uvedené statistiky náhodnými veličinami, lze se přirozeně ptát po jejich číselných charakteristikách.

Věta

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr rozsahu n z rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 . Pak platí:

- $E(M) = \mu$,

Vlastnosti statistik

Protože jsou uvedené statistiky náhodnými veličinami, lze se přirozeně ptát po jejich číselných charakteristikách.

Věta

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr rozsahu n z rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 . Pak platí:

- $E(M) = \mu$,
- $D(M) = \mathrm{var}(M) = \sigma^2/n$,

Vlastnosti statistik

Protože jsou uvedené statistiky náhodnými veličinami, lze se přirozeně ptát po jejich číselných charakteristikách.

Věta

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr rozsahu n z rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 . Pak platí:

- $E(M) = \mu$,
- $D(M) = \mathrm{var}(M) = \sigma^2/n$,
- $E(S^2) = \sigma^2$.

Důkaz.

Ukážeme jen (nejsložitější) 3. tvrzení.
Snadno se odvodí, že platí

$$\sum (X_i - \mu)^2 = \sum (X_i - M)^2 + n(M - \mu)^2.$$

Důkaz.

Ukážeme jen (nejsložitější) 3. tvrzení.
Snadno se odvodí, že platí

$$\sum (X_i - \mu)^2 = \sum (X_i - M)^2 + n(M - \mu)^2.$$

Proto je

$$\begin{aligned} E(S^2) &= \frac{1}{n-1} E\left(\sum (X_i - \mu)^2\right) - \frac{n}{n-1} E(M - \mu)^2 = \\ &= \frac{1}{n-1} \sum D(X_i) - \frac{n}{n-1} D(M) = \\ &= \frac{n}{n-1}\sigma^2 - \frac{1}{n-1}\sigma^2 = \sigma^2. \end{aligned}$$

$\square$

V předchozí větě jsme ukázali, že výběrový průměr M splňuje $E(M) = \mu$, jeho střední hodnota je tedy rovna odhadovanému parametru μ. V takovém případě říkáme, že statistika M je **nestranným odhadem** parametru μ.

V předchozí větě jsme ukázali, že výběrový průměr M splňuje $E(M) = \mu$, jeho střední hodnota je tedy rovna odhadovanému parametru μ. V takovém případě říkáme, že statistika M je **nestranným odhadem** parametru μ.
Podobně jsme viděli, že S^2 je nestranným odhadem parametru σ^2.

V předchozí větě jsme ukázali, že výběrový průměr M splňuje $E(M) = \mu$, jeho střední hodnota je tedy rovna odhadovanému parametru μ. V takovém případě říkáme, že statistika M je **nestranným odhadem** parametru μ.
Podobně jsme viděli, že S^2 je nestranným odhadem parametru σ^2.
Všimněme si rovněž, že „přirozeněji“ definovaná statistika $\frac{1}{n}\sum(X_i - M)^2$ není nestranným odhadem σ^2, její střední hodnota je totiž $\frac{n-1}{n}\sigma^2$.

V předchozí větě jsme ukázali, že výběrový průměr M splňuje $E(M) = \mu$, jeho střední hodnota je tedy rovna odhadovanému parametru μ. V takovém případě říkáme, že statistika M je **nestranným odhadem** parametru μ.

Podobně jsme viděli, že S^2 je nestranným odhadem parametru σ^2.

Všimněme si rovněž, že „přirozeněji" definovaná statistika $\frac{1}{n}\sum(X_i - M)^2$ není nestranným odhadem σ^2, její střední hodnota je totiž $\frac{n-1}{n}\sigma^2$.

Rozmyslete si, je-li S nestranným odhadem směrodatné odchylky σ.

Náhodný výběr z normálního rozdělení

Uvažme nyní speciální případ, kdy je $X_1, \dots, X_n$ náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

Věta

- *M a S^2 jsou nezávislé náhodné veličiny.*

Náhodný výběr z normálního rozdělení

Uvažme nyní speciální případ, kdy je $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

Věta

- *M a S^2 jsou nezávislé náhodné veličiny.*
- *$M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, a tedy $U = (M - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0, 1)$.*

Náhodný výběr z normálního rozdělení

Uvažme nyní speciální případ, kdy je $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

Věta

- *M a S^2 jsou nezávislé náhodné veličiny.*
- $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, *a tedy* $U = (M - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0, 1)$.
- $K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$.

Náhodný výběr z normálního rozdělení

Uvažme nyní speciální případ, kdy je $X_1, \dots, X_n$ náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

Věta

- *M a S^2 jsou nezávislé náhodné veličiny.*
- $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, *a tedy* $U = (M - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0, 1)$.
- $K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$.
- $\sum(X_i - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$.

Náhodný výběr z normálního rozdělení

Uvažme nyní speciální případ, kdy je $X_1, \dots, X_n$ náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

Věta

- *M a S^2 jsou nezávislé náhodné veličiny.*
- $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, *a tedy* $U = (M - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0, 1)$.
- $K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$.
- $\sum (X_i - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$.
- $T = (M - \mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$.

Náhodný výběr z normálního rozdělení

Uvažme nyní speciální případ, kdy je $X_1, \dots, X_n$ náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

Věta

- *M a S^2 jsou nezávislé náhodné veličiny.*
- *$M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, a tedy $U = (M - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0, 1)$.*
- *$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$.*
- *$\sum (X_i - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$.*
- *$T = (M - \mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$.*

Náhodný výběr z normálního rozdělení

Uvažme nyní speciální případ, kdy je $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

Věta

- *M a S^2 jsou nezávislé náhodné veličiny.*
- *$M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, a tedy $U = (M - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0, 1)$.*
- *$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$.*
- *$\sum (X_i - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$.*
- *$T = (M - \mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$.*

Poznámka

K odhadu μ, známe-li σ^2, slouží U, v opačném případě T.

Náhodný výběr z normálního rozdělení

Uvažme nyní speciální případ, kdy je $X_1, \dots, X_n$ náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

Věta

- *M a S^2 jsou nezávislé náhodné veličiny.*
- *$M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, a tedy $U = (M - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0, 1)$.*
- *$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$.*
- *$\sum(X_i - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$.*
- *$T = (M - \mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$.*

Poznámka

K odhadu μ, známe-li σ^2, slouží U, v opačném případě T.
K odhadu σ^2, neznáme-li μ, slouží K, v opačném případě následující (bezejmenná?) statistika, která je vlastně statistikou K, v níž místo odhadu M použijeme přímo μ.

Příklad

V roce 1951 bylo rozsáhlým statistickým průzkumem zjištěno, že střední hodnota výšky desetiletých chlapců je $136,1$ cm se směrodatnou odchylkou $\sigma = 6,4$ cm.

Příklad

V roce 1951 bylo rozsáhlým statistickým průzkumem zjištěno, že střední hodnota výšky desetiletých chlapců je $136,1$ cm se směrodatnou odchylkou $\sigma = 6,4$ cm.
V roce 1961 byla zjištěna výška pouze u 15 náhodně vybraných chlapců:

130	140	136	141	139	133	149	151
139	136	138	142	127	139	147	

Otázkou je, zda se v porovnání s rokem 1951 změnila střední výška chlapců, pokud předpokládáme, že variabilita výšek se v různých generacích příliš nemění.

Řešení

Vzhledem k tomu, že základní soubor všech desetiletých chlapců je rozsáhlý, lze zmíněná data považovat za náhodný výběr. Zjistíme, že $M = 139{,}133$, $n = 15$ a s využitím statistiky U dostáváme, že s 95% pravděpodobností leží hodnota μ v intervalu

$$(M - 1,96\sigma/\sqrt{n}; M + 1,96\sigma/\sqrt{n}) = (135{,}9; 142{,}4).$$

Protože i střední hodnota výšek z roku 1951 leží v tomto intervalu, nemáme vážný důvod tvrdit, že se střední výška změnila.

Řešení

Vzhledem k tomu, že základní soubor všech desetiletých chlapců je rozsáhlý, lze zmíněná data považovat za náhodný výběr. Zjistíme, že $M = 139{,}133$, $n = 15$ a s využitím statistiky U dostáváme, že s 95% pravděpodobností leží hodnota μ v intervalu

$$(M - 1,96\sigma/\sqrt{n}; M + 1,96\sigma/\sqrt{n}) = (135{,}9; 142{,}4).$$

Protože i střední hodnota výšek z roku 1951 leží v tomto intervalu, nemáme vážný důvod tvrdit, že se střední výška změnila. Pokud bychom ovšem připustili vyšší možnost omylu a stanovili interval se spolehlivostí pouze 90%, pak bychom na této hladině hypotézu, že střední výška se změnila, přijali – interval je nyní (136,41;141,85).

Řešení

Vzhledem k tomu, že základní soubor všech desetiletých chlapců je rozsáhlý, lze zmíněná data považovat za náhodný výběr. Zjistíme, že $M = 139{,}133$, $n = 15$ a s využitím statistiky U dostáváme, že s 95% pravděpodobností leží hodnota μ v intervalu

$$(M - 1,96\sigma/\sqrt{n}; M + 1,96\sigma/\sqrt{n}) = (135{,}9; 142{,}4).$$

Protože i střední hodnota výšek z roku 1951 leží v tomto intervalu, nemáme vážný důvod tvrdit, že se střední výška změnila. Pokud bychom ovšem připustili vyšší možnost omylu a stanovili interval se spolehlivostí pouze 90%, pak bychom na této hladině hypotézu, že střední výška se změnila, přijali – interval je nyní (136,41;141,85). Podobně, pokud nás zajímá pouze **dolní odhad** střední hodnoty výšek chlapců (a vůbec tedy nepřipouštíme možnost, že by se střední výška snížila), pak s 95% pravděpodobností je střední výška větší než 136,41, a tedy nyní opět přijímáme hypotézu, že se střední výška zvýšila.

Dva nezávislé výběry z normálního rozdělení

Věta

Nechť je $X_{11}, \ldots, X_{m1}$ náhodný výběr rozsahu m z rozdělení $N(\mu, \sigma_1^2)$ a $X_{12}, \ldots, X_{n2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr rozsahu n z rozdělení $N(\mu, \sigma_2^2)$, přičemž $m, n \geq 2$. Označme M_1, M_2 jejich výběrové průměry a S_1^2, S_2^2 výběrové rozptyly. Dále nechť je

$$S_*^2 = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2}$$

vážený průměr výběrových rozptylů. *Pak platí:*

Dva nezávislé výběry z normálního rozdělení

Věta

Nechť je $X_{11}, \ldots, X_{m1}$ náhodný výběr rozsahu m z rozdělení $N(\mu, \sigma_1^2)$ a $X_{12}, \ldots, X_{n2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr rozsahu n z rozdělení $N(\mu, \sigma_2^2)$, přičemž $m, n \geq 2$. Označme M_1, M_2 jejich výběrové průměry a S_1^2, S_2^2 výběrové rozptyly. Dále nechť je

$$S_*^2 = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2}$$

vážený průměr výběrových rozptylů. *Pak platí:*

- *$M_1 - M_2$ a S_*^2 jsou stochasticky nezávislé,*

Dva nezávislé výběry z normálního rozdělení

Věta

Nechť je $X_{11}, \dots, X_{m1}$ náhodný výběr rozsahu m z rozdělení $N(\mu, \sigma_1^2)$ a $X_{12}, \dots, X_{n2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr rozsahu n z rozdělení $N(\mu, \sigma_2^2)$, přičemž $m, n \geq 2$. Označme M_1, M_2 jejich výběrové průměry a S_1^2, S_2^2 výběrové rozptyly. Dále nechť je

$$S_*^2 = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2}$$

vážený průměr výběrových rozptylů. *Pak platí:*

- *$M_1 - M_2$ a S_*^2 jsou stochasticky nezávislé,*
- $M_1 - M_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$,

Dva nezávislé výběry z normálního rozdělení

Věta

Nechť je $X_{11}, \dots, X_{m1}$ náhodný výběr rozsahu m z rozdělení $N(\mu, \sigma_1^2)$ a $X_{12}, \dots, X_{n2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr rozsahu n z rozdělení $N(\mu, \sigma_2^2)$, přičemž $m, n \geq 2$. Označme M_1, M_2 jejich výběrové průměry a S_1^2, S_2^2 výběrové rozptyly. Dále nechť je

$$S_*^2 = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2}$$

vážený průměr výběrových rozptylů. *Pak platí:*

- *$M_1 - M_2$ a S_*^2 jsou stochasticky nezávislé,*
- *$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$,*
- *je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak*
  $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$,

Dva nezávislé výběry z normálního rozdělení

Věta

Nechť je $X_{11}, \ldots, X_{m1}$ náhodný výběr rozsahu m z rozdělení $N(\mu, \sigma_1^2)$ a $X_{12}, \ldots, X_{n2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr rozsahu n z rozdělení $N(\mu, \sigma_2^2)$, přičemž $m, n \geq 2$. Označme M_1, M_2 jejich výběrové průměry a S_1^2, S_2^2 výběrové rozptyly. Dále nechť je

$$S_*^2 = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2}$$

vážený průměr výběrových rozptylů. *Pak platí:*

- $M_1 - M_2$ *a* S_*^2 *jsou stochasticky nezávislé,*
- $M_1 - M_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$,
- *je-li* $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, *pak*
  $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$,
- $F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

Užití statistik dvou nezávislých výběrů

- Statistika U, vzniklá normováním $M_1 - M_2$, se používá pro odhad rozdílu $\mu_1 - \mu_2$, známe-li rozptyly σ_1^2, σ_2^2.

Užití statistik dvou nezávislých výběrů

- Statistika U, vzniklá normováním $M_1 - M_2$, se používá pro odhad rozdílu $\mu_1 - \mu_2$, známe-li rozptyly σ_1^2, σ_2^2.
- Je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak statistika T (vzniklá z U nahrazením teoretického společného rozptylu σ^2 váženým průměrem výběrových rozptylů S_*^2) slouží pro odhad rozdílu $\mu_1 - \mu_2$, neznáme-li rozptyl σ^2.

Užití statistik dvou nezávislých výběrů

- Statistika U, vzniklá normováním $M_1 - M_2$, se používá pro odhad rozdílu $\mu_1 - \mu_2$, známe-li rozptyly σ_1^2, σ_2^2.
- Je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak statistika T (vzniklá z U nahrazením teoretického společného rozptylu σ^2 váženým průměrem výběrových rozptylů S_*^2) slouží pro odhad rozdílu $\mu_1 - \mu_2$, neznáme-li rozptyl σ^2.
- Statistika $K = (m + n - 2)S_*^2/\sigma^2$ slouží k odhadu společného rozptylu σ^2.

Užití statistik dvou nezávislých výběrů

- Statistika U, vzniklá normováním $M_1 - M_2$, se používá pro odhad rozdílu $\mu_1 - \mu_2$, známe-li rozptyly σ_1^2, σ_2^2.
- Je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak statistika T (vzniklá z U nahrazením teoretického společného rozptylu σ^2 váženým průměrem výběrových rozptylů S_*^2) slouží pro odhad rozdílu $\mu_1 - \mu_2$, neznáme-li rozptyl σ^2.
- Statistika $K = (m + n - 2)S_*^2/\sigma^2$ slouží k odhadu společného rozptylu σ^2.
- Statistika $F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}$ slouží k odhadu podílu rozptylů σ_1^2/σ_2^2.

Příklad

Mějme dva nezávislé náhodné výběry; první rozsahu 10 z rozdělení $N(2; 1{,}5)$ a druhý rozsahu 5 z rozdělení $N(3, 4)$. Určete pravděpodobnost, že výběrový průměr prvního výběru bude menší než výběrový průměr druhého výběru.

Příklad

Mějme dva nezávislé náhodné výběry; první rozsahu 10 z rozdělení $N(2; 1{,}5)$ a druhý rozsahu 5 z rozdělení $N(3, 4)$. Určete pravděpodobnost, že výběrový průměr prvního výběru bude menší než výběrový průměr druhého výběru.

Řešení

$$P(M_1 < M_2) = P(M_1 - M_2 < 0) =$$

$$= P\left(\frac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} < \frac{0 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}}\right) =$$

$$P\left(U < \frac{-2+3}{\sqrt{\frac{1{,}5}{10} + \frac{4}{5}}}\right) = P(U < 1{,}05) =$$

$$= \Phi(1{,}05) = 0{,}853.$$

Plán přednášky

1. Náhodný výběr z normálního rozdělení
2. Bodové a intervalové odhady
3. Testování hypotéz

Bodové a intervalové odhady

Náhodný výběr je *n*-tice nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením, které záleží na jednom nebo více parametrech. Obvykle přitom hodnotu těchto parametrů neznáme, ale můžeme tuto hodnotu nebo hodnotu nějaké jeho funkce (tzv. parametrické funkce) z náhodného výběru odhadnout.

Definice

Mějme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$, které závisí na (obecně vektorovém) parametru θ. **Bodovým odhadem parametru θ** rozumíme statistiku $T(X_1, \dots, X_n)$, která je v nějakém smyslu blízko parametru θ. Rozdíl (příp. vektorový) $E(T) - \theta$ nazveme **vychýlení**, je-li $E(T) = \theta$, pak odhad T nazveme **nestranným**.

Definice

Mějme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$, které závisí na (obecně vektorovém) parametru θ. **Bodovým odhadem parametru** θ rozumíme statistiku $T(X_1, \ldots, X_n)$, která je v nějakém smyslu blízko parametru θ. Rozdíl (příp. vektorový) $E(T) - \theta$ nazveme **vychýlení**, je-li $E(T) = \theta$, pak odhad T nazveme **nestranným**. **Intervalovým odhadem parametru** θ rozumíme (obecně vícerozměrný) interval (T_L, T_U), kde $T_L(X_1, \ldots, X_n)$ a $T_U(X_1, \ldots, X_n)$ jsou statistiky výběru $(X_1, \ldots, X_n)$. Platí-li

$$P(T_L \leq \theta \leq T_U) = 1 - \alpha,$$

říkáme, že (T_L, T_U) je interval spolehlivosti $1 - \alpha$ pro parametr θ .

Definice

Jsou-li T_1, T_2 nestranné odhady parametru θ, říkáme, že odhad T_1 je **lepší** než odhad T_2, pokud $D(T_1) < D(T_2)$, příp.
$\operatorname{var} T_1 < \operatorname{var} T_2$ (tj. matice $\operatorname{var} T_2 - \operatorname{var} T_1$ je pozitivně definitivní).

Definice

Jsou-li T_1, T_2 nestranné odhady parametru θ, říkáme, že odhad T_1 je **lepší** než odhad T_2, pokud $D(T_1) < D(T_2)$, příp. $\operatorname{var} T_1 < \operatorname{var} T_2$ (tj. matice $\operatorname{var} T_2 - \operatorname{var} T_1$ je pozitivně definitivní).
O posloupnosti T_n odhadů θ říkáme, že je **asymptoticky nestranná**, pokud $\lim_{n\to\infty} E(T_n) = \theta$.

Definice

Jsou-li T_1, T_2 nestranné odhady parametru θ, říkáme, že odhad T_1 je **lepší** než odhad T_2, pokud $D(T_1) < D(T_2)$, příp. $\operatorname{var} T_1 < \operatorname{var} T_2$ (tj. matice $\operatorname{var} T_2 - \operatorname{var} T_1$ je pozitivně definitivní).

O posloupnosti T_n odhadů θ říkáme, že je **asymptoticky nestranná**, pokud $\lim_{n\to\infty} E(T_n) = \theta$.

O posloupnosti T_n odhadů θ říkáme, že je **konzistentní**, pokud $\lim_{n\to\infty} P(|T_n - \theta| < \epsilon) = 1$.

Věta

Je-li posloupnost T_n odhadů parametru θ asymptoticky nestranná a platí-li $\lim_{n\to\infty} D(T_n) = 0$, pak T_n je konzistentním odhadem θ.

Věta

Je-li posloupnost T_n odhadů parametru θ asymptoticky nestranná a platí-li $\lim_{n\to\infty} D(T_n) = 0$, pak T_n je konzistentním odhadem θ.

Důkaz.

Buď $\epsilon > 0$ libovolné. Z Čebyševovy nerovnosti máme
$P(|T_n - E(T_n)| < \epsilon/2) \geq 1 - D(T_n)/(\epsilon/2)^2$.

Věta

Je-li posloupnost T_n odhadů parametru θ asymptoticky nestranná a platí-li $\lim_{n\to\infty} D(T_n) = 0$, pak T_n je konzistentním odhadem θ.

Důkaz.

Buď $\epsilon > 0$ libovolné. Z Čebyševovy nerovnosti máme $P(|T_n - E(T_n)| < \epsilon/2) \geq 1 - D(T_n)/(\epsilon/2)^2$. Zároveň pro dostatečně velké n máme $|E(T_n) - \theta| < \epsilon/2$. Proto

$$P(|T_n - \theta| < \epsilon) \geq P(|T_n - E(T_n)| < \epsilon/2, |E(T_n) - \theta| < \epsilon/2) =$$
$$= P(|T_n - E(T_n)| < \epsilon/2),$$

která konverguje k 1, což znamená, že T_n konverguje podle pravděpodobnosti k θ . $\square$

Příklad

Uvažujme opakovaná nezávislá měření určité konstanty μ, popsaná náhodným výběrem $X_1, \dots, X_n$ z rozdělení se střední hodnotou $E(X_i) = \mu$ a rozptylem $D(X_i) = \sigma^2$. Dokažte, že statistiky $M = \frac{1}{n} \sum X_i$ a $L = \frac{1}{2}(X_1 + X_n)$ jsou nestrannými odhady μ a rozhodněte, který z odhadů je lepší.

Příklad

Uvažujme opakovaná nezávislá měření určité konstanty μ, popsaná náhodným výběrem $X_1, \dots, X_n$ z rozdělení se střední hodnotou $E(X_i) = \mu$ a rozptylem $D(X_i) = \sigma^2$. Dokažte, že statistiky $M = \frac{1}{n}\sum X_i$ a $L = \frac{1}{2}(X_1 + X_n)$ jsou nestrannými odhady μ a rozhodněte, který z odhadů je lepší.

Řešení

$$E(M) = \frac{1}{n}\sum E(X_i) = \frac{1}{n}n\mu = \mu$$

$$E(L) = \frac{X_1 + X_n}{2} = \frac{1}{2}E(X_1 + X_n) = \frac{1}{2}(\mu + \mu) = \mu$$

$$D(M) = \frac{1}{n^2}\sum D(X_i) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$D(L) = D(1/2(X_1 + X_n)) = 1/4D(X_1 + X_n) =$$

$$= \frac{1}{4}(D(X_1) + D(X_n)) = \frac{\sigma^2}{2}.$$

Poznámka

Odpověď na dřívější otázku je, že výběrová směrodatná odchylka S **není** nestranným odhadem směrodatné odchylky σ. Kdyby totiž $E(S) = \sigma$, pak by $D(S) = E(S^2) - E(S)^2 = \sigma^2 - \sigma^2 = 0$, což by znamenalo, že S je konstanta, a to je spor, protože rozptyl S je nenulový.

Poznámka

Odpověď na dřívější otázku je, že výběrová směrodatná odchylka S **není** nestranným odhadem směrodatné odchylky σ. Kdyby totiž $E(S) = \sigma$, pak by $D(S) = E(S^2) - E(S)^2 = \sigma^2 - \sigma^2 = 0$, což by znamenalo, že S je konstanta, a to je spor, protože rozptyl S je nenulový.

Poznámka

Jak jsme viděli dříve, není statistika $s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2$ náhodného výběru z normálního rozdělení nestranným odhadem rozptylu σ^2 – je totiž $E(s_n^2) = E(\frac{n-1}{n}S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$. Zřejmě je ale $\lim_{n\to\infty} E(s_n^2) = \sigma^2$

Poznámka

Odpověď na dřívější otázku je, že výběrová směrodatná odchylka S **není** nestranným odhadem směrodatné odchylky σ. Kdyby totiž $E(S) = \sigma$, pak by $D(S) = E(S^2) - E(S)^2 = \sigma^2 - \sigma^2 = 0$, což by znamenalo, že S je konstanta, a to je spor, protože rozptyl S je nenulový.

Poznámka

Jak jsme viděli dříve, není statistika $s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2$ náhodného výběru z normálního rozdělení nestranným odhadem rozptylu σ^2 – je totiž $E(s_n^2) = E(\frac{n-1}{n}S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$. Zřejmě je ale $\lim_{n\to\infty} E(s_n^2) = \sigma^2$ a protože

$$D(S^2) = \frac{2\sigma^2}{n-1},$$

je i $\lim_{n\to\infty} D(s_n^2) = \lim_{n\to\infty} D((n-1)S^2/n) = 0$, a je tedy posloupnost s_n^2 konzistentním odhadem rozptylu σ^2.

Intervaly spolehlivosti (*confidence intervals*)

Připomeňme, že pro náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ závislý na parametru θ jsme definovali intervalový odhad parametru θ pomocí statistik T_L, T_U výběru tak, že $P(T_L \leq \theta \leq T_U) = 1 - \alpha$. Jde o tzv. **oboustranný interval spolehlivosti pro** θ .

Intervaly spolehlivosti (*confidence intervals*)

Připomeňme, že pro náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ závislý na parametru θ jsme definovali intervalový odhad parametru θ pomocí statistik T_L, T_U výběru tak, že $P(T_L \leq \theta \leq T_U) = 1 - \alpha$. Jde o tzv. **oboustranný interval spolehlivosti pro** θ . Podobně definujeme **levostranný interval spolehlivosti** (T_L, ∞) pomocí $P(T_L < \theta) = 1 - \alpha$, analogicky **pravostranný interval spolehlivosti**.

Intervaly spolehlivosti (*confidence intervals*)

Připomeňme, že pro náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ závislý na parametru θ jsme definovali intervalový odhad parametru θ pomocí statistik T_L, T_U výběru tak, že $P(T_L \leq \theta \leq T_U) = 1 - \alpha$. Jde o tzv. **oboustranný interval spolehlivosti pro** θ . Podobně definujeme **levostranný interval spolehlivosti** (T_L, ∞) pomocí $P(T_L < \theta) = 1 - \alpha$, analogicky **pravostranný interval spolehlivosti**. Číslo α se nazývá riziko (často se používá $\alpha = 0{,}05$), číslo $1 - \alpha$ spolehlivost.

Algoritmus konstrukce intervalu spolehlivosti

1. Zvolíme statistiku V, která je nestranným bodovým odhadem parametru θ.

Algoritmus konstrukce intervalu spolehlivosti

1. Zvolíme statistiku V, která je nestranným bodovým odhadem parametru θ.
2. Najdeme tzv. *pivotovou statistiku* W, která je transformací V se známým rozdělením, nezávisící na neznámé hodnotě θ (např. M, K, T, F).

Algoritmus konstrukce intervalu spolehlivosti

1. Zvolíme statistiku V, která je nestranným bodovým odhadem parametru θ.
2. Najdeme tzv. *pivotovou statistiku* W, která je transformací V se známým rozdělením, nezávisící na neznámé hodnotě θ (např. M, K, T, F).
3. Najdeme příslušné kvantily rozdělení statistiky W tak, že

$$P(w_{\alpha/2} \leq W \leq w_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

Algoritmus konstrukce intervalu spolehlivosti

1. Zvolíme statistiku V, která je nestranným bodovým odhadem parametru θ.
2. Najdeme tzv. *pivotovou statistiku* W, která je transformací V se známým rozdělením, nezávisící na neznámé hodnotě θ (např. M, K, T, F).
3. Najdeme příslušné kvantily rozdělení statistiky W tak, že
$$P(w_{\alpha/2} \leq W \leq w_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$
4. Nerovnost $w_{\alpha/2} \leq W \leq w_{1-\alpha/2}$ převedeme ekvivalentními úpravami na nerovnost $T_L \leq \theta \leq T_U$.

Algoritmus konstrukce intervalu spolehlivosti

1. Zvolíme statistiku V, která je nestranným bodovým odhadem parametru θ.
2. Najdeme tzv. *pivotovou statistiku* W, která je transformací V se známým rozdělením, nezávisící na neznámé hodnotě θ (např. M, K, T, F).
3. Najdeme příslušné kvantily rozdělení statistiky W tak, že
$$P(w_{\alpha/2} \leq W \leq w_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$
4. Nerovnost $w_{\alpha/2} \leq W \leq w_{1-\alpha/2}$ převedeme ekvivalentními úpravami na nerovnost $T_L \leq \theta \leq T_U$.
5. Z daného výběru zjistíme konkrétní číselné realizace statistik T_L, T_U a dostaneme tak intervalový odhad požadované spolehlivosti $1 - \alpha$.

Intervaly spolehlivosti pro parametry normálního rozdělení

μ (známe σ^2)	$\left(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}\right)$
μ (neznáme σ^2)	$\left(M - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}, M + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}\right)$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$

Příklad

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu; 0,1)$. Jaký musí být minimální rozsah výběru, aby velikost 95% intervalu spolehlivosti pro μ nepřesáhla číslo 0,03?

Příklad

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu; 0,1)$. Jaký musí být minimální rozsah výběru, aby velikost 95% intervalu spolehlivosti pro μ nepřesáhla číslo 0,03?

Řešení

Podle předchozí tabulky dostáváme (pro $\alpha = 0,05$)

$$0,03 \geq M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} - (M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}) =$$
$$= 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}.$$

Příklad

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu; 0,1)$. Jaký musí být minimální rozsah výběru, aby velikost 95% intervalu spolehlivosti pro μ nepřesáhla číslo 0,03?

Řešení

Podle předchozí tabulky dostáváme (pro $\alpha = 0,05$)

$$0,03 \geq M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} - (M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}) =$$
$$= 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}.$$

Proto

$$n \geq \frac{4\sigma^2 u_{1-\alpha/2}^2}{0,03^2} = 170,7$$

a rozsah výběru tedy musí splňovat $n \geq 171$.

Intervaly spolehlivosti pro parametry 2 normálních rozdělení

$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_* \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} t_{1-\alpha/2}$
společný rozptyl σ^2	$\left(\frac{(m+n-2)S_*^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(m+n-2)}, \frac{(m+n-2)S_*^2}{\chi^2_{\alpha/2}(m+n-2)} \right)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)} \right)$

Intervaly spolehlivosti pro parametry 2 normálních rozdělení

$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}\, u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_* \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\, t_{1-\alpha/2}$
společný rozptyl σ^2	$\left(\frac{(m+n-2)S_*^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(m+n-2)}, \frac{(m+n-2)S_*^2}{\chi^2_{\alpha/2}(m+n-2)}\right)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Poznámka

Pokud a priori nevíme, jestli jsou rozptyly shodné, můžeme to ověřit tak, že nejprve sestrojíme interval spolehlivosti pro σ_1^2/σ_2^2. Obsahuje-li 1, lze považovat rozptyly za shodné a tento rozptyl odhadovat pomocí statistiky K, jak je uvedeno v tabulce.

Plán přednášky

1 Náhodný výběr z normálního rozdělení

2 Bodové a intervalové odhady

3 Testování hypotéz

Motivační úvod

Testování hypotéz umožňuje na základě náhodného výběru s danou pravděpodobností ověřovat domněnky o rozdělení, z něhož pochází daný náhodný výběr.

Motivační úvod

Testování hypotéz umožňuje na základě náhodného výběru s danou pravděpodobností ověřovat domněnky o rozdělení, z něhož pochází daný náhodný výběr. **Hypotézou** budeme rozumět nějaké tvrzení o parametrech tohoto rozdělení.

Motivační úvod

Testování hypotéz umožňuje na základě náhodného výběru s danou pravděpodobností ověřovat domněnky o rozdělení, z něhož pochází daný náhodný výběr. **Hypotézou** budeme rozumět nějaké tvrzení o parametrech tohoto rozdělení.

Definice

H_0 ... nulová hypotéza (např. $\theta = c$, kde c vyjadřuje naši domněnku o hodnotě parametru θ)
H_1 ... (oboustranná) alternativní hypotéza (obvykle negace nulové)
Testováním H_0 oproti alternativní hypotéze rozumíme postup založený na náhodném výběru, s jehož pomocí platnost H_0 *zamítneme* nebo *nezamítneme* (= připouštíme).

Motivační úvod

Testování hypotéz umožňuje na základě náhodného výběru s danou pravděpodobností ověřovat domněnky o rozdělení, z něhož pochází daný náhodný výběr. **Hypotézou** budeme rozumět nějaké tvrzení o parametrech tohoto rozdělení.

Definice

H_0 ... nulová hypotéza (např. $\theta = c$, kde c vyjadřuje naši domněnku o hodnotě parametru θ)
H_1 ... (oboustranná) alternativní hypotéza (obvykle negace nulové)
Testováním H_0 oproti alternativní hypotéze rozumíme postup založený na náhodném výběru, s jehož pomocí platnost H_0 *zamítneme* nebo *nezamítneme* (= připouštíme).
Chyba 1. druhu ... H_0 platí a my ji zamítneme (závažnější)
Chyba 2. druhu ... H_0 neplatí a my ji nezamítneme

Motivační úvod

Testování hypotéz umožňuje na základě náhodného výběru s danou pravděpodobností ověřovat domněnky o rozdělení, z něhož pochází daný náhodný výběr. **Hypotézou** budeme rozumět nějaké tvrzení o parametrech tohoto rozdělení.

Definice

H_0 . . . nulová hypotéza (např. $\theta = c$, kde c vyjadřuje naši domněnku o hodnotě parametru θ)
H_1 . . . (oboustranná) alternativní hypotéza (obvykle negace nulové)
Testováním H_0 oproti alternativní hypotéze rozumíme postup založený na náhodném výběru, s jehož pomocí platnost H_0 *zamítneme* nebo *nezamítneme* (= připouštíme).
Chyba 1. druhu . . . H_0 platí a my ji zamítneme (závažnější)
Chyba 2. druhu . . . H_0 neplatí a my ji nezamítneme
Pravděpodobnost chyby 1. druhu se nazývá *hladina významnosti* (α, obvykle $\alpha = 0{,}05$), pravděpodobnost chyby 2. druhu se značí β a číslo $1 - \beta$ se nazývá *síla testu*.

Způsoby testování nulové hypotézy

1. pomocí intervalu spolehlivosti

Způsoby testování nulové hypotézy

1. pomocí intervalu spolehlivosti
2. pomocí kritického oboru

Způsoby testování nulové hypotézy

1. pomocí intervalu spolehlivosti
2. pomocí kritického oboru
3. pomocí tzv. $p-$hodnoty (p-value)

Způsoby testování nulové hypotézy

1. pomocí intervalu spolehlivosti
2. pomocí kritického oboru
3. pomocí tzv. $p-$hodnoty (p-value)

Interval spolehlivosti Na základě realizace náhodného výběru sestrojíme $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro neznámý parametr θ a zjistíme, zda c patří do tohoto intervalu. Pokud ano, hypotézu H_0 nezamítáme (v opačném případě zamítáme) na hladině významnosti α.

Způsoby testování nulové hypotézy

1. pomocí intervalu spolehlivosti
2. pomocí kritického oboru
3. pomocí tzv. $p-$hodnoty (p-value)

Interval spolehlivosti Na základě realizace náhodného výběru sestrojíme $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro neznámý parametr θ a zjistíme, zda c patří do tohoto intervalu. Pokud ano, hypotézu H_0 nezamítáme (v opačném případě zamítáme) na hladině významnosti α.

Kritický obor Stanovení kritického oboru je postup do jisté míry obrácený. Nejprve (i bez náhodného výběru) zvolíme vhodnou statistiku T a množinu hodnot, jichž může T nabývat, rozdělíme na dvě disjunktní podmnožiny: obor nezamítnutí H_0 (značíme V) a **kritický obor** W (obor zamítnutí H_0). Pokud realizace T padne do W, pak H_0 zamítneme, jinak nezamítáme.

Stanovení kritického oboru na hladině α

Pro statistiku T (*testové kritérium*) stanovíme obor nezamítnutí V jako interval, jehož hraniční body tvoří kvantil $\alpha/2$ a $1-\alpha/2$, odtud je

$$W = (-\infty, F^{-1}(\alpha/2)) \cup (F^{-1}(1-\alpha/2), \infty).$$

Způsoby testování nulové hypotézy

p-hodnota Testování pomocí p-hodnoty je jednoduchý test, umožněný rozšířením statistických balíků. p-hodnota udává nejnižší možnou hladinu významnosti, při níž H_0 zamítáme. Je-li p-hodnota $> \alpha$, hypotézu H_0 nezamítáme, pro p-hodnotu menší než α, hypotézu zamítneme.

Způsoby testování nulové hypotézy

p-hodnota Testování pomocí *p*-hodnoty je jednoduchý test, umožněný rozšířením statistických balíků. *p*-hodnota udává nejnižší možnou hladinu významnosti, při níž H_0 zamítáme. Je-li *p*-hodnota $> \alpha$, hypotézu H_0 nezamítáme, pro *p*-hodnotu menší než α, hypotézu zamítneme.

Způsoby testování nulové hypotézy

p-hodnota Testování pomocí p-hodnoty je jednoduchý test, umožněný rozšířením statistických balíků. p-hodnota udává nejnižší možnou hladinu významnosti, při níž H_0 zamítáme. Je-li p-hodnota $> \alpha$, hypotézu H_0 nezamítáme, pro p-hodnotu menší než α, hypotézu zamítneme.

p-hodnota se stanoví rovněž se znalostí konkrétní realizace t_0 statistiky T náhodného výběru jako

$$p = 2\min\{P(T \leq t_0), P(T \geq t_0)\}.$$

Testování hypotézy proti jednostranné alternativě

Je-li H_0 hypotéza $\theta = c$, pak *levostranná alternativní hypotéza* je tvrzení $\theta < c$, *pravostranná alternativní hypotéza* je tvrzení $\theta > c$.

Testování hypotézy proti jednostranné alternativě

Je-li H_0 hypotéza $\theta = c$, pak *levostranná alternativní hypotéza* je tvrzení $\theta < c$, *pravostranná alternativní hypotéza* je tvrzení $\theta > c$. Volba typu alternativní hypotézy vyplývá z konkretní situace.

Příklad

- V předmětu Matematika 3 psali studenti písemku rozdělení na 2 skupiny. Hypotéza H_0 : *obě zadání mají stejnou průměrnou obtížnost* je testována oproti oboustranné alternativní hypotéze *zadání nejsou stejně obtížná*.

Testování hypotézy proti jednostranné alternativě

Je-li H_0 hypotéza $\theta = c$, pak *levostranná alternativní hypotéza* je tvrzení $\theta < c$, *pravostranná alternativní hypotéza* je tvrzení $\theta > c$. Volba typu alternativní hypotézy vyplývá z konkretní situace.

Příklad

- V předmětu Matematika 3 psali studenti písemku rozdělení na 2 skupiny. Hypotéza H_0 : *obě zadání mají stejnou průměrnou obtížnost* je testována oproti oboustranné alternativní hypotéze *zadání nejsou stejně obtížná*.
- V předmětu Matematika 3 se dříve po studentech nevyžadovalo řešení domácích úloh. Toto bylo nyní nově zavedeno s cílem dosažení lepších výsledků studentů u závěrečné zkoušky.

Testování hypotézy proti jednostranné alternativě

Je-li H_0 hypotéza $\theta = c$, pak *levostranná alternativní hypotéza* je tvrzení $\theta < c$, *pravostranná alternativní hypotéza* je tvrzení $\theta > c$. Volba typu alternativní hypotézy vyplývá z konkretní situace.

Příklad

- V předmětu Matematika 3 psali studenti písemku rozdělení na 2 skupiny. Hypotéza H_0 : *obě zadání mají stejnou průměrnou obtížnost* je testována oproti oboustranné alternativní hypotéze *zadání nejsou stejně obtížná*.
- V předmětu Matematika 3 se dříve po studentech nevyžadovalo řešení domácích úloh. Toto bylo nyní nově zavedeno s cílem dosažení lepších výsledků studentů u závěrečné zkoušky.

Testování hypotézy proti jednostranné alternativě

Je-li H_0 hypotéza $\theta = c$, pak *levostranná alternativní hypotéza* je tvrzení $\theta < c$, *pravostranná alternativní hypotéza* je tvrzení $\theta > c$. Volba typu alternativní hypotézy vyplývá z konkretní situace.

Příklad

- V předmětu Matematika 3 psali studenti písemku rozdělení na 2 skupiny. Hypotéza H_0 : *obě zadání mají stejnou průměrnou obtížnost* je testována oproti oboustranné alternativní hypotéze *zadání nejsou stejně obtížná*.
- V předmětu Matematika 3 se dříve po studentech nevyžadovalo řešení domácích úloh. Toto bylo nyní nově zavedeno s cílem dosažení lepších výsledků studentů u závěrečné zkoušky.
  V tomto případě zřejmě použijeme nulovou hypotézu H_0 : *výsledné bodové hodnocení se nezlepšilo* oproti pravostranné alternativní hypotéze H_1 : *bodový výsledek studentů se zlepšil*

Jednoduchý příklad

Příklad

Náš protivník hodil 60x kostkou a padla mu 16x šestka. Testujme na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ nulovou hypotézu H_0 : *kostka není upravená* oproti jednostranné alternativní hypotéze H_1 : *kostka je upravená tak, aby padalo více šestek*.

Jednoduchý příklad

Příklad

Náš protivník hodil 60x kostkou a padla mu 16x šestka. Testujme na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ nulovou hypotézu H_0 : *kostka není upravená* oproti jednostranné alternativní hypotéze H_1 : *kostka je upravená tak, aby padalo více šestek*.

Řešení

Statistika T (*počet šestek*) ma rozdělení $T \sim Bi(60, 1/6)$. Kritický obor je dán 95. percentilem tohoto rozdělení. Snadno vypočteme, že $P(T > 14) = 0{,}065$ a $P(T > 15) = 0{,}034$, proto $p-$hodnota rovna 0,034 (nebo jinými slovy: kritickým oborem na hladině 0,05 je interval $\langle 16, \infty)$. Hypotézu H_0 tedy zamítáme – na hladině 0,05 můžeme tvrdit, že kostka je upravená.

Jednoduchý příklad – pokr.

Řešení (pomocí aproximace)

Porovnejme předchozí řešení příkladu s řešením, při kterém využijeme aproximaci pomocí de Moive-Laplaceovy věty. Náhodnou veličinu

$$X = \frac{T - 10}{\sqrt{50/6}}$$

lze považovat za veličinu mající normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ s jednotkovým rozptylem $\sigma^2 = 1$, testovat budeme hypotézu $\mu = 0$.

Jednoduchý příklad – pokr.

Řešení (pomocí aproximace)

Porovnejme předchozí řešení příkladu s řešením, při kterém využijeme aproximaci pomocí de Moive-Laplaceovy věty. Náhodnou veličinu

$$X = \frac{T - 10}{\sqrt{50/6}}$$

lze považovat za veličinu mající normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ s jednotkovým rozptylem $\sigma^2 = 1$, testovat budeme hypotézu $\mu = 0$. **Kritickým oborem** $N(0, 1)$ je interval $(1{,}65, \infty)$ (stále uvažujeme *pravostranou alternativu*). Přitom pro realizaci statistiky X platí $x = (16 - 10)/\sqrt{50/6} \approx 2{,}08$ a hypotézu tedy opět zamítáme.

Jednoduchý příklad – pokr.

Řešení (pomocí aproximace)

Porovnejme předchozí řešení příkladu s řešením, při kterém využijeme aproximaci pomocí de Moive-Laplaceovy věty. Náhodnou veličinu

$$X = \frac{T - 10}{\sqrt{50/6}}$$

lze považovat za veličinu mající normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ s jednotkovým rozptylem $\sigma^2 = 1$, testovat budeme hypotézu $\mu = 0$. **Kritickým oborem** $N(0, 1)$ je interval $(1{,}65, \infty)$ (stále uvažujeme *pravostranou alternativu*). Přitom pro realizaci statistiky X platí $x = (16 - 10)/\sqrt{50/6} \approx 2{,}08$ a hypotézu tedy opět zamítáme. **Jednostranným intervalem spolehlivosti** pro X je $((2, 08 - 1, 65)/\sqrt{60}, \infty)$ a protože do něj nepatří hodnota 0 zamítáme nulovou hypotézu (všimněte si, že v obou případech *rozhodlo* porovnání $1{,}65 < 2{,}08$).

Jednoduchý příklad – pokr.

Řešení (pomocí aproximace a p-hodnoty)

Určeme nejmenší pravděpodobnost p, při níž stále ještě zamítáme nulovou hypotézu $\mu = 0$ oproti pravostranné hypotéze $\mu > 0$ (tj. p-hodnotu). Má-li X rozdělení $N(0,1)$, pak
$p = P(X \geq 2,08) = 1 - 0,981 = 0,019$.

Jednoduchý příklad – pokr.

Řešení (pomocí aproximace a p-hodnoty)

Určeme nejmenší pravděpodobnost p, při níž stále ještě zamítáme nulovou hypotézu $\mu = 0$ oproti pravostranné hypotéze $\mu > 0$ (tj. p-hodnotu). Má-li X rozdělení $N(0,1)$, pak
$p = P(X \geq 2,08) = 1 - 0,981 = 0,019$.
Protože je $\alpha = 0,05 > 0,019$, opět hypotézu zamítáme.

Základní testy hypotéz o parametrech normálního rozdělení

Podobně jako statistiky při konstrukci intervalů spolehlivosti jsou i základní testy standardizované (není divu – jak jsme viděli, jde o úzce propojené pojmy).

Základní testy hypotéz o parametrech normálního rozdělení

Podobně jako statistiky při konstrukci intervalů spolehlivosti jsou i základní testy standardizované (není divu – jak jsme viděli, jde o úzce propojené pojmy).

z-test Nechť je $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ se známým σ^2 a $n \geq 2$. Test $H_0 : \mu = c$ proti alternativní hypotéze $\mu \neq c$ se nazývá **z-test**.

Základní testy hypotéz o parametrech normálního rozdělení

Podobně jako statistiky při konstrukci intervalů spolehlivosti jsou i základní testy standardizované (není divu – jak jsme viděli, jde o úzce propojené pojmy).

z-test Nechť je $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ se známým σ^2 a $n \geq 2$. Test $H_0 : \mu = c$ proti alternativní hypotéze $\mu \neq c$ se nazývá **z-test**.

jednovýběrový t-test Nechť je $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ s neznámým σ^2 a $n \geq 2$. Test $H_0 : \mu = c$ proti alternativní hypotéze $\mu \neq c$ se nazývá **jednovýběrový t-test**.

Základní testy hypotéz o parametrech normálního rozdělení

Podobně jako statistiky při konstrukci intervalů spolehlivosti jsou i základní testy standardizované (není divu – jak jsme viděli, jde o úzce propojené pojmy).

z-test
: Nechť je $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ se známým σ^2 a $n \geq 2$. Test $H_0 : \mu = c$ proti alternativní hypotéze $\mu \neq c$ se nazývá **z-test**.

jednovýběrový t-test
: Nechť je $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ s neznámým σ^2 a $n \geq 2$. Test $H_0 : \mu = c$ proti alternativní hypotéze $\mu \neq c$ se nazývá **jednovýběrový t-test**.

dvouvýběrový t-test
: Nechť je $X_{11}, \ldots, X_{m1}$ náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_1, \sigma^2)$ a $X_{12}, \ldots, X_{n2}$ na něm nezávislý náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_2, \sigma^2)$ s $m, n \geq 2$ a neznámým σ^2. Test $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = c$ proti $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq c$ se nazývá **dvouvýběrový t-test**.

Základní testy hypotéz o parametrech normálním rozdělení

F-test Nechť je $X_{11}, \ldots, X_{m1}$ náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $X_{12}, \ldots, X_{n2}$ na něm nezávislý náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ s $m, n \geq 2$. Test $H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$ proti $H_1 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq 1$ se nazývá **F-test**.

Základní testy hypotéz o parametrech normálním rozdělení

F-test: Nechť je $X_{11}, \dots, X_{m1}$ náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $X_{12}, \dots, X_{n2}$ na něm nezávislý náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ s $m, n \geq 2$. Test $H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$ proti $H_1 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq 1$ se nazývá **F-test**.

test rozptylu: Nechť je $X_1, \dots, X_n$ náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$ s neznámým μ a $n \geq 2$. Test $H_0 : \sigma^2 = c$ proti $H_1 : \sigma^2 \neq c$ se nazývá **test o rozptylu**.

Kritický obor testů normálního rozdělení

z-test $|(M - c)/(\sigma/\sqrt{n})| \geq u_{1-\alpha/2}$

Kritický obor testů normálního rozdělení

z-test $|(M-c)/(\sigma/\sqrt{n})| \geq u_{1-\alpha/2}$

jednovýběrový t-test $|(M-c)/(S/\sqrt{n})| \geq t_{1-\alpha/2}(n-1)$

Kritický obor testů normálního rozdělení

z-test $|(M - c)/(\sigma/\sqrt{n})| \geq u_{1-\alpha/2}$

jednovýběrový t-test $|(M - c)/(S/\sqrt{n})| \geq t_{1-\alpha/2}(n-1)$

dvouvýběrový t-test

$$\left| \frac{M_1 - M_2 - c}{S_* \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \right| \geq t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$$

Kritický obor testů normálního rozdělení

z-test $|(M-c)/(\sigma/\sqrt{n})| \geq u_{1-\alpha/2}$

jednovýběrový t-test $|(M-c)/(S/\sqrt{n})| \geq t_{1-\alpha/2}(n-1)$

dvouvýběrový t-test

$$\left|\frac{M_1 - M_2 - c}{S_* \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}\right| \geq t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$$

F-test $S_1^2/S_2^2 \leq F_{\alpha/2}(m-1, n-1)$ nebo
$S_1^2/S_2^2 \geq F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)$

Kritický obor testů normálního rozdělení

z-test $|(M-c)/(\sigma/\sqrt{n})| \geq u_{1-\alpha/2}$

jednovýběrový t-test $|(M-c)/(S/\sqrt{n})| \geq t_{1-\alpha/2}(n-1)$

dvouvýběrový t-test

$$\left|\frac{M_1 - M_2 - c}{S_* \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}\right| \geq t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$$

F-test $S_1^2/S_2^2 \leq F_{\alpha/2}(m-1, n-1)$ nebo
$S_1^2/S_2^2 \geq F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)$

test rozptylu $(n-1)S^2/c \leq \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ nebo
$(n-1)S^2/c \geq \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$

Komplexní příklad na dvouvýběrový t-test

Příklad

Uvažme bodové výsledky studentů z 2. termínu zkoušky předmětu `MB103` v roce 2008, přičemž výsledky testů skupiny A a skupiny B považujeme za dva nezávislé výběry z normálního rozdělení. Úkolem je zjistit, jestli výsledky některé ze skupin byly statisticky významně horší. Testujme nulovou hypotézu $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ oproti alternativní hypotéze $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Komplexní příklad na dvouvýběrový t-test

Příklad

Uvažme bodové výsledky studentů z 2. termínu zkoušky předmětu `MB103` v roce 2008, přičemž výsledky testů skupiny A a skupiny B považujeme za dva nezávislé výběry z normálního rozdělení. Úkolem je zjistit, jestli výsledky některé ze skupin byly statisticky významně horší. Testujme nulovou hypotézu $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ oproti alternativní hypotéze $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Řešení

Nejprve pomocí F-testu otestujeme hypotézu o stejných rozptylech, v případě úspěchu poté použijeme dvouvýběrový t-test. Vypočteme základní statistiky:

Komplexní příklad na dvouvýběrový t-test

Příklad

Uvažme bodové výsledky studentů z 2. termínu zkoušky předmětu `MB103` v roce 2008, přičemž výsledky testů skupiny A a skupiny B považujeme za dva nezávislé výběry z normálního rozdělení. Úkolem je zjistit, jestli výsledky některé ze skupin byly statisticky významně horší. Testujme nulovou hypotézu $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ oproti alternativní hypotéze $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Řešení

Nejprve pomocí F-testu otestujeme hypotézu o stejných rozptylech, v případě úspěchu poté použijeme dvouvýběrový t-test. Vypočteme základní statistiky:

	rozsah	výb. průměr	výb. rozptyl
A	65	10,48	22,49
B	64	7,21	29,75

Řešení (Komplexní příklad na dvouvýběrový t-test (pokr.))

Dostáváme $S_1^2/S_2^2 = 0{,}76$ a protože $F(0{,}025; 64; 63) = 0{,}61$, **nezamítáme** hypotézu o rovnosti rozptylů.

Řešení (Komplexní příklad na dvouvýběrový t-test (pokr.))

Dostáváme $S_1^2/S_2^2 = 0{,}76$ a protože $F(0{,}025; 64; 63) = 0{,}61$, **nezamítáme** hypotézu o rovnosti rozptylů. O tomtéž se přesvědčíme i vypočtením intervalu spolehlivosti

$$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right) \approx (0{,}46; 1{,}24),$$

v němž leží testovaný podíl rozptylů 1.

Řešení (Komplexní příklad na dvouvýběrový t-test (pokr.))

Dostáváme $S_1^2/S_2^2 = 0{,}76$ a protože $F(0{,}025; 64; 63) = 0{,}61$, **nezamítáme** hypotézu o rovnosti rozptylů. O tomtéž se přesvědčíme i vypočtením intervalu spolehlivosti

$$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1, n-1)}\right) \approx (0{,}46; 1{,}24),$$

v němž leží testovaný podíl rozptylů 1.
Budeme tedy dále s výběry pracovat s předpokladem, že mají stejný rozptyl a použijeme dvouvýběrový t-test.

Řešení (Komplexní příklad na dvouvýběrový t-test (pokr.))

Vypočteme vážený průměr výběrových rozptylů

$$S_*^2 = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2} \approx 5{,}11^2,$$

dále $M_1 - M_2 = 3{,}27$.

Řešení (Komplexní příklad na dvouvýběrový t-test (pokr.))

Vypočteme vážený průměr výběrových rozptylů

$$S_*^2 = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2} \approx 5{,}11^2,$$

dále $M_1 - M_2 = 3{,}27$. V tabulkách najdeme hodnotu $t_{0{,}975}(65+64-2) = 1{,}98$, a protože

$$T = \frac{M_1 - M_2}{S_* \sqrt{\frac{1}{65} + \frac{1}{64}}} \approx 3{,}64,$$

docházíme k závěru, že můžeme hypotézu o stejné střední hodnotě obou rozdělení (tj. hypotézu $\mu_1 = \mu_2$) **zamítnout** (neboť $3{,}64 > 1{,}98$).

Řešení (Komplexní příklad na dvouvýběrový t-test (pokr.))

Vypočteme vážený průměr výběrových rozptylů

$$S_*^2 = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2} \approx 5{,}11^2,$$

dále $M_1 - M_2 = 3{,}27$. V tabulkách najdeme hodnotu $t_{0{,}975}(65 + 64 - 2) = 1{,}98$, a protože

$$T = \frac{M_1 - M_2}{S_* \sqrt{\frac{1}{65} + \frac{1}{64}}} \approx 3{,}64,$$

docházíme k závěru, že můžeme hypotézu o stejné střední hodnotě obou rozdělení (tj. hypotézu $\mu_1 = \mu_2$) **zamítnout** (neboť $3{,}64 > 1{,}98$). Toto opět ověříme výpočtem intervalu spolehlivosti, který má střed v $M_1 - M_2$ a velikost rovnou dvojnásobku $S_* \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\, t_{1-\alpha/2}(m+n-2) \approx 1{,}78$, proto je interval spolehlivosti $(1{,}49; 5{,}05)$.