

# Matematika IV – 8. přednáška

## Pravděpodobnost – opakování a zobecnění pojmů

Michal Bulant

Masarykova univerzita  
Fakulta informatiky

13. 4. 2011

# Obsah přednášky

- 1 Pravděpodobnost nebo statistika?
- 2 Pravděpodobnost
- 3 Náhodné veličiny

## Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, e-text.
- Karel Zvára, Josef Štěpán, **Pravděpodobnost a matematická statistika**, Matfyzpress, 4. vydání, 2006, 230 stran, ISBN 80-867-3271-1.
- Marie Budíková, Štěpán Mikoláš, Pavel Osecký, **Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika (sbírka příkladů)**, Masarykova univerzita, 3. vydání, 2004, 117 stran, ISBN 80-210-3313-4.
- Marie Budíková, Štěpán Mikoláš, Pavel Osecký, **Popisná statistika**, Masarykova univerzita, 3. vydání, 2002, 48 stran, ISBN 80-210-1831-3.
- Marie Budíková, Tomáš Lerch, Štěpán Mikoláš, **Základní statistické metody**, Masarykova univerzita, 2005, 170 stran, ISBN 80-210-3886-1.

# Plán přednášky

- 1 Pravděpodobnost nebo statistika?
- 2 Pravděpodobnost
- 3 Náhodné veličiny

Motto:

*42,35 procenta všech statistik je nesmyslných.*

**Statistika** v širším slova smyslu je jakékoliv zpracování číselných dat o nějakém souboru objektů a jejich více či méně přehledná prezentace.

Podstatou **matematické statistiky** je pro daná data zjišťovat, jaké vlastnosti mají objekty, které jsou daty popisovány. Zpravidla jde o sběr dat o části souboru objektů, jejich následnou analýzu a konečně o vyslovení důsledků pozorování pro celý soubor.

Podstatou **matematické statistiky** je pro daná data zjišťovat, jaké vlastnosti mají objekty, které jsou daty popisovány. Zpravidla jde o sběr dat o části souboru objektů, jejich následnou analýzu a konečně o vyslovení důsledků pozorování pro celý soubor. Výsledkem práce matematického statistika je sdělení o velkém souboru objektů na základě studia malé (zpravidla náhodně vybrané) části z nich, **společně s kvalitativním odhadem věrohodnosti výsledného sdělení.**

Podstatou **matematické statistiky** je pro daná data zjišťovat, jaké vlastnosti mají objekty, které jsou daty popisovány. Zpravidla jde o sběr dat o části souboru objektů, jejich následnou analýzu a konečně o vyslovení důsledků pozorování pro celý soubor.

Výsledkem práce matematického statistika je sdělení o velkém souboru objektů na základě studia malé (zpravidla náhodně vybrané) části z nich, **společně s kvalitativním odhadem věrohodnosti výsledného sdělení.**

**Teorie pravděpodobnosti** studuje modely popisující chování abstraktních souborů (pravděpodobnost jevů z jevového pole), statistika studuje skutečné náhodné výběry z nějakého základního souboru a zdůvodňuje výběr teoretického pravděpodobnostního modelu, resp. kvalitativní informace o jeho parametrech.



## Příklad

Za soubor objektů vezměme všechny studenty přednášky Matematika III (podzim 2007), jako číselný údaj můžeme uvažovat

- 1 průměrné bodové hodnocení studenta u zkoušky,

a mnoho dalších údajů.

## Příklad

Za soubor objektů vezměme všechny studenty přednášky Matematika III (podzim 2007), jako číselný údaj můžeme uvažovat

- 1 průměrné bodové hodnocení studenta u zkoušky,
- 2 průměrnou známku u zkoušky z tohoto (2,92 ) a z jiných pevně vybraných předmětů (IB000 – 2,95; IB102 – 2,89) ,

a mnoho dalších údajů.

## Příklad

Za soubor objektů vezměme všechny studenty přednášky Matematika III (podzim 2007), jako číselný údaj můžeme uvažovat

- 1 průměrné bodové hodnocení studenta u zkoušky,
- 2 průměrnou známku u zkoušky z tohoto (2,92 ) a z jiných pevně vybraných předmětů (IB000 – 2,95; IB102 – 2,89) ,
- 3 nejčastější známku (resp. úspěšnou známku) z tohoto předmětu (F – 92 krát, E – 91 krát), nejméně častou známku (B – 15 krát),

a mnoho dalších údajů.

## Příklad

Za soubor objektů vezměme všechny studenty přednášky Matematika III (podzim 2007), jako číselný údaj můžeme uvažovat

- 1 průměrné bodové hodnocení studenta u zkoušky,
- 2 průměrnou známku u zkoušky z tohoto (2,92) a z jiných pevně vybraných předmětů (IB000 – 2,95; IB102 – 2,89),
- 3 nejčastější známku (resp. úspěšnou známku) z tohoto předmětu (F – 92 krát, E – 91 krát), nejméně častou známku (B – 15 krát),
- 4 průměrný počet bodů dosažených na jednotlivých termínech zkoušky (1. – 16,8; 2. – 8,9; 3. – 8,1; příklad, za nějž bylo uděleno nejvíce (nejméně) procent možných bodů – min. kostra (1B, 82,5%), resp. rekurence (2A, 3,6%)

a mnoho dalších údajů.

## Příklad

Za soubor objektů vezměme všechny studenty přednášky Matematika III (podzim 2007), jako číselný údaj můžeme uvažovat

- 1 průměrné bodové hodnocení studenta u zkoušky,
- 2 průměrnou známku u zkoušky z tohoto (2,92 ) a z jiných pevně vybraných předmětů (IB000 – 2,95; IB102 – 2,89) ,
- 3 nejčastější známku (resp. úspěšnou známku) z tohoto předmětu (F – 92 krát, E – 91 krát), nejméně častou známku (B – 15 krát),
- 4 průměrný počet bodů dosažených na jednotlivých termínech zkoušky (1. – 16,8; 2. – 8,9; 3. – 8,1; příklad, za nějž bylo uděleno nejvíce (nejméně) procent možných bodů – min. kostra (1B, 82,5%), resp. rekurence (2A, 3,6%)
- 5 počet pracovních hodin týdně odpracovaných mimo fakultu,

a mnoho dalších údajů.

## Příklad

Za soubor objektů vezměme všechny studenty přednášky Matematika III (podzim 2007), jako číselný údaj můžeme uvažovat

- ① průměrné bodové hodnocení studenta u zkoušky,
- ② průměrnou známku u zkoušky z tohoto (2,92 ) a z jiných pevně vybraných předmětů (IB000 – 2,95; IB102 – 2,89) ,
- ③ nejčastější známku (resp. úspěšnou známku) z tohoto předmětu (F – 92 krát, E – 91 krát), nejméně častou známku (B – 15 krát),
- ④ průměrný počet bodů dosažených na jednotlivých termínech zkoušky (1. – 16,8; 2. – 8,9; 3. – 8,1; příklad, za nějž bylo uděleno nejvíce (nejméně) procent možných bodů – min. kostra (1B, 82,5%), resp. rekurence (2A, 3,6%)
- ⑤ počet pracovních hodin týdně odpracovaných mimo fakultu,
- ⑥ číselná data vypovídající o historii dřívějšího studia

a mnoho dalších údajů.

Zastavme se u prvního údaje. Samotný aritmetický průměr bodů nám mnoho neřekne nejen o kvalitě přednášky a o kvalitě přednášejícího, ale ani o samotném hodnocení. Zajímá nás také hodnota, která bude „uprostřed souboru“, tj. počet bodů, pro které je stejně studentů pod ní a nad ní.

Obdobně první a poslední čtvrtina, desetina apod. Všem takovým údajům říkáme **statistiky** posuzované veličiny. V uvedených příkladech se jim říká **medián**, **kvartil**, **decil** apod.

Zastavme se u prvního údaje. Samotný aritmetický průměr bodů nám mnoho neřekne nejen o kvalitě přednášky a o kvalitě přednášejícího, ale ani o samotném hodnocení. Zajímá nás také hodnota, která bude „uprostřed souboru“, tj. počet bodů, pro které je stejně studentů pod ní a nad ní.

Obdobně první a poslední čtvrtina, desetina apod. Všem takovým údajům říkáme **statistiky** posuzované veličiny. V uvedených příkladech se jim říká **medián**, **kvartil**, **decil** apod.

Z obecné zkušenosti nebo jako výsledek úvah mimo matematiku víme, že rozumné hodnocení by mělo mít tzv. **normální rozdělení** (odpovídá tzv. *Gaussově křivce*). Tento pojem patří do teorie pravděpodobnosti a k jeho zavedení budeme potřebovat poměrně dost matematiky.



Zastavme se u prvního údaje. Samotný aritmetický průměr bodů nám mnoho neřekne nejen o kvalitě přednášky a o kvalitě přednášejícího, ale ani o samotném hodnocení. Zajímá nás také hodnota, která bude „uprostřed souboru“, tj. počet bodů, pro které je stejně studentů pod ní a nad ní.

Obdobně první a poslední čtvrtina, desetina apod. Všem takovým údajům říkáme **statistiky** posuzované veličiny. V uvedených příkladech se jim říká **medián**, **kvartil**, **decil** apod.

Z obecné zkušenosti nebo jako výsledek úvah mimo matematiku víme, že rozumné hodnocení by mělo mít tzv. **normální rozdělení** (odpovídá tzv. *Gaussově křivce*). Tento pojem patří do teorie pravděpodobnosti a k jeho zavedení budeme potřebovat poměrně dost matematiky.

Porovnáním výsledku třeba i docela malého náhodného výběru studentů s teoretickým modelem můžeme zjistit odhad parametrů takového rozdělení a činit závěry, zda je hodnocení „rozumné“. Zároveň lze popsat věrohodnost našich závěrů.

Daleko zajímavější vývody ovšem můžeme činit, když porovnáním statistik pro různé veličiny budeme moci dovozovat informace o souvislostech. Pokud např. neexistuje žádná doložitelná souvislost mezi historií předchozího studia a výsledky v dané přednášce, je jedním z možných vysvětlení vývod, že je přednáška (nebo její hodnocení) prostě špatná.

Daleko zajímavější vývody ovšem můžeme činit, když porovnáním statistik pro různé veličiny budeme moci dovozovat informace o souvislostech. Pokud např. neexistuje žádná doložitelná souvislost mezi historií předchozího studia a výsledky v dané přednášce, je jedním z možných vysvětlení vývod, že je přednáška (nebo její hodnocení) prostě špatná.

### Závěr úvodních úvah:

- V matematice pracujeme s abstraktním matematickým popisem pravděpodobnosti.
- Vývody pro konkrétní soubory dat, pro které je zvolený model relevantní, dává matematická statistika.
- To, zda je takový popis adekvátní pro konkrétní výběr dat, je také možné podpořit nebo zavrhnout pomocí metod matematické statistiky.

# Plán přednášky

- 1 Pravděpodobnost nebo statistika?
- 2 Pravděpodobnost**
- 3 Náhodné veličiny

Připomeneme (a trochu zobecníme) pojmy a výsledky z prvního semestru.

### Definice (Náhodné jevy)

Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou  $\Omega$  všech možných výsledků, kterou nazýváme **základní prostor**.

Připomeneme (a trochu zobecníme) pojmy a výsledky z prvního semestru.

### Definice (Náhodné jevy)

Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou  $\Omega$  všech možných výsledků, kterou nazýváme **základní prostor**. Prvky  $\omega \in \Omega$  představují jednotlivé **možné výsledky**.

Připomeneme (a trochu zobecníme) pojmy a výsledky z prvního semestru.

### Definice (Náhodné jevy)

Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou  $\Omega$  všech možných výsledků, kterou nazýváme **základní prostor**.

Prvky  $\omega \in \Omega$  představují jednotlivé **možné výsledky**.

Systém podmnožin  $\mathcal{A}$  základního prostoru se nazývá **jevové pole** a jeho prvky se nazývají **jevy**, jestliže

- $\Omega \in \mathcal{A}$ , tj. základní prostor, je jevem,
- je-li  $A, B \in \mathcal{A}$ , pak  $A \setminus B \in \mathcal{A}$ , tj. pro každé dva jevy je jevem i jejich množinový rozdíl,
- je-li  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $i \in I$  nejvýše spočetný systém jevů, pak také jejich sjednocení je jevem, tj.  $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ .

## Důsledek

- *Komplement  $A^c = \Omega \setminus A$  jevu  $A$  je jevem, který nazýváme opačný jev k jevu  $A$ .*



## Důsledek

- Komplement  $A^c = \Omega \setminus A$  jevu  $A$  je jevem, který nazýváme opačný jev k jevu  $A$ .
- Průnik dvou jevů opět jevem, protože pro každé dvě podmnožiny  $A, B \subset \Omega$  platí

$$A \setminus (\Omega \setminus B) = A \cap B.$$

Takový systém množin  $\mathcal{A}$  se pak nazývá  $\sigma$ -algebra.

## Důsledek

- Komplement  $A^c = \Omega \setminus A$  jevu  $A$  je jevem, který nazýváme opačný jev k jevu  $A$ .
- Průnik dvou jevů opět jevem, protože pro každé dvě podmnožiny  $A, B \subset \Omega$  platí

$$A \setminus (\Omega \setminus B) = A \cap B.$$

Takový systém množin  $\mathcal{A}$  se pak nazývá  $\sigma$ -algebra.

Jevové pole je tedy systém podmnožin základního prostoru uzavřený na konečné průniky, spočetná sjednocení a množinové rozdíly. Jednotlivé množiny  $A \in \mathcal{A}$  nazýváme **náhodné jevy** (vzhledem k  $\mathcal{A}$ ).

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných jevů a jejich statistickým popisem:

- celý základní prostor  $\Omega$  se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina  $\emptyset \in \mathcal{A}$  se nazývá **nemožný jev**,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných jevů a jejich statistickým popisem:

- celý základní prostor  $\Omega$  se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina  $\emptyset \in \mathcal{A}$  se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny  $\{\omega\} \in \Omega$  se nazývají **elementární jevy**,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných jevů a jejich statistickým popisem:

- celý základní prostor  $\Omega$  se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina  $\emptyset \in \mathcal{A}$  se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny  $\{\omega\} \in \Omega$  se nazývají **elementární jevy**,
- **společné nastoupení jevů**  $A_i, i \in I$ , odpovídá jevu  $\bigcap_{i \in I} A_i$ ,  
**nastoupení alespoň jednoho z jevů**  $A_i, i \in I$ , odpovídá jevu  $\bigcup_{i \in I} A_i$ ,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných jevů a jejich statistickým popisem:

- celý základní prostor  $\Omega$  se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina  $\emptyset \in \mathcal{A}$  se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny  $\{\omega\} \in \Omega$  se nazývají **elementární jevy**,
- **společné nastoupení jevů**  $A_i, i \in I$ , odpovídá jevu  $\bigcap_{i \in I} A_i$ ,  
**nastoupení alespoň jednoho z jevů**  $A_i, i \in I$ , odpovídá jevu  $\bigcup_{i \in I} A_i$ ,
- $A, B \in \mathcal{A}$  jsou **neslučitelné jevy**, je-li  $A \cap B = \emptyset$ ,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných jevů a jejich statistickým popisem:

- celý základní prostor  $\Omega$  se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina  $\emptyset \in \mathcal{A}$  se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny  $\{\omega\} \in \Omega$  se nazývají **elementární jevy**,
- **společné nastoupení jevů**  $A_i, i \in I$ , odpovídá jevu  $\bigcap_{i \in I} A_i$ , **nastoupení alespoň jednoho z jevů**  $A_i, i \in I$ , odpovídá jevu  $\bigcup_{i \in I} A_i$ ,
- $A, B \in \mathcal{A}$  jsou **neslučitelné jevy**, je-li  $A \cap B = \emptyset$ ,
- jev  $A$  má za **důsledek** jev  $B$ , když  $A \subset B$ ,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných jevů a jejich statistickým popisem:

- celý základní prostor  $\Omega$  se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina  $\emptyset \in \mathcal{A}$  se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny  $\{\omega\} \in \Omega$  se nazývají **elementární jevy**,
- **společné nastoupení jevů**  $A_i, i \in I$ , odpovídá jevu  $\bigcap_{i \in I} A_i$ , **nastoupení alespoň jednoho z jevů**  $A_i, i \in I$ , odpovídá jevu  $\bigcup_{i \in I} A_i$ ,
- $A, B \in \mathcal{A}$  jsou **neslučitelné jevy**, je-li  $A \cap B = \emptyset$ ,
- jev  $A$  má za **důsledek** jev  $B$ , když  $A \subset B$ ,
- je-li  $A \in \mathcal{A}$ , pak se jev  $B = \Omega \setminus A$  nazývá **opačný jev k jevu**  $A$ , píšeme  $B = A^c$ .



## Definice (Kolmogorovova definice pravděpodobnosti)

**Pravděpodobnostní prostor** je jevové pole  $\mathcal{A}$  podmnožin (konečného) základního prostoru  $\Omega$ , na kterém je definována funkce  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  s následujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj.  $P(A) \geq 0$  pro všechny jevy  $A$ ,
- je aditivní, tj.  $P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$ , pro každý nejvýše spočetný systém po dvou neslučitelných jevů,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Funkci  $P$  nazýváme **pravděpodobností** na jevovém poli  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

## Definice (Kolmogorovova definice pravděpodobnosti)

**Pravděpodobnostní prostor** je jevové pole  $\mathcal{A}$  podmnožin (konečného) základního prostoru  $\Omega$ , na kterém je definována funkce  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  s následujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj.  $P(A) \geq 0$  pro všechny jevy  $A$ ,
- je aditivní, tj.  $P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$ , pro každý nejvýše spočetný systém po dvou neslučitelných jevů,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Funkci  $P$  nazýváme **pravděpodobností** na jevovém poli  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

## Důsledek

*Pro všechny jevy  $A, B \in \mathcal{A}$  platí*

- $P(\emptyset) = 0$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$ ,

## Definice (Kolmogorovova definice pravděpodobnosti)

**Pravděpodobnostní prostor** je jevové pole  $\mathcal{A}$  podmnožin (konečného) základního prostoru  $\Omega$ , na kterém je definována funkce  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  s následujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj.  $P(A) \geq 0$  pro všechny jevy  $A$ ,
- je aditivní, tj.  $P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$ , pro každý nejvýše spočetný systém po dvou neslučitelných jevů,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Funkci  $P$  nazýváme **pravděpodobností** na jevovém poli  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

## Důsledek

*Pro všechny jevy  $A, B \in \mathcal{A}$  platí*

- $P(\emptyset) = 0$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$ ,
- $P(A^c) = 1 - P(A)$ ,

## Definice (Kolmogorovova definice pravděpodobnosti)

**Pravděpodobnostní prostor** je jevové pole  $\mathcal{A}$  podmnožin (konečného) základního prostoru  $\Omega$ , na kterém je definována funkce  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  s následujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj.  $P(A) \geq 0$  pro všechny jevy  $A$ ,
- je aditivní, tj.  $P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$ , pro každý nejvýše spočetný systém po dvou neslučitelných jevů,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Funkci  $P$  nazýváme **pravděpodobností** na jevovém poli  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

## Důsledek

*Pro všechny jevy  $A, B \in \mathcal{A}$  platí*

- $P(\emptyset) = 0$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$ ,
- $P(A^c) = 1 - P(A)$ ,
- $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$ ,  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ ,

## Definice (Kolmogorovova definice pravděpodobnosti)

**Pravděpodobnostní prostor** je jevové pole  $\mathcal{A}$  podmnožin (konečného) základního prostoru  $\Omega$ , na kterém je definována funkce  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  s následujícími vlastnostmi:

- je nezáporná, tj.  $P(A) \geq 0$  pro všechny jevy  $A$ ,
- je aditivní, tj.  $P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$ , pro každý nejvýše spočetný systém po dvou neslučitelných jevů,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Funkci  $P$  nazýváme **pravděpodobností** na jevovém poli  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

## Důsledek

*Pro všechny jevy  $A, B \in \mathcal{A}$  platí*

- $P(\emptyset) = 0$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$ ,
- $P(A^c) = 1 - P(A)$ ,
- $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$ ,  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ ,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Podobná tvrzení platí i pro nekonečné posloupnosti jevů:

### Tvrzení

*Pro libovolnou nejvýše spočetnou množinu jevů  $(A_i)_{i=1}^{\infty}$  platí:*

- *Je-li  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ , pak*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i),$$

Podobná tvrzení platí i pro nekonečné posloupnosti jevů:

### Tvrzení

*Pro libovolnou nejvýše spočetnou množinu jevů  $(A_i)_{i=1}^{\infty}$  platí:*

- *Je-li  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ , pak*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i),$$

- *Je-li  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ , pak*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i),$$

Podobná tvrzení platí i pro nekonečné posloupnosti jevů:

### Tvrzení

Pro libovolnou nejvýše spočetnou množinu jevů  $(A_i)_{i=1}^{\infty}$  platí:

- Je-li  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ , pak

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i),$$

- Je-li  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ , pak

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i),$$

- $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$



Podobná tvrzení platí i pro nekonečné posloupnosti jevů:

### Tvrzení

Pro libovolnou nejvýše spočetnou množinu jevů  $(A_i)_{i=1}^{\infty}$  platí:

- Je-li  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ , pak

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i),$$

- Je-li  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ , pak

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i),$$

- $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ ,
- $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} (1 - P(A_i))$ .

# Klasická pravděpodobnost

Připomeňme si klasickou konečnou pravděpodobnost.

# Klasická pravděpodobnost

Připomeňme si klasickou konečnou pravděpodobnost.

## Definice

Nechť  $\Omega$  je konečný základní prostor a necht' jevové pole  $\mathcal{A}$  je právě systém všech podmnožin v  $\Omega$ . **Klasická pravděpodobnost** je pravděpodobnostní prostor  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  s pravděpodobnostní funkcí  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Zjevně takto zadaná funkce skutečně definuje pravděpodobnost, kdy všem elementárním jevům přiřazujeme stejnou pravděpodobnost.

Že s klasickou pravděpodobností nevystačíme, ukazují následující příklady:

### Příklad

- Cestou z Kotlářské na Botanickou jsem ztratil zadání písemky. Určete pravděpodobnost jevu  $\omega_X$  slovně vyjádřeného: *ztracená písemka se nachází nejbližše k zastávce trolejbusu X.*

Že s klasickou pravděpodobností nevystačíme, ukazují následující příklady:

### Příklad

- Cestou z Kotlářské na Botanickou jsem ztratil zadání písemky. Určete pravděpodobnost jevu  $\omega_X$  slovně vyjádřeného: *ztracená písemka se nachází nejbližší k zastávce trolejbusu  $X$ .*
- Určete pravděpodobnost, jevu  $\omega_k$ : *při opakovaném hodu mincí padne hlava poprvé při  $k$ -tém pokusu.*

Že s klasickou pravděpodobností nevystačíme, ukazují následující příklady:

### Příklad

- Cestou z Kotlářské na Botanickou jsem ztratil zadání písemky. Určete pravděpodobnost jevu  $\omega_X$  slovně vyjádřeného: *ztracená písemka se nachází nejbližší k zastávce trolejbusu  $X$ .*
- Určete pravděpodobnost, jevu  $\omega_k$ : *při opakovaném hodu mincí padne hlava poprvé při  $k$ -tém pokusu.*

Že s klasickou pravděpodobností nevystačíme, ukazují následující příklady:

### Příklad

- Cestou z Kotlářské na Botanickou jsem ztratil zadání písemky. Určete pravděpodobnost jevu  $\omega_X$  slovně vyjádřeného: *ztracená písemka se nachází nejbližší k zastávce trolejbusu  $X$ .*
- Určete pravděpodobnost, jevu  $\omega_k$ : *při opakovaném hodu mincí padne hlava poprvé při  $k$ -tém pokusu.*

V prvním případě je třeba pracovat s nekonečně mnoha stejně pravděpodobnými elementárními jevy: *písemku jsem ztratil v bodě  $(x, y)$* , ve druhém pak musíme připustit teoretickou možnost, že hlava nepadne nikdy, a prostorem jevů tedy bude  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .

## Peterburgský „paradox“ (Bernoulli, 1738)

Typický příklad klasické pravděpodobnosti jsou jevy související s házením mincí. Představme si následující pravidla kasina:



# Peterburgský „paradox“ (Bernoulli, 1738)

Typický příklad klasické pravděpodobnosti jsou jevy související s házením mincí. Představme si následující pravidla kasina:

## Casino rules

Návštěvník zaplatí vklad  $C$  a poté hází mincí. V banku je na začátku dolar a při každém hodu se bank zdvojnásobí. Padne-li hlava, hráč získá obsah banku. Je-li tedy  $T$  počet hodů potřebných k první hlavě, hráč obdrží výhru  $2^T$ . Jaká je „fér hodnota“ pro vklad  $C$ ?

# Peterburgský „paradox“ (Bernoulli, 1738)

Typický příklad klasické pravděpodobnosti jsou jevy související s házením mincí. Představme si následující pravidla kasina:

## Casino rules

Návštěvník zaplatí vklad  $C$  a poté hází mincí. V banku je na začátku dolar a při každém hodu se bank zdvojnásobí. Padne-li hlava, hráč získá obsah banku. Je-li tedy  $T$  počet hodů potřebných k první hlavě, hráč obdrží výhru  $2^T$ . Jaká je „fér hodnota“ pro vklad  $C$ ?

A co vy? Zaplatili byste za možnost zahrát si tuto hru třeba 20\$?

## Odvození

Pravděpodobnost, že padne hlava je u férové mince  $1/2$ , je proto  $P(T = k) = 2^{-k}$ . Sečteme-li všechny pravděpodobnosti výsledků vynásobených výhrami  $2^k$ , dostaneme očekávanou výhru

$$\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 + \dots = \sum_1^{\infty} 1 = \infty.$$

Zdá se proto, že se vyplatí vložit i velký vklad, protože libovolný vklad  $C$  se nám „časem“ vrátí.

## Odvození

Pravděpodobnost, že padne hlava je u férové mince  $1/2$ , je proto  $P(T = k) = 2^{-k}$ . Sečteme-li všechny pravděpodobnosti výsledků vynásobených výhrami  $2^k$ , dostaneme očekávanou výhru

$$\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 + \dots = \sum_1^{\infty} 1 = \infty.$$

Zdá se proto, že se vyplatí vložit i velký vklad, protože libovolný vklad  $C$  se nám „časem“ vrátí.

Ve skutečnosti simulací hry zjistíme, že nezávisle na počtu pokusů se prakticky všechny výhry budou pohybovat v rozmezí malých hodnot. Důvodem je, že vysoké výhry jsou velice nepravděpodobné a proto je při reálných úvahách nelze brát vážně.

## Odvození

Pravděpodobnost, že padne hlava je u férové mince  $1/2$ , je proto  $P(T = k) = 2^{-k}$ . Sečteme-li všechny pravděpodobnosti výsledků vynásobených výhrami  $2^k$ , dostaneme očekávanou výhru

$$\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 + \dots = \sum_1^{\infty} 1 = \infty.$$

Zdá se proto, že se vyplatí vložit i velký vklad, protože libovolný vklad  $C$  se nám „časem“ vrátí.

Ve skutečnosti simulací hry zjistíme, že nezávisle na počtu pokusů se prakticky všechny výhry budou pohybovat v rozmezí malých hodnot. Důvodem je, že vysoké výhry jsou velice nepravděpodobné a proto je při reálných úvahách nelze brát vážně.

Tento paradox je vysvětlován nelinearitou funkce *užitečnosti peněz* (utility function), případně nezbytností diskontování jejich hodnoty.

# Podmíněná pravděpodobnost a nezávislost

## Motto:

*Je dokázáno, že slavení narozenin je zdraví prospěšné. Statistika ukazuje, že lidé, kteří oslavili nejvíce narozenin, se dožívají nejvyššího věku.*

# Podmíněná pravděpodobnost a nezávislost

## Motto:

*Je dokázáno, že slavení narozenin je zdraví prospěšné. Statistika ukazuje, že lidé, kteří oslavili nejvíce narozenin, se dožívají nejvyššího věku.*

Obvyklé je také klást dotazy s dodatečnou podmínkou. Např.

- Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padly dvě pětky, je-li součet hodnot deset?

# Podmíněná pravděpodobnost a nezávislost

## Motto:

*Je dokázáno, že slavení narozenin je zdraví prospěšné. Statistika ukazuje, že lidé, kteří oslavili nejvíce narozenin, se dožívají nejvyššího věku.*

Obvyklé je také klást dotazy s dodatečnou podmínkou. Např.

- Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padly dvě pětky, je-li součet hodnot deset?
- Mějme urnu s 10 koulemi. Desetkrát jsem vytáhl kouli, zkontroloval její barvu a vrátil do urny. Jestliže byla vždy bílé barvy, s jakou pravděpodobností jsou všechny koule v urně bílé?



# Podmíněná pravděpodobnost a nezávislost

## Motto:

*Je dokázáno, že slavení narozenin je zdraví prospěšné. Statistika ukazuje, že lidé, kteří oslavili nejvíce narozenin, se dožívají nejvyššího věku.*

Obvyklé je také klást dotazy s dodatečnou podmínkou. Např.

- Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padly dvě pětky, je-li součet hodnot deset?
- Mějme urnu s 10 koulemi. Desetkrát jsem vytáhl kouli, zkontroloval její barvu a vrátil do urny. Jestliže byla vždy bílé barvy, s jakou pravděpodobností jsou všechny koule v urně bílé?
- Na dostizích jsou známy pravděpodobnosti vítězství jednotlivých koní. Jak se tyto pravděpodobnosti změní, pokud uprostřed závodu spadne jezdec jednoho z koní ze sedla?

Připomeňme, že formalizovat takové úvahy umíme následovně.

## Definice

Nechť  $H$  je jev s nenulovou pravděpodobností v jevovém poli  $\mathcal{A}$  v pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . **Podmíněná pravděpodobnost**  $P(A|H)$  jevu  $A \in \mathcal{A}$  vzhledem k jevu  $H$  je definována vztahem

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}.$$

Připomeňme, že formalizovat takové úvahy umíme následovně.

## Definice

Nechť  $H$  je jev s nenulovou pravděpodobností v jevovém poli  $\mathcal{A}$  v pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . **Podmíněná pravděpodobnost**  $P(A|H)$  jevu  $A \in \mathcal{A}$  vzhledem k jevu  $H$  je definována vztahem

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}.$$

Přirozená definice nezávislosti je, že hypotéza  $H$  a jev  $A$  jsou nezávislé tehdy, je-li  $P(A) = P(A|H)$ .

Z výše uvedeného snadno vyplývá *symetričtější* definice:

Připomeňme, že formalizovat takové úvahy umíme následovně.

### Definice

Nechť  $H$  je jev s nenulovou pravděpodobností v jevovém poli  $\mathcal{A}$  v pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . **Podmíněná pravděpodobnost**  $P(A|H)$  jevu  $A \in \mathcal{A}$  vzhledem k jevu  $H$  je definována vztahem

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}.$$

Přirozená definice nezávislosti je, že hypotéza  $H$  a jev  $A$  jsou nezávislé tehdy, je-li  $P(A) = P(A|H)$ .

Z výše uvedeného snadno vyplývá *symetričtější* definice:

### Definice

Říkáme, že jevy  $A$  a  $B$  jsou nezávislé, jestliže

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

## Definice

Říkáme, že jevy  $A_1, A_2, \dots$  jsou nezávislé, jestliže pro každou  $k$ -tici  $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$  z nich platí

$$P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j}).$$

## Definice

Říkáme, že jevy  $A_1, A_2, \dots$  jsou nezávislé, jestliže pro každou  $k$ -tici  $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$  z nich platí

$$P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j}).$$

## Příklad

V urně jsou 4 lístky označené 000, 110, 101, 011. Uvažujme pro  $i = 1, 2, 3$  náhodné jevy

$A_i = \{\text{náhodně vytažený lístek má na } i\text{-tém místě } 1\}.$

## Definice

Říkáme, že jevy  $A_1, A_2, \dots$  jsou nezávislé, jestliže pro každou  $k$ -tici  $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$  z nich platí

$$P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j}).$$

## Příklad

V urně jsou 4 lístky označené 000, 110, 101, 011. Uvažujme pro  $i = 1, 2, 3$  náhodné jevy

$A_i = \{\text{náhodně vytažený lístek má na } i\text{-tém místě } 1\}$ .

Snadno se vidí, že  $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$ , dále, že

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$  a že

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$ .

## Definice

Říkáme, že jevy  $A_1, A_2, \dots$  jsou nezávislé, jestliže pro každou  $k$ -tici  $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$  z nich platí

$$P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j}).$$

## Příklad

V urně jsou 4 lístky označené 000, 110, 101, 011. Uvažujme pro  $i = 1, 2, 3$  náhodné jevy

$A_i = \{\text{náhodně vytažený lístek má na } i\text{-tém místě } 1\}$ .

Snadno se vidí, že  $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$ , dále, že

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$  a že

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$ . Jevy  $A_1, A_2, A_3$  jsou tedy po dvou nezávislé, ale nejsou nezávislé.



# Bayesovy věty

Přepsáním formule pro podmíněnou pravděpodobnost dostáváme

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

## Věta (Bayesovy věty)

*Pro pravděpodobnost jevů A a B platí*

①  $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}.$

②  $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)}.$

# Bayesovy věty

Přepsáním formule pro podmíněnou pravděpodobnost dostáváme

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

## Věta (Bayesovy věty)

*Pro pravděpodobnost jevů A a B platí*

- 1  $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}.$
- 2  $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)}.$

## Důkaz.

První tvrzení je přepsáním předchozí formule, druhé z prvního plyne dosazením  $P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)$ . □

# Specifičnost a senzitivita (citlivost) testu

	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost
<b>Test pozitivní</b>	True positive	<b>False positive</b>
<b>Test negativní</b>	<b>False negative</b>	True negative
	Senzitivita	Specifičnost

## Příklad – preventivní screening

Předpokládejme, že krevní test na HIV pozitivní osoby má 99% správnost v případě osoby skutečně HIV pozitivní (*vysoká citlivost – sensitivity*). Zároveň předpokládejme, že u HIV negativní osoby dopadně test pozitivně v 0,2% případů (*relativně vysoká specifická – specificity*).

## Příklad – preventivní screening

Předpokládejme, že krevní test na HIV pozitivní osoby má 99% správnost v případě osoby skutečně HIV pozitivní (*vysoká citlivost – sensitivity*). Zároveň předpokládejme, že u HIV negativní osoby dopadne test pozitivně v 0,2% případů (*relativně vysoká specifická – specificity*).

Náhodně z populace vybereme osobu a otestujeme pozitivně.

S jakou pravděpodobností je skutečně HIV pozitivní, jestliže četnost výskytu HIV v populaci je  $p$  promile (tj.  $p$  osob z tisíce je skutečně HIV pozitivní).

## Příklad – preventivní screening

Předpokládejme, že krevní test na HIV pozitivní osoby má 99% správnost v případě osoby skutečně HIV pozitivní (*vysoká citlivost – sensitivity*). Zároveň předpokládejme, že u HIV negativní osoby dopadne test pozitivně v 0,2% případů (*relativně vysoká specifická – specificity*).

Náhodně z populace vybereme osobu a otestujeme pozitivně.

S jakou pravděpodobností je skutečně HIV pozitivní, jestliže četnost výskytu HIV v populaci je  $p$  promile (tj.  $p$  osob z tisíce je skutečně HIV pozitivní).

Označme  $A$  jev, že je daná osoba HIV pozitivní, a  $B$  jev, že daná osoba má pozitivní test. Dle druhé Bayesovy věty je hledaná pravděpodobnost

$$P(A|B) = \frac{p/1000 \cdot 99/100}{p/1000 \cdot 99/100 + (1000 - p)/1000 \cdot 2/1000}$$

## Příklad – preventivní screening, pokr.

Jestliže zvolíme za  $p$  nějaké konkrétní četnosti, dostaneme příslušné očekávatelné spolehlivosti testu. V následující tabulce je spočten výsledek pro několik  $p$ :

$p$	100	10	1	0,1
$P(A B)$	0,982	0,8333	0,3313	0,0471

Výsledek asi neodpovídá naší intuici a může se zdát šokující ve vztahu k použití takovýchto testů.

## Příklad – preventivní screening, pokr.

Jestliže zvolíme za  $p$  nějaké konkrétní četnosti, dostaneme příslušné očekávatelné spolehlivosti testu. V následující tabulce je spočten výsledek pro několik  $p$ :

$p$	100	10	1	0,1
$P(A B)$	0,982	0,8333	0,3313	0,0471

Výsledek asi neodpovídá naší intuici a může se zdát šokující ve vztahu k použití takovýchto testů.

### Poznámka

Sami si můžete podobný výpočet udělat pro tzv. triple test na Downův syndrom, prováděný ve 2. trimestru těhotenství s 70% citlivostí a 5% „false-positive rate“ či pro statistiky svého oblíbeného spamfilteru (např. SpamAssassin s někde udávanou citlivostí 99,64% a specifičností 98.23%).



## Triple test a jeho výsledky

Triple test je vyšetření krevního séra na hodnoty choriogonadotropinu, estriolu a alfa-fetoproteinu. Provádí se v druhém trimestru těhotenství a má sloužit k detekci rizik genetických poruch a poruch vývoje nervové trubice. Detekuje poruchy s úspěšností **70%** a naopak **5%** zdravých případů rozpozná jako porušené. Budoucím matkám, u kterých triple test ukáže zvýšené riziko vad plodu, je obvykle doporučeno nějaké další zpřesňující vyšetření, například amniocentéza (odběr plodové vody).

## Triple test a jeho výsledky

Triple test je vyšetření krevního séra na hodnoty choriogonadotropinu, estriolu a alfa-fetoproteinu. Provádí se v druhém trimestru těhotenství a má sloužit k detekci rizik genetických poruch a poruch vývoje nervové trubice. Detekuje poruchy s úspěšností **70%** a naopak **5%** zdravých případů rozpozná jako porušené. Budoucím matkám, u kterých triple test ukáže zvýšené riziko vad plodu, je obvykle doporučeno nějaké další zpřesňující vyšetření, například amniocentéza (odběr plodové vody). Uvádí se, že u těhotné ženy ve věku 20–24 let je pravděpodobnost narození dítěte s Downovým syndromem cca **1:1500**, u těhotné ženy ve věku 35–39 let je pravděpodobnost narození dítěte s Downovým syndromem cca **1:200**.

## Triple test a jeho výsledky

Triple test je vyšetření krevního séra na hodnoty choriogonadotropinu, estriolu a alfa-fetoproteinu. Provádí se v druhém trimestru těhotenství a má sloužit k detekci rizik genetických poruch a poruch vývoje nervové trubice.

Detekuje poruchy s úspěšností **70%** a naopak **5%** zdravých případů rozpozná jako porušené. Budoucím matkám, u kterých triple test ukáže zvýšené riziko vad plodu, je obvykle doporučeno nějaké další zpřesňující vyšetření, například amniocentéza (odběr plodové vody). Uvádí se, že u těhotné ženy ve věku 20–24 let je pravděpodobnost narození dítěte s Downovým syndromem cca **1:1500**, u těhotné ženy ve věku 35–39 let je pravděpodobnost narození dítěte s Downovým syndromem cca **1:200**.

Prozkoumejme (alespoň z matematického hlediska) význam provádění tohoto testu za uvedených předpokladů, kdy se rodí cca 100 tis. dětí ročně, z toho cca 10% ženám ve věku 35–39 let a cca 12% ženám ve věku 20–24 let.



# Specifičnost a senzitivita (citlivost) testu

<b>Triple test</b>	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost
Test pozitivní	70%	5%
Test negativní	30%	95%
	Senzitivita	Specifičnost

Za dříve uvedených předpokladů snadno vypočteme, že pravděpodobnost, že dítě „starší“ matky bude skutečně postiženo Downovým syndromem, pokud vyšel pozitivní test, je pouhých cca 6,6%. U mladých žen se pak tato pravděpodobnost pohybuje kolem 0,9% a je tedy na zváženu, zda toto plošné testování v dané věkové skupině provádět, pokud navíc uváděné riziko potratu při případné amniocentéze se rovněž pohybuje kolem jednoho promile.

Evidentně prostý výběr náhodné osoby a použití jediného testu, byť velmi citlivého a specifického, nejsou vhodné ani na otestování skutečného stavu populace, ani na preventivní vyšetření jednotlivců, pokud nemáme další podpůrné informace a lepší nástroje.

Evidentně prostý výběr náhodné osoby a použití jediného testu, byť velmi citlivého a specifického, nejsou vhodné ani na otestování skutečného stavu populace, ani na preventivní vyšetření jednotlivců, pokud nemáme další podpůrné informace a lepší nástroje. Právě matematická statistika dává nástroje na kvalifikovanější postupy v medicínské i průmyslové diagnostice, ekonomických modelech, vyhodnocování experimentálních dat atd.

# Plán přednášky

- 1 Pravděpodobnost nebo statistika?
- 2 Pravděpodobnost
- 3 Náhodné veličiny



Vraťme se k jednoduchému a názornému příkladu statistik kolem výsledků studentů v daném předmětu, který je a není podobný klasické pravděpodobnosti a s ní související statistice při házení kostkou.

Vraťme se k jednoduchému a názornému příkladu statistik kolem výsledků studentů v daném předmětu, který je a není podobný klasické pravděpodobnosti a s ní související statistice při házení kostkou.

Na jedné straně jsme připustili pouze konečný počet možných bodových hodnocení (celá čísla od 0 do 30), zároveň ale není patrně vhodné představovat si výsledky jednotlivých studentů jako analogii nezávislého házení kostkou (to by byla skutečně divně vedená přednáška).

Vraťme se k jednoduchému a názornému příkladu statistik kolem výsledků studentů v daném předmětu, který je a není podobný klasické pravděpodobnosti a s ní související statistice při házení kostkou.

Na jedné straně jsme připustili pouze konečný počet možných bodových hodnocení (celá čísla od 0 do 30), zároveň ale není patrně vhodné představovat si výsledky jednotlivých studentů jako analogii nezávislého házení kostkou (to by byla skutečně divně vedená přednáška).

Místo toho máme na základním prostoru  $\Omega$  všech studentů definovanou funkci bodového ohodnocení  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Je to typický příklad **náhodné veličiny**.

U každé náhodné veličiny potřebujeme umět pracovat s vhodnou množinou jevů. Zpravidla požadujeme, abychom mohli pracovat s pravděpodobnostmi příslušnosti hodnoty  $X$  do předem zadaného intervalu.

Přirozenější interpretací výsledku pokusu je totiž často spíše než zjištění, zda náhodný jev *nastal* či *nenastal*, nějaká hodnota:

- součet bodů na dvou kostkách,

Přirozenější interpretací výsledku pokusu je totiž často spíše než zjištění, zda náhodný jev *nastal* či *nenastal*, nějaká hodnota:

- součet bodů na dvou kostkách,
- počet bakterií v daném množství roztoku nebo

Přirozenější interpretací výsledku pokusu je totiž často spíše než zjištění, zda náhodný jev *nastal* či *nenastal*, nějaká hodnota:

- součet bodů na dvou kostkách,
- počet bakterií v daném množství roztoku nebo
- počet studentů, kteří uspěli u zkoušky nebo kteří získali alespoň 5 bodů z konkrétního příkladu.

Přirozenější interpretací výsledku pokusu je totiž často spíše než zjištění, zda náhodný jev *nastal* či *nenastal*, nějaká hodnota:

- součet bodů na dvou kostkách,
- počet bakterií v daném množství roztoku nebo
- počet studentů, kteří uspěli u zkoušky nebo kteří získali alespoň 5 bodů z konkrétního příkladu.

Přirozenější interpretací výsledku pokusu je totiž často spíše než zjištění, zda náhodný jev *nastal* či *nenastal*, nějaká hodnota:

- součet bodů na dvou kostkách,
- počet bakterií v daném množství roztoku nebo
- počet studentů, kteří uspěli u zkoušky nebo kteří získali alespoň 5 bodů z konkrétního příkladu.

Od pravděpodobnostního prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  tedy potřebujeme přejít k obdobné dvojici  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  tak, abychom podmnožinám  $\mathbb{R}$ , ležícím v  $\sigma$ -algebře  $\mathcal{B}$  byli schopni přiřadit pravděpodobnost odvozenou z  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .



Na prostoru  $\mathbb{R}^k$  uvažujme nejmenší jevové pole  $\mathcal{B}$  obsahující všechny  $k$ -rozměrné intervaly. Množinám v  $\mathcal{B}$  říkáme **borelovské množiny** (nebo také měřitelné množiny) na  $\mathbb{R}^k$ .

Na prostoru  $\mathbb{R}^k$  uvažujme nejmenší jevové pole  $\mathcal{B}$  obsahující všechny  $k$ -rozměrné intervaly. Množinám v  $\mathcal{B}$  říkáme **borelovské množiny** (nebo také měřitelné množiny) na  $\mathbb{R}^k$ .

Speciálně pro  $k = 1$  jde o množiny, které obdržíme **z intervalů konečnými průniky a nejvýše spočetnými sjednoceními**.

Na prostoru  $\mathbb{R}^k$  uvažujme nejmenší jevové pole  $\mathcal{B}$  obsahující všechny  $k$ -rozměrné intervaly. Množinám v  $\mathcal{B}$  říkáme **borelovské množiny** (nebo také měřitelné množiny) na  $\mathbb{R}^k$ .

Speciálně pro  $k = 1$  jde o množiny, které obdržíme z **intervalů konečnými průniky a nejvýše spočetnými sjednoceními**.

## Definice

**Náhodná veličina**  $X$  na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je taková funkce  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , že vzor  $X^{-1}(B)$  patří do  $\mathcal{A}$  pro každou Borelovskou množinu  $B \in \mathcal{B}$  na  $\mathbb{R}$  (tj.  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  je tzv. borelovsky měřitelná).

Množinová funkce

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

se nazývá **rozdělení pravděpodobnosti** náhodné veličiny  $X$ .

Na prostoru  $\mathbb{R}^k$  uvažujme nejmenší jevové pole  $\mathcal{B}$  obsahující všechny  $k$ -rozměrné intervaly. Množinám v  $\mathcal{B}$  říkáme **borelovské množiny** (nebo také měřitelné množiny) na  $\mathbb{R}^k$ .

Speciálně pro  $k = 1$  jde o množiny, které obdržíme z **intervalů konečnými průniky a nejvýše spočetnými sjednoceními**.

## Definice

**Náhodná veličina**  $X$  na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je taková funkce  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , že vzor  $X^{-1}(B)$  patří do  $\mathcal{A}$  pro každou Borelovskou množinu  $B \in \mathcal{B}$  na  $\mathbb{R}$  (tj.  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  je tzv. borelovsky měřitelná).

Množinová funkce

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

se nazývá **rozdělení pravděpodobnosti** náhodné veličiny  $X$ .

**Náhodný vektor**  $(X_1, \dots, X_k)$  na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je  $k$ -tice náhodných veličin.

Definice náhodné veličiny zajišťuje, že pro všechny  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$  existuje pravděpodobnost  $P(a < X \leq b)$ , kde používáme stručné značení pro jev  $A = (\omega \in \Omega; a < X(\omega) \leq b)$ .

## Definice

**Distribuční funkcí** (*distribution, cumulative density function*) náhodné veličiny  $X$  je funkce  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná pro všechny  $x \in \mathbb{R}$  vztahem

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Definice náhodné veličiny zajišťuje, že pro všechny  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$  existuje pravděpodobnost  $P(a < X \leq b)$ , kde používáme stručné značení pro jev  $A = (\omega \in \Omega; a < X(\omega) \leq b)$ .

## Definice

**Distribuční funkcí** (*distribution, cumulative density function*) náhodné veličiny  $X$  je funkce  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná pro všechny  $x \in \mathbb{R}$  vztahem

$$F(x) = P(X \leq x).$$

**Distribuční funkcí** náhodného vektoru  $(X_1, \dots, X_k)$  je funkce  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná pro všechny  $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$  vztahem

$$F(x) = P(X_1 \leq x_1 \wedge \dots \wedge X_k \leq x_k).$$

# Diskrétní náhodné veličiny

Předpokládejme, že náhodná veličina  $X$  na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  nabývá jen konečně mnoha hodnot  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Pak existuje tzv. **pravděpodobnostní funkce**  $f(x)$  taková, že

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) & \text{pro } x = x_i \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Evidentně  $\sum_{i=1}^n f(x_i) = 1$ .

# Diskrétní náhodné veličiny

Předpokládejme, že náhodná veličina  $X$  na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  nabývá jen konečně mnoha hodnot  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Pak existuje tzv. **pravděpodobnostní funkce**  $f(x)$  taková, že

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) & \text{pro } x = x_i \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Evidentně  $\sum_{i=1}^n f(x_i) = 1$ .

Takové náhodné veličině se říká **diskrétní**.



# Diskrétní náhodné veličiny

Předpokládejme, že náhodná veličina  $X$  na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  nabývá jen konečně mnoha hodnot  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Pak existuje tzv. **pravděpodobnostní funkce**  $f(x)$  taková, že

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) & \text{pro } x = x_i \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Evidentně  $\sum_{i=1}^n f(x_i) = 1$ .

Takové náhodné veličině se říká **diskrétní**.

Každá náhodná veličina definovaná pro klasickou pravděpodobnost je diskrétní.

# Diskrétní náhodné veličiny

Předpokládejme, že náhodná veličina  $X$  na pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  nabývá jen konečně mnoha hodnot  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Pak existuje tzv. **pravděpodobnostní funkce**  $f(x)$  taková, že

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) & \text{pro } x = x_i \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Evidentně  $\sum_{i=1}^n f(x_i) = 1$ .

Takové náhodné veličině se říká **diskrétní**.

Každá náhodná veličina definovaná pro klasickou pravděpodobnost je diskrétní. Obdobně lze definici pravděpodobnostní funkce rozšířit na veličiny se **spočetně** mnoha hodnotami (pracujeme pak navíc s nekonečnými řadami).

# Spojité náhodné veličiny

I když hodnoty náhodné veličiny  $X$  nejsou diskrétní, můžeme postupovat podobně s užitím ideí diferenciálního a integrálního počtu. Intuitivně lze uvažovat takto: **hustotu**  $f(x)$  **pravděpodobnosti** pro  $X$  si představíme jako

$$P(x < X \leq x + dx) = f(x)dx.$$

# Spojité náhodné veličiny

I když hodnoty náhodné veličiny  $X$  nejsou diskrétní, můžeme postupovat podobně s užitím ideí diferenciálního a integrálního počtu. Intuitivně lze uvažovat takto: **hustotu**  $f(x)$  **pravděpodobnosti** pro  $X$  si představíme jako

$$P(x < X \leq x + dx) = f(x)dx.$$

To znamená, že chceme pro  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx. \quad (*)$$

# Spojité náhodné veličiny

I když hodnoty náhodné veličiny  $X$  nejsou diskrétní, můžeme postupovat podobně s užitím ideí diferenciálního a integrálního počtu. Intuitivně lze uvažovat takto: **hustotu**  $f(x)$  **pravděpodobnosti** pro  $X$  si představíme jako

$$P(x < X \leq x + dx) = f(x)dx.$$

To znamená, že chceme pro  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx. \quad (*)$$

## Definice

Náhodná veličina  $X$ , pro kterou existuje její **hustota pravděpodobnosti** splňující (\*), se nazývá **spojitá**.

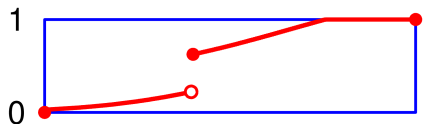
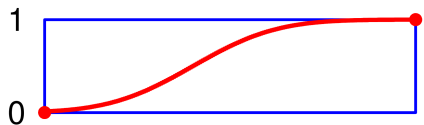
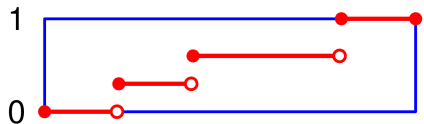
# Vlastnosti distribuční funkce

## Věta

*Nechť  $X$  je náhodná veličina,  $F(x)$  je její distribuční funkce.*

- 1  *$F$  je neklesající.*
- 2  *$F$  je zprava spojitá,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  a  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ .*
- 3 *Je-li  $X$  diskrétní s hodnotami  $x_1, \dots, x_n$ , pak je  $F(x)$  po částech konstantní,  $F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$  a  $F(x) = 1$  kdykoliv  $x \geq x_n$ .*
- 4 *Je-li  $X$  spojitá, pak je  $F(x)$  diferencovatelná a její derivace se rovná hustotě  $X$ , tj. platí  $F'(x) = f(x)$ .*

# Distribuční funkce



Obdobně definujeme distribuční funkce a hustotu a pravděpodobnostní funkci pro spojité a diskrétní náhodné **vektory**. Hovoříme také o **simultánních pravděpodobnostních funkcích a hustotách**.



Obdobně definujeme distribuční funkce a hustotu a pravděpodobnostní funkci pro spojité a diskrétní náhodné **vektory**. Hovoříme také o **simultánních pravděpodobnostních funkcích a hustotách**.

Pro dvě proměnné (vektor  $(X, Y)$  náhodných veličin):

$$f(x, y) = \begin{cases} P(X = x_i \wedge Y = y_j) & x = x_i \wedge y = y_j \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

u diskrétních a pro všechny  $a, b \in \mathbb{R}$  pro spojité:

$$P(-\infty < X \leq b, -\infty < Y \leq a) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f(x, y) dx dy.$$

Obdobně definujeme distribuční funkce a hustotu a pravděpodobnostní funkci pro spojité a diskrétní náhodné **vektory**. Hovoříme také o **simultánních pravděpodobnostních funkcích a hustotách**.

Pro dvě proměnné (vektor  $(X, Y)$  náhodných veličin):

$$f(x, y) = \begin{cases} P(X = x_i \wedge Y = y_i) & x = x_i \wedge y = y_i \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

u diskrétních a pro všechny  $a, b \in \mathbb{R}$  pro spojité:

$$P(-\infty < X \leq b, -\infty < Y \leq a) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f(x, y) dx dy.$$

**Marginální rozložení** pro jednu z proměnných obdržíme tak, že přes ostatní posčítáme nebo zintegrujeme.

Obdobně definujeme distribuční funkce a hustotu a pravděpodobnostní funkci pro spojité a diskrétní náhodné **vektory**. Hovoříme také o **simultánních pravděpodobnostních funkcích a hustotách**.

Pro dvě proměnné (vektor  $(X, Y)$  náhodných veličin):

$$f(x, y) = \begin{cases} P(X = x_i \wedge Y = y_j) & x = x_i \wedge y = y_j \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

u diskrétních a pro všechny  $a, b \in \mathbb{R}$  pro spojité:

$$P(-\infty < X \leq b, -\infty < Y \leq a) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f(x, y) dx dy.$$

**Marginální rozložení** pro jednu z proměnných obdržíme tak, že přes ostatní počítáme nebo zintegrujeme.

Náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  jsou **stochasticky nezávislé**, jestliže je jejich simultánní distribuční funkce

$$F(x, y) = G(x) \cdot H(y)$$

kde  $F$  a  $G$  jsou distribuční funkce veličin  $X$  a  $Y$ .