Skupina 4

Príklad 1

$x^3 - 6x^2 + 13x - 10$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 13$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 10$$

$$-\frac{1}{2x_1} - \frac{1}{2x_2} - \frac{1}{2x_3} = -\frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{2x_1x_2x_3} = -\frac{13}{20}$$

$$\left(-\frac{1}{2x_1}\right)\left(-\frac{1}{2x_2}\right) + \left(-\frac{1}{2x_2}\right)\left(-\frac{1}{2x_3}\right) + \left(-\frac{1}{2x_1}\right)\left(-\frac{1}{2x_3}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x_3 + x_1 + x_2}{x_1x_2x_3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{10} = \frac{3}{20}$$

$$\left(-\frac{1}{2x_1}\right)\left(-\frac{1}{2x_2}\right)\left(-\frac{1}{2x_3}\right) = -\frac{1}{8x_1x_2x_3} = -\frac{1}{80}$$

$$g(x) = x^3 + \frac{13}{20}x^2 + \frac{3}{20}x + \frac{1}{80}$$

Príklad 2

$$(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 2) : (x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 2) = 1$$
$$\underline{-(x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 2)}$$
$$x^3 + x^2 - x$$

$$(x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 2) : (x^3 + x^2 - x) = x$$
$$\underline{-(x^4 + x^3 - x^2)}$$
$$2x^2 + 2x - 2$$

$$(x^3 + x^2 - x) : (x^2 + x - 1) = x$$
$$-(x^3 + x^2 - x)$$
$$0$$

$$\Rightarrow (f, g) = x^2 + x - 1$$

$$(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 2) : (x^2 + x - 1) = x^2 + x + 2$$
$$\underline{-(x^4 + x^3 - x^2)}$$
$$x^3 + 3x^2 + x - 2$$
$$-(x^3 + x^2 - x)$$
$$2x^2 + 2x - 2$$

$\Rightarrow f$ má kořeny $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ a $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$

$$(x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 2) : (x^2 + x - 1) = x^2 + 2$$
$$-(x^4 + x^3 - x^2)$$
$$2x^2 + 2x - 2$$

g má kořeny $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ a $\pm i\sqrt{2}$

Príklad 3

a) $\Leftarrow$ Nech G je komutatívna, $x,y \in G$

$\varphi(x*y) = (x*y, x*y*x*y) = (x*y, x*x*y*y)$

$\varphi(x)*\varphi(y) = (x, x*x)*(y, y*y) = (x*y, x*x*y*y)$

$\Rightarrow$ Nech φ je homomorfizmus, $x,y \in G$. Potom

$\varphi(x*y) = (x*y, x*y*x*y)$

$\varphi(x)*\varphi(y) = (x*y, x*x*y*y)$ $\Rightarrow x*y*x*y = x*x*y*y$

$\Rightarrow$ vynásobíme zľava x^{-1} a sprava y^{-1} a dostaneme

$y*x = x*y$

b) $a = (1,2)$

$b = (2,3)$

$\varphi(a*b) = \varphi(1,2,3) = ((1,2,3),(1,3,2))$

$\varphi(a)*\varphi(b) = ((1,2), id)*((2,3), id) = ((1,2,3), id)$

Príklad 4

a) pre $\forall m>2$ platí, že $(m, m-1) = 1$ a teda $m-1 \in \mathbb{Z}_m^\times$. Ale $m-1 \equiv -1\ (m) \Rightarrow ord[m-1]_m = 2$

b) $\mathbb{Z}_{24}^\times = \{[1]_{24}, [5]_{24}, [7]_{24}, [11]_{24}, [13]_{24}, [17]_{24}, [19]_{24}, [23]_{24}\}$

$ord\,[1]_{24} = 1$

$ord\,[5]_{24} = 2$

$ord\,[7]_{24} = 2$

$ord\,[11]_{24} = 2$

$ord\,[13]_{24} = 2$ $\Rightarrow$ grupa nie je cyklická

$ord\,[17]_{24} = 2$

$ord\,[19]_{24} = 2$

$ord\,[23]_{24} = 2$

Skupina 3

Příklad 1 $x^3-4x^2+3x-12$

$$x_1+x_2+x_3=4$$
$$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=3$$
$$x_1x_2x_3=12$$
$$-\tfrac{1}{2}x_1-\tfrac{1}{2}x_2-\tfrac{1}{2}x_3=-\tfrac{1}{2}(x_1+x_2+x_3)=-\tfrac{1}{2}\cdot 4=-2$$
$$\left(-\tfrac{1}{2}x_1\right)\left(-\tfrac{1}{2}x_2\right)+\left(-\tfrac{1}{2}x_1\right)\left(-\tfrac{1}{2}x_3\right)+\left(-\tfrac{1}{2}x_2\right)\left(-\tfrac{1}{2}x_3\right)=\tfrac{1}{4}(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=\tfrac{1}{4}\cdot 3=\tfrac{3}{4}$$
$$\left(-\tfrac{1}{2}x_1\right)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}x_2\right)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}x_3\right)=-\tfrac{1}{8}x_1x_2x_3=-\tfrac{1}{8}\cdot 12=-\tfrac{12}{8}=-\tfrac{3}{2}$$
$$\Rightarrow g(x)=x^3+2x^2+\tfrac{3}{4}x+\tfrac{3}{2}$$

Příklad 2 $f(x)=x^4+4x^3+10x^2+12x+9$

$$f'(x)=4x^3+12x^2+20x+12$$
$$\tfrac{1}{4}f'(x)=x^3+3x^2+5x+3$$
$$(x^4+4x^3+10x^2+12x+9):(x^3+3x^2+5x+3)=x+1$$
$$\frac{-(x^4+3x^3+5x^2+3x)}{x^3+5x^2+9x+9}$$
$$\frac{-(x^3+3x^2+5x+3)}{2x^2+4x+6}$$
$$(x^3+3x^2+5x+3):(x^2+2x+3)=x+1$$
$$\frac{-(x^3+2x^2+3x)}{x^2+2x+3}$$
$$\frac{-(x^2+2x+3)}{0}$$

$\Rightarrow$ f má dva dvojnásobné kořeny a $k=\frac{-2\pm i\sqrt{8}}{2}=-1\pm i\sqrt{2}$

Příklad 3

a) "$\Leftarrow$" Nechť G je komutativní, $x,y\in G$. Potom

$$\varphi(x*y)=x*y*x*y=x*x*y*y$$
$$\varphi(x)*\varphi(y)=x*x*y*y$$

"$\Rightarrow$" Nechť φ je homomorfismus. Nechť $x,y\in G$. Potom $\varphi(x*y)=\varphi(x)*\varphi(y)\Rightarrow x*y*x*y=x*x*y*y$. Vynásobíme zprava y^{-1} a zleva x^{-1} a dostaneme $y*x=x*y\Rightarrow G$ je komutativní

b) Mějme $a = (1,2)$, $b = (2,3) \in S_3$

Pak: $\varphi(a * b) = \varphi(1,2,3) = (1,2,3)\circ(1,2,3) = (1,3,2)$

$\varphi(a) * \varphi(b) = (1,2)\circ(1,2)\circ(2,3)\circ(2,3) = id$

Příklad 4

a) $|\mathbb{Z}_m^\times| = \varphi_m$

$\varphi(294) = \varphi(2\cdot 3\cdot 7^2) = 84$

b) $\mathbb{Z}_{14}^\times = \{[1]_{14}, [3]_{14}, [5]_{14}, [9]_{14}, [11]_{14}, [13]_{14}\}$

$ord[1]_{14} = 1$

$3\cdot 3 = 9 \equiv -5;\ (-5)\cdot 3 \equiv -15 \equiv -1\ (6) \Rightarrow ord[3]_{14} = 6$

$5\cdot 5 = 25 \equiv -3;\ -3\cdot 5 \equiv -15 \equiv -1\ (6) \Rightarrow ord[5]_{14} = 6$

$(\overset{9}{-5})\cdot(-5) = 25 \equiv -3,\ (-3)\cdot(-5) \equiv 15 \equiv 1 \Rightarrow ord[9]_{14} = 3$

$(-3)\cdot(-3) \equiv 9 \equiv -5,\ (-5)(-3) \equiv 15 \equiv 1 \Rightarrow ord[11]_{14} = 3$

$ord[13]_{14} = 2$

$\Rightarrow$ cyklická grupa s generátory $[3]_{14}$ a $[5]_{14}$

Skupina 2

1. příklad $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 12$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -5$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -12$$

$$-\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} = \frac{-(x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2)}{x_1x_2x_3} = \frac{-(-5)}{-12} = -\frac{5}{12}$$

$$\left(-\frac{1}{x_1}\right)\left(-\frac{1}{x_2}\right) + \left(-\frac{1}{x_1}\right)\left(-\frac{1}{x_3}\right) + \left(-\frac{1}{x_2}\right)\left(-\frac{1}{x_3}\right) = \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2x_3} = \frac{x_3 + x_2 + x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6}$$

$$\left(-\frac{1}{x_1}\right)\left(-\frac{1}{x_2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x_3}\right) = -\frac{1}{x_1x_2x_3} = -\frac{1}{-12} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow g(x) = x^3 + \frac{5}{12}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{12}$$

2. příklad

$$(x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2) : (x^4 + 2x^3 + x^2 - 1) = 1$$
$$-(x^4 + 2x^3 + x^2 - 1)$$
$$-x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$

$$(x^4 + 2x^3 + x^2 - 1) : (x^3 - 2x^2 - 2x - 3) = x + 4$$
$$-(x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 3x)$$
$$4x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$
$$-(4x^3 - 8x^2 - 8x - 12)$$
$$11x^2 + 11x + 11$$

$$(x^3 - 2x^2 - 2x - 3) : (x^2 + x + 1) = x - 3$$
$$-(x^3 + x^2 + x)$$
$$-3x^2 - 3x - 3$$
$$-(-3x^2 - 3x - 3)$$
$$0$$

$$(x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2) : (x^2 + x + 1) = x^2 + 2$$
$$-(x^4 + x^3 + x^2)$$
$$2x^2 + 2x + 2$$

$$\Downarrow$$

f má kořeny $\pm i\sqrt{2}$, $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$$(x^4 + 2x^3 + x^2 - 1) : (x^2 + x + 1) = x^2 + x - 1$$
$$-(x^4 + x^3 + x^2)$$
$$x^3 - 1$$

g má kořeny $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Příklad 3

a) $x, y \in G \Rightarrow \varphi(x * y) = a * x * y * a^{-1}$

$\varphi(x) * \varphi(y) = a * x * (a^{-1} * a) * y * a^{-1} = a * x * y * a^{-1}$

$\Rightarrow$ homomorfismus

Jádro $\varphi(x) = e_G$

$a x a^{-1} = e_G \quad / \cdot a^{-1}$

$x a^{-1} = a^{-1} \quad / a$

$x = e_G \Rightarrow \text{Ker}\,\varphi = \{e_G\} \Rightarrow$ INJEKTIVNÍ

Nechť $x \in G$. Hledejme $y \in G$ tak, aby

$\varphi(y) = x$

$a y a^{-1} = x$

$y = a^{-1} x a \Rightarrow$ každý prvek má svůj vzor

$\Rightarrow$ surjektivní $\Rightarrow$

$\text{Im}\,\varphi = G$

b) $\varphi((1,4,6,7,5)) = (1,2,3) \circ (8,5,6,7) \circ (1,4,6,7,5) \circ (1,3,2) \circ (8,7,6,5) =$

$= (2,4,7,8,6)$

Příklad 4

$|\mathbb{Z}_m^\times \times \mathbb{Z}_n^\times| = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$

$\varphi(36) = 12$

$\varphi(50) = 20$

$\Rightarrow |\mathbb{Z}_{36}^\times \times \mathbb{Z}_{50}^\times| = 240$

$\mathbb{Z}_3^\times \times \mathbb{Z}_4^\times \cong \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3)\}$

ord $(1,1) = 1$

ord $(1,3) = 2 \quad \Rightarrow$ Není cyklická

ord $(2,1) = 2$

ord $(2,3) = 2$

Skupina 1

1 příklad $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7x - 4$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 7$$
$$x_1x_2x_3 = 4$$

$$-3x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -3(x_1 + x_2 + x_3) = -3 \cdot 6 = -18$$
$$(-3x_1)(-3x_2) + (-3x_1)(-3x_3) + (-3x_2)(-3x_3) = 9(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = 9 \cdot 7 = 63$$
$$(-3x_1)(-3x_2)(-3x_3) = -27x_1x_2x_3 = -27 \cdot 4 = -108$$
$$\Rightarrow \underline{g(x) = x^3 + 18x^2 + 63x + 108}$$

2 příklad $f(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$

$$f'(x) = 4x^3 + 18x^2 + 14x - 6$$
$$\tfrac{1}{2}f'(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 3$$

$$(2x^4 + 12x^3 + 14x^2 - 12x + 2) : (2x^3 + 9x^2 + 7x - 3) = x + \tfrac{3}{2}$$
$$\underline{-(2x^4 + 9x^3 + 7x^2 - 3x)}$$
$$3x^3 + 7x^2 - 9x + 2$$
$$\underline{-(3x^3 + \tfrac{27}{2}x^2 + \tfrac{21}{2}x - \tfrac{9}{2})}$$
$$-\tfrac{13}{2}x^2 - \tfrac{39}{2}x + \tfrac{13}{2}$$

$$(2x^3 + 9x^2 + 7x - 3) : (x^2 + 3x - 1) = 2x + 3$$
$$\underline{-(2x^3 + 6x^2 - 2x)}$$
$$3x^2 + 9x - 3$$
$$\underline{3x^2 + 9x - 3}$$
$$0$$

$$\Rightarrow (f, f') = x^2 + 3x - 1$$
$$(f, f') = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$\Rightarrow f$ má dva dvojnásobné kořeny a to $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ a $-\frac{3-\sqrt{13}}{2}$

3. příklad

a) "$\Leftarrow$" Nechť je G komutativní, nechť $x, y, a, b \in G$. Potom

$$\varphi((x,y) * (a,b)) = \varphi((x * a, y * b)) = x * a * y * b \stackrel{kom.}{=} x * y * a * b$$
$$\varphi((x,y)) * \varphi((a,b)) = x * y * a * b \qquad \Rightarrow \varphi \text{ je homomorfismus}$$

"$\Rightarrow$" Nechť φ je homomorfismus. Potom $\varphi((x,y) * (x,y)) = \varphi((x,y)) * \varphi((x,y)) \Rightarrow$

$\Rightarrow x * x * y * y = x * y * x * y$. Pokud obě strany vynásobíme zleva x^{-1} a zprava y^{-1}, dostaneme $x * y \stackrel{!}{=} y * x \Rightarrow G$ je komutativní!

b) $G = S_3$

$a = ((1,2), (2,3))$

$b = ((1,2,3); (1,3,2))$

$\varphi(a * b) = (1,2) \circ (1,2,3) \circ (2,3) \circ (1,3,2) = (1,3,2)$

$\varphi(a) * \varphi(b) = (1,2) \circ (2,3) \circ (1,2,3) \circ (1,3,2) = (1,2,3)$

4. příklad

a) $|\mathbb{Z}_m^\times| = \varphi(m)$

$375 = 3 \cdot 5^3$

$\varphi(375) = 2 \cdot 4 \cdot 25 = 200$

b) $\mathbb{Z}_{12}^\times = \{[1]_{12}, [5]_{12}, [7]_{12}, [11]_{12}\}$

$\operatorname{ord} [1]_{12} = 1$

$\operatorname{ord} [5]_{12} = 2 \quad (5 \cdot 5 \equiv 1 (12))$

$\operatorname{ord} [7]_{12} = 2 \quad (7 \cdot 7 \equiv 1 (12))$

$\operatorname{ord} [11]_{12} = 2 \quad (11 \cdot 11 \equiv 1 (12))$ $\Rightarrow$ grupa není cyklická