

Jméno:

Skupina: A

Místnost:

1. zkouška


příklad

učo

body

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Náhodné veličiny (8 bodů):

Příklad 1

- (a) Zapište definici střední hodnoty spojitě náhodné veličiny. (1)
- (b) Dokažte přímo z definice, že  $E(a + bX) = a + bE(X)$  pro  $a, b \in \mathbb{R}$  a spojitou náhodnou veličinu  $X$ . (1)
- (c) Náhodná veličina  $X$  má hustotu  $f_X(x) = \frac{3}{x^4}$  pro  $x \in (1, \infty)$  a jinde nulovou. Určete její distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl. (3)
- (d) Hmotnost jedné porce kávy považujeme za náhodnou veličinu s normálním rozdělením  $N(6g; 1,196g^2)$ . Určete pravděpodobnost, že k přípravě 16 porcí kávy postačí jeden 100g balíček. (3)

Jméno:

Skupina: A

Místnost:

1. zkouška

0001

*příklad*

2

*učo**bodů*

0123456789

Polynomy (7 bodů):

Příklad 2

- (a) Určete počet kořenů polynomu  $x^n + 1$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  nad  
i)  $\mathbb{Z}$ , ii)  $\mathbb{R}$ , iii)  $\mathbb{C}$ . (2)
- (b) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) polynomu  $f \in \mathbb{Z}[x]$ ,  
který je ireducibilní nad  $\mathbb{Z}$  a přesto má celočíselný kořen. (1)
- (c) Určete všechny alespoň dvojnásobné kořeny polynomu  
 $x^7 + 7x^6 + 23x^5 + 45x^4 + 56x^3 + 44x^2 + 20x + 4$  v  $\mathbb{C}$ . (4)

Jméno:

Skupina: A

Místnost:

1. zkouška

0001

příklad

3

učo

body

0123456789

Grupy a jejich homomorfismy (5 bodů) :

**Příklad 3**

- (a) Udejte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) konečné nekomutativní grupy. (1)
- (b) Zapište všechny prvky grupy symetrií čtverce. (1)
- (c) Uveďte (a zdůvodněte) příklad netriviálního homomorfismu grupy  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$  do  $(\mathbb{R}, +)$ . (1)
- (d) Určete řády všech prvků v grupě  $(\mathbb{Z}_{18}^\times, \cdot)$ , rozhodněte, zda je tato grupa cyklická a v kladném případě uveďte nějaký generátor. (2)

Jméno:

Skupina: B

Místnost:

1. zkouška

0002

příklad

|

učo

body

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Náhodné veličiny (8 bodů):

Příklad 1

- (a) Zapište definici střední hodnoty diskrétní náhodné veličiny. (1)
- (b) Dokažte přímo z definice, že  $E(a + bX) = a + bE(X)$  pro  $a, b \in \mathbb{R}$  a diskrétní náhodnou veličinu  $X$ . (1)
- (c) Náhodná veličina  $X$  je dána pravděpodobnostní funkcí  $p(-3) = 1/6, p(2) = 1/3, p(3) = 1/2, p(x) = 0$  jinak. Určete distribuční funkci  $X$ ,  $E(X), E(2X + 5), E(X^2), D(X)$  a  $D(2X + 1)$ . (3)
- (d) Zformulujte Čebyševovu nerovnost a s její pomocí určete pravděpodobnost, že při 600 hodech regulérní kostkou padne šestka alespoň 80 krát a nejvýše 120 krát. (3)

Jméno:

Skupina: B

Místnost:

1. zkouška

0002

*příklad*

2

*učo**bodů*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Polynomy (7 bodů):

Příklad 2

- (a) Pro každý z okruhů  $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5$  (s obvyklými operacemi) rozhodněte (a stručně zdůvodněte), zda je okruh polynomů nad tímto okruhem i) obor integrity, ii) těleso. (2)
- (b) Vypište všechny polynomy stupně nejvýše 3 nad  $\mathbb{Z}_2$  a určete, které z nich jsou ireducibilní (zdůvodněte). (1)
- (c) Určete všechny racionální kořeny polynomu  $8x^5 + 50x^4 + 77x^3 - 63x^2 - 216x - 108$  a rozložte jej nad  $\mathbb{Z}$  na ireducibilní faktory. (4)

Jméno:

Skupina: B

Místnost:

1. zkouška

0002

*příklad*

3

*učo**body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Grupy a jejich homomorfismy (5 bodů) :

Příklad 3

- (a) Udejte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) prvku okruhu  $(\mathbb{Z}_{25}, +, \cdot)$ , který nemá inverzi. (1)
- (b) Popište všechny podgrupy grupy  $(\mathbb{Z}_{25}, +)$ . (1)
- (c) Popište všechny homomorfismy grupy  $(\mathbb{Z}_{25}, +)$  do grupy  $(\mathbb{Z}_{10}, +)$ . (1)
- (d) Vypočtěte  $[14]_{117}^{-1}$ . (2)

Jméno:

Skupina: C

Místnost:

1. zkouška

0003

příklad

|

učo

body

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Náhodné veličiny (8 bodů):

Příklad 1

- (a) Zapište definici rozptylu spojité náhodné veličiny. (1)
- (b) Dokažte, že pro rozptyl spojité náhodné veličiny platí  
 $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$ . (1)
- (c) Náhodná veličina  $X$  má hustotu  $f_X(x) = \frac{3}{x^4}$  pro  $x \in (1, \infty)$  a jinde nulovou. Určete její distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl. (3)
- (d) Hmotnost jedné porce kávy považujeme za náhodnou veličinu s normálním rozdělením  $N(3g; \frac{16}{9}g^2)$ . Určete pravděpodobnost, že k přípravě 16 porcí kávy postačí jeden 100g balíček. (3)

Jméno:

Skupina: C

Místnost:

1. zkouška

0003

příklad

2

učo

body

0123456789

Polynomy (7 bodů):

Příklad 2

- (a) Určete počet kořenů polynomu  $x^n - 2$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  nad  
i)  $\mathbb{Q}$ , ii)  $\mathbb{R}$ , iii)  $\mathbb{C}$ . (2)
- (b) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) polynomu  $f \in \mathbb{Z}[x]$ ,  
který není ireducibilní nad  $\mathbb{Z}$  a přesto nemá celočíselný kořen. (1)
- (c) Určete všechny alespoň dvojnásobné kořeny polynomu  
 $x^7 - 7x^6 + 23x^5 - 45x^4 + 56x^3 - 44x^2 + 20x - 4$ . (4)



Jméno:

Skupina: C

Místnost:

1. zkouška

0003

*příklad*

3

*učo**body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Grupy a jejich homomorfismy (5 bodů) :

Příklad 3

- (a) Udejte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) nekonečné nekomutativní grupy. (1)
- (b) Zapište všechny podgrupy grupy všech permutací na tříprvkové množině. (1)
- (c) Uveďte (a zdůvodněte) příklad netriviálního homomorfismu grupy  $(\mathbb{R}, +)$  do  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ . (1)
- (d) Určete řády všech prvků v grupě  $(\mathbb{Z}_{14}^\times, \cdot)$ , rozhodněte, zda je tato grupa cyklická a v kladném případě uveďte nějaký generátor. (2)

Jméno:

Skupina: D

Místnost:

1. zkouška

0004

příklad

|

učo

body

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Náhodné veličiny (8 bodů):

Příklad 1

- (a) Zapište definici rozptylu diskrétní náhodné veličiny. (1)
- (b) Dokažte, že pro rozptyl diskrétní náhodné veličiny platí  
 $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$ . (1)
- (c) Náhodná veličina  $X$  je dána pravděpodobnostní funkcí  $p(-1) = 1/6$ ,  
 $p(1) = 1/3$ ,  $p(4) = 1/2$ ,  $p(x) = 0$  jinak. Určete distribuční funkci  $X$ ,  
 $E(X)$ ,  $E(-X + 1)$ ,  $E(X^2)$ ,  $D(X)$  a  $D(\frac{1}{2}X - 1)$ . (3)
- (d) S pomocí Moivre-Laplaceovy věty určete pravděpodobnost, že při 600  
hodech regulérní kostkou padne šestka alespoň 80 krát a nejvýše 120  
krát. (3)

Jméno:

Skupina: D

Místnost:

1. zkouška

0004

*příklad*

2

*učo**bodů*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Polynomy (7 bodů):

Příklad 2

- (a) Pro každý z okruhů  $\mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_6$  (s obvyklými operacemi) rozhodněte (a stručně zdůvodněte), zda je okruh polynomů nad tímto okruhem i) obor integrity, ii) těleso. (2)
- (b) Rozložte polynom  $x^4 - 2x^3 + x^2 + 3$  nad  $\mathbb{Z}$  na dva kvadratické ireducibilní faktory. (1)
- (c) Určete všechny racionální kořeny polynomu  $12x^5 + 88x^4 + 155x^3 + 69x^2 - 35x - 25$  a rozložte jej nad  $\mathbb{Z}$  na ireducibilní faktory. (4)

Jméno:

Skupina: D

Místnost:

1. zkouška

0004

*příklad*

3

*učo**body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Grupy a jejich homomorfismy (5 bodů) :

**Příklad 3**

- (a) Udejte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) prvku okruhu  $(\mathbb{Z}_{35}, +, \cdot)$ , který nemá inverzi. (1)
- (b) Popište všechny podgrupy grupy  $(\mathbb{Z}_{35}, +)$ . (1)
- (c) Popište všechny homomorfismy grupy  $(\mathbb{Z}_{35}, +)$  do grupy  $(\mathbb{Z}_{14}, +)$ . (1)
- (d) Vypočtěte  $[14]_{121}^{-1}$ . (2)