(A) **1.** a) $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_X(x)\,dx$, kde f_X je hustota n.v. X.

b) $E(a+bX)=\int_{-\infty}^{\infty}(a+bx)f_X(x)\,dx=a\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)\,dx+b\cdot\int_{-\infty}^{\infty}x\,f_X(x)\,dx=a\cdot 1+b\cdot E(X)$

c) $F_X(t)=\int_1^t \frac{3}{x^4}\,dx=\left[3\cdot\frac{x^{-3}}{-3}\right]_1^t=1-\frac{1}{t^3}$

$E(X)=\int_1^\infty x\cdot\frac{3}{x^4}\,dx=\left[3\cdot\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^\infty=0-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$

$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

neboť $E(X^2)=\int_1^\infty x^2\cdot\frac{3}{x^4}\,dx=\left[3\cdot\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^\infty=0-(-3)=3$

d) Chceme spočítat $P\left(\sum_{i=1}^{16}X_i\le 100\right)=P\left(\frac{1}{16}\sum X_i\le\frac{100}{16}\right)=P\left(M\le\frac{100}{16}\right)=$

$\mu=6g;\ \sigma^2=1{,}196g^2$ $\qquad =P\left(\frac{M-6}{\sigma/\sqrt{16}}\le\frac{\frac{100}{16}-6}{\sigma/\sqrt{16}}\right)=P\left(U\le\frac{1}{\sigma}\right)$,

neboť $M\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$ $\qquad$ kde $U\sim N(0,1)$

Hledaná P je rovna $P\left(U\le\frac{1}{\sigma}\right)=P(U\le 0{,}914)\approx P(U\le 0{,}91)\doteq 0{,}82$

Pravděpodobnost je cca 82%.

2. a) i) $2\nmid n$ jeden kořen $x=-1$; ii) ~~[illegible]~~ stejně jako v $\mathbb{Z}$ $\quad$ iii) n kořenů

$2\mid n$ žádný kořen

b) st. 1: $\underline{x},\ \underline{x+1}$; st. 2: $x^2,\ x^2+1,\ x^2+x,\ \underline{x^2+x+1}$, st. 3: $x^3,\ x^3+1,\ x^3+x,\ x^3+x^2$,
$\underline{x^3+x+1},\ \underline{x^3+x^2+1},\ x^3+x^2+x,\ x^3+x^2+x+1$

b) napr. $f(x)=x+1$ $\quad$ st. 4: $x^4,\ x^4+1,\ x^4+x,\ x^4+x^2,\ x^4+x^3,\ \underline{x^4+x+1},\ x^4+x^2+1,\ \underline{x^4+x^3+1}$
$x^4+x^2+x,\ x^4+x^3+x^2,\ x^4+x^3+x+1,\ x^4+x^3+x^2+1,\ \underline{x^4+x^3+x^2+x+1},\ x^4+x^2+x+1$
$x^4+x^3+x,\ x^4+x^3+x^2+x$
(Reducibilní st. 4 – buď má kořen 0 nebo 1, nebo je členem ired. stupně 2)

c) $f(x)=x^7+7x^6+23x^5+45x^4+56x^3+44x^2+20x+4$

$f'(x)=7x^6+42x^5+115x^4+180x^3+168x^2+88x+20$

Určíme (f,f')

$4(x^7+7x^6+23x^5+45x^4+56x^3+44x^2+20x+4):(7x^6+42x^5+115x^4+180x^3+168x^2+88x+20)=x+1$

$7x^6+46x^5+135x^4+224x^3+220x^2+120x+28$

zb. $\underline{4x^5+20x^4+44x^3+52x^2+32x+8}=4(x^5+5x^4+11x^3+13x^2+8x+2)$

$4(7x^6+42x^5+115x^4+180x^3+168x^2+88x+20):(4x^5+20x^4+44x^3+52x^2+32x+8)=7x+7$

zb. $12x^4+48x^3+84x^2+72x+24=12(x^4+4x^3+7x^2+6x+2)$

$(x^5+5x^4+11x^3+13x^2+8x+2):(x^4+4x^3+7x^2+6x+2)=x+1$
$-(x^5+4x^4+7x^3+6x^2+2x)$
$x^4+4x^3+7x^2+6x+2$ $\qquad$ zb. 0

Proto $g=(f,f') = x^4+4x^3+7x^2+6x+2$ (na ved. koef. nezáleží!)

Ten má kořen -1 (dvojnásobný), odkud

$g=(x+1)^2\cdot(x^2+2x+2)$, f má tedy trojnásobný kořen -1 a dvojnásobné kořeny $-1+i$, $-1-i$.

3,

a) např. $\Sigma_3 = S_3$, D_8 aj.

b) $D_8 = \{\underbrace{r, r^2, r^3=r^{-1}, r^4=id}_{\text{rotace}}, \mathrm{O}_{|}, \mathrm{O}_{-}, \mathrm{O}_{-}, \mathrm{O}_{/}\}$

c) $\log(a\cdot b) = \log a + \log b$ (pro $a,b\in\mathbb{R}^+$)

d) $(\mathbb{Z}_{36}^{\times},\cdot)$ ~~má $\varphi(36)=\varphi(4)\cdot\varphi(9)=12$ prvků~~

~~prvky 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 (25), 31, 35~~

~~řády 1 6 6 6 3 2 2~~

$(\mathbb{Z}_{18}^{\times},\cdot)$ má $\varphi(18)=6$ prvků 1, 5, 7, 11, 13, 17

řády 1 6 3 6 3 2 , je cyklická (generátory 5 nebo 11)

(B) 1. a) $E(X) = \sum_i x_i\, p(x_i)$, kde p je pravděpodobnostní funkce n. v. X

b) $E(a+bX) = \sum_i (a+b\cdot x_i)\, p(x_i) = a\cdot \sum_i p(x_i) + b\cdot \sum_i x_i\, p(x_i) =$
$= a\cdot 1 + b\cdot E(X)$

c) $p(-3) = \frac{1}{6}$, $p(2) = \frac{1}{3}$, $p(3) = \frac{1}{2}$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < -3 \\ \frac{1}{6} & \text{pro } t \in \langle -3, 2) \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t \in \langle 2, 3) \\ 1 & \text{pro } t \geq 3 \end{cases}$$

$E(X) = \frac{1}{6}\cdot(-3) + \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{-3+4+9}{6} = \frac{5}{3}$.

$E(2X+5) = 2E(X)+5 = \frac{25}{3}$

$E(X^2) = \frac{1}{6}\cdot 9 + \frac{1}{3}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 9 = \frac{9+8+27}{6} = \frac{22}{3}$

$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{22}{3} - \frac{25}{9} = \frac{41}{9}$

$D(2X+1) = 4\cdot D(X) = \frac{164}{9}$.

d) $P(|X - EX| \geq k\cdot\sigma) < \frac{1}{k^2}$, kde $k \in \mathbb{R}^+$, $\sigma = \sqrt{D(X)}$

$X \sim Bi(600, \frac{1}{6})$, $EX = 100$, $\sqrt{DX} = \sqrt{600\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{500}{6}}$

$P(|X-100| \leq 20) = 1 - P(|X-100| > 20) \geq 1 - \frac{DX}{20^2} = 1 - \frac{500/6}{400} = 1 - \frac{5}{24} = \frac{19}{24}$.

2. a) R obor integrity $\iff$ $R[x]$ obor integrity $\Rightarrow$ $R[x]$ o. i. $\iff R = \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_5$, ne $\mathbb{Z}_4$.
x nemá inverzi v $R[x]$ pro žádné R $\Rightarrow$ $R[x]$ není těleso pro $R = \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5$

b)
st. 1: x, $x+1$
st. 2: $\cancel{x^2}$, $\cancel{x^2+1}$, $\cancel{x^2+x}$, x^2+x+1
st. 3: $\cancel{x^3}$, $\cancel{x^3+1}$, $\cancel{x^3+x}$, $\cancel{x^3+x^2}$, x^3+x+1, x^3+x^2+1, $\cancel{x^3+x^2+x}$, $\cancel{x^3+x^2+x+1}$
f je ireducibilní polynom st ≤ 3 $\wedge$ st >1 $\iff$ f nemá kořen (0 nebo 1)

c) kořeny jsou $-2, -2, -3$

$x = \frac{p}{q}$, $(p,q) = 1$ $\Rightarrow$ $p \mid 108$, $q \mid 8$

	8	50	77	-63	-216	-108
-1	8	42	35	-98	-118	10
2	8	66	209	355	x	
-2	8	34	9	-81	-54	0
-2	8	18	-27	-27	0	
3	8	42	99	x		
-3	8	-6	-9	0		

$8x^2 - 6x - 9 = 0 \iff x = \frac{6 \pm \sqrt{36+36\cdot 8}}{16} = \frac{6 \pm 18}{16} = \begin{cases} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \end{cases}$

$(4x+3)(2x-3)(x+2)^2(x+3)$

15. 4. 2011 MB104 Matematika IV Čas: 100 minut

Jméno: Místnost: 2. vnitrosemestrální písemka

0000 list 5 učo body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

3. a) $[5]_{25}$

b) podgrupy $(\mathbb{Z}_{25}, +)$

$\{[0]\}$

$\langle [5] \rangle = \{5, 10, 15, 20, 0\}$

$\mathbb{Z}_{25}$

c) $\mathbb{Z}_{25} \to \mathbb{Z}_{10}$ $[1] \mapsto [a]$ takový, aby $25[a]_{10} = [0]_{10}$, tj. $5a \equiv 0\ (10)$, $a \equiv 0\ (2)$

Celkem 5 možností určených obrazem $[1]_{25} \mapsto [0]_{10}$

$[1] \mapsto [2]$, $[1] \mapsto [4]$, $[1] \mapsto [6]$, $[1] \mapsto [8]$

d) $14x \equiv 1\ (117)$

$14x \equiv 118\ (117)$

$7x \equiv 59\ (117)$

$7x \equiv -175\ (117)$

$x \equiv -25\ (117)$ $\Rightarrow$ $[14]_{117}^{-1} = [-25]_{117}$

Nebo Bezout-Euklidův algoritmus

Oblast strojově snímatelných informací, nezasahujte. ***Řešení pište jen na tuto stranu.***

C

1. a) $E\left(\left(X-E(x)\right)^2\right) \underset{\text{(není nutné)}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f_X(x)\,dx$, kde $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$

b) $D(X) = E(X-E(X))^2 = E\left((X-EX)(X-EX)\right) = E\left(X^2 - 2\cdot X\cdot EX + (EX)^2\right) =$
$= E(X^2) - 2EX\cdot EX + (EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2$

c) $F_X(t) = \int_1^t \frac{3}{x^4}dx = \left[3\cdot\frac{x^{-3}}{-3}\right]_1^t = 1 - \frac{1}{t^3}$

$E(X) = \int_1^{\infty} x\cdot\frac{3}{x^4}dx = \left[3\cdot\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^{\infty} = 0 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$

$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$,
neboť $E(X^2) = \int_1^{\infty} x^2 \frac{3}{x^4}dx = \left[3\cdot\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^{\infty} = 0-(-3) = 3.$

d) Chceme určit $P\left(\sum_{i=1}^{16} X_i \le 100\right) = P\left(\frac{1}{16}\sum X_i \le \frac{100}{16}\right) = P\left(M \le \frac{100}{16}\right) = P\left(\frac{M-3}{\sigma/\sqrt{16}} \le \frac{\frac{100}{16}-3}{\sigma/\sqrt{16}}\right)$

$\mu = 3g;\ \sigma^2 = \frac{16}{a}g^2$

$= P\left(U \le \frac{52/4}{\sigma}\right) = P\left(U \le \frac{156}{16}\right) \doteq 1.$

2. a) i) $n=1 \Rightarrow 1$, jinak 0 ii) n sudé $\Rightarrow 2$, n liché $\Rightarrow 1$ iii) n

b) např. $(x^2+1)^2$ nebo $(2x+1)^2$

c) $f(x) = x^7 - 7x^6 + 23x^5 - 45x^4 + 56x^3 - 44x^2 + 20x - 4$
$f'(x) = 7x^6 - 42x^5 + 115x^4 - 180x^3 + 168x^2 - 88x + 20$

$7\cdot f(x) : f'(x) = 7x^7 - 49x^6 + 161x^5 - 315x^4 + 392x^3 - 308x^2 + 140x - 28 : f'(x) = x - 1$
$-(x\cdot f'(x))$
$-7x^6 + 46x^5 - 135x^4 + 224x^3 - 220x^2 + 120x - 28$
$-(-1\cdot f'(x))$
$4x^5 - 20x^4 + 44x^3 - 52x^2 + 32x - 8 = 4(x^5 - 5x^4 + 11x^3 - 13x^2 + 8x - 2)$

$f'(x) : (x^5 - 5x^4 + 11x^3 - 13x^2 + 8x - 2) = 7x - 7$
$-7x^5 + 28x^4 - 89x^3 + 112x^2 - 74x + 20$
zb. $3x^4 - 12x^3 + 21x^2 - 18x + 6 = 3(x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2)$

$(x^5 - 5x^4 + 11x^3 - 13x^2 + 8x - 2) : (x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2) = x - 1$
$-(x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 2x)$
$-x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 6x - 2$
zb. 0

Odtud $(f, f') = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2$, ten má dvojnásobný kořen 1 a rozklad $(x-1)^2\cdot(x^2-2x+2)$, f má tedy trojnásobný kořen 1 a dvojnásobné kořeny $1+i, 1-i$.

Jméno: Místnost: 2. vnitrosemestrální písemka

0000 list 5 učo body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

3. a) Např. grupa permutací $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nebo $GL_n(\mathbb{R})$ apod.

b) $S_3 = \{id, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$

Podgrupy: $\{id\}, S_3, \langle(1,2)\rangle, \langle(1,3)\rangle, \langle(2,3)\rangle, \langle(1,2,3)\rangle,$

c) $\exp: (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$

$\exp(a) = e^a$; $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

d) $\mathbb{Z}_{14}^\times = \{1, 3, 5, 9, 11, 13\}$

řády 1 6 6 3 3 2

D 1.

a) $D(X) = E\left((X-EX)^2\right) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 p(x)$, kde $\mu = EX = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x p(x)$

není nutno

b) $D(X) = E\left((X-EX)^2\right) = E\left((X-EX)(X-EX)\right) = E\left(X^2 - 2\cdot X\cdot EX + (EX)^2\right) =$
$= E(X^2) - 2(EX)^2 + (EX)^2 = E(X^2) - E(X)^2$

c) $p(-1) = \frac{1}{6}$, $p(1) = \frac{1}{3}$, $p(4) = \frac{1}{2}$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ \frac{1}{6} & t \in \langle -1, 1) \\ \frac{1}{2} & t \in \langle 1, 4) \\ 1 & t \geq 4 \end{cases}$$

$E(X) = \frac{1}{6}\cdot(-1) + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 4 = \frac{-1+2+12}{6} = \frac{13}{6}$

$E(-X+1) = -E(X) + 1 = -\frac{7}{6}$

$E(X^2) = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 16 = \frac{17}{2}$

$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{17}{2} - \frac{169}{36} = \frac{137}{36}$

$D(\frac{1}{2}X - 1) = \frac{1}{4}D(X) = \frac{137}{144}$

d)

$X \sim Bi(600, \frac{1}{6})$ $\quad EX = 100 \quad DX = 600\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{500}{6}$

$P(|X-100| \leq 20) = P(-20 \leq X - 100 \leq 20) = P\left(\frac{-20}{\sqrt{\frac{500}{6}}} \leq \frac{X-100}{\sqrt{\frac{500}{6}}} \leq \frac{20}{\sqrt{\frac{500}{6}}}\right)$

$= P\left(\frac{-20}{10\sqrt{\frac{5}{6}}} \leq U \leq \frac{20}{10\sqrt{\frac{5}{6}}}\right) = 2\Phi\left(2\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}\right) - 1 = 2\Phi(2{,}19) - 1 = 2\cdot 0{,}98574 - 1 =$

$U \sim N(0,1)$ $\qquad \doteq 0{,}971.$

2.

a) i) R obor integrity $\Leftrightarrow$ $R[X]$ obor integrity
Tedy $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{Z}_3[X]$ jsou ob. int., $\mathbb{Z}_6[X]$ není

ii) x není invertibilní $\Rightarrow$ dělení to není pro žádné R

b) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 3 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ $\qquad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{aligned} bd &= 3 \\ ad + bc &= 0 \\ ac + b + d &= 1 \\ a + c &= -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} b = 1, d &= 3 \\ 3a + c &= 0 \\ ac &= -3 \\ a + c &= -2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a &= 1 \\ c &= -3 \end{aligned}$$

Rozklad f $\quad (x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 3)$.

c) kořeny jsou $-1, -1, -5, -\frac{5}{6}, \frac{1}{2}$; $x = \frac{p}{q}$ $(p,q) = 1$ $\Rightarrow$ $p \mid 25$, $q \mid 12$

	12	88	155	69	−35	−25	
−1	12	76	79	−10	−25	0	
−1	12	64	15	−25	0		
−1	12	52	−37	12			
−5	12	4	−5	0			

$12x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (6x+5)(2x-1)$

Jméno: **Místnost:** **2. vnitrosemestrální písemka**

0000 *list* 5 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

3. a) např. $[5]$ nebo $[7]$

b) podgrupy $\mathbb{Z}_{35}$: $\{0\}, \mathbb{Z}_{35}, \langle[5]\rangle, \langle[7]\rangle$

c) $f: \mathbb{Z}_{35} \to \mathbb{Z}_{14}$ určeno obrazem generátoru $[1]_{35} \mapsto [a]_{14}$ s omezením

$35 \cdot [a]_{14} = 35 \cdot f([1]) = f([35]) = f([0]) = [0]_{14}$, tj.

$35a \equiv 0 \ (14)$ Tj. a je lib. sudé! tedy $a \in \{0,2,4,6,8,10,12\}$

$5a \equiv 0 \ (2)$

$a \equiv 0 \ (2)$

d) $14x \equiv 1 \ (121)$

$14x \equiv 122 \ (121)$

$7x \equiv 61 \ (121)$

$7x \equiv 182 \ (121)$ $\quad [14]^{-1}_{121} = [26]_{121}$

$x \equiv 26 \ (121)$

Nebo Bezout-Euklidův algoritmus.