

4 27-14:04

Transformace náhodných veličin

Číselné charakteristiky náhodných veličin

Věta (de Moivre-Laplaceova)
 Pro náhodné veličiny X_n s rozdělením $Bi(n, p)$ platí $X_n \sim Bi(n, p)$
 $E(X_n) = np$
 $D(X_n) = np(1-p)$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[a < \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b \right] = \Phi(b) - \Phi(a)$
 kde Φ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.

Příklad
 Hodíme kostkou celkem 12000 krát. Určete pravděpodobnost toho, že počet hozených šestek je mezi 1800 a 2100. $P(1800 < X_n < 2100)$

Řešení
 Přesná pravděpodobnost je dána výrazem $\sum_{k=1800}^{2100} \binom{12000}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{12000-k}$, což je obtížné vyčíslitelné.

4 27-14:13

Transformace náhodných veličin

Číselné charakteristiky náhodných veličin

Řešení (pokr.)
 Využijeme tvrzení Moivre-Laplaceovy věty, přepsané do tvaru
 $P[A < X_n < B] = \Phi\left(\frac{B - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{A - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \rightarrow 0$
 pro $n \rightarrow \infty$.
 Volbou $p = \frac{1}{6}$, $A = 1800$, $B = 2100$, $n = 12000$ dostáváme odhad
 $P \approx \Phi\left(\frac{2100 - 2000}{\sqrt{12000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}\right) - \Phi\left(\frac{1800 - 2000}{\sqrt{12000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}\right) = \Phi(\sqrt{6}) - \Phi(-2\sqrt{6}) \approx 0,992$
 $0,9926 - (1 - \Phi(2\sqrt{6})) \approx 0,99999$

4 27-14:17

Transformace náhodných veličin

Číselné charakteristiky náhodných veličin

Moivre-Laplaceova věta – opakování

Příklad
 Nezávisle opakujeme pokus s výsledky 1 a 0, které mají **neznámé** pravděpodobnosti p a $1 - p$. Parametr p chceme odhadnout pomocí **relativních četností** X_n/n (X_n je počet jedniček při n pokusech). Víme, že je $X_n \sim Bi(n, p)$, proto nám Moivre-Laplaceova věta umožní určit počet pokusů n potřebný k zajištění požadované přesnosti odhadu δ se spolehlivostí $1 - \beta$.

Řešení
 Využijeme Moivre-Laplaceovu větu zapsanou ve tvaru
 $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \frac{X_n}{n} - p \right| < \delta \right] = P \left(\left| \frac{X_n - np}{n} \right| < \delta \right) = P \left(\left| \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right| < \frac{\delta \sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \right)$

4 27-14:23

$$1 - \beta \leq P \left(\left| \frac{X_n}{n} - p \right| < \delta \right) = P(p - \delta < \frac{X_n}{n} < p + \delta) = P(-\delta < \frac{X_n - np}{n} < \delta) = P\left(\frac{-\delta \sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} < \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{\delta \sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{\delta \sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta \sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta \sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1$$

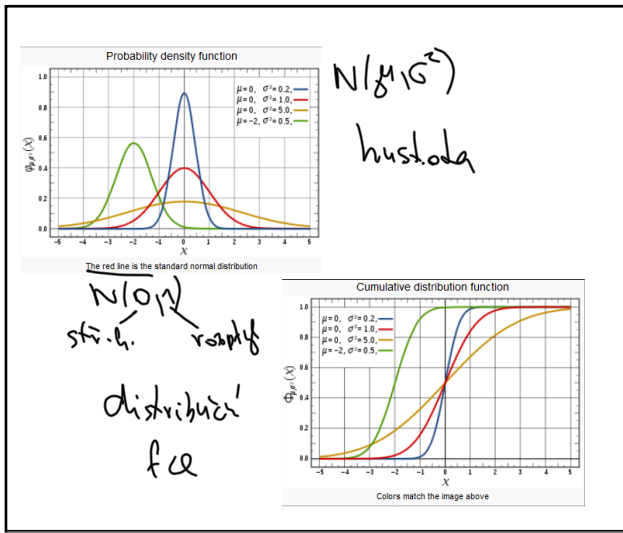
$$\Rightarrow 1 - \frac{\beta}{2} \leq \Phi\left(\frac{\delta \sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \Rightarrow \frac{\delta \sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \geq \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)$$

4 27-14:25

Jak odhadnout shora $x(1-x) =: f(x)$ pro $x \in (0,1)$

$\forall p \in (0,1): p(1-p) \leq \frac{1}{4}$
 dále viz slidy

4 27-14:15



4 27-14:08

Transformace náhodných veličin

Číselné charakteristiky náhodných veličin

Příklad
Spočítáme střední hodnotu binomického rozdělení.

Řešení
Pro $X \sim \text{Bi}(n, p)$ je $f_X(k) = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} p^j (1-p)^{n-1-j} = np(p + (1-p))^{n-1} = np$$

$(A+B)^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} A^j B^{n-1-j}$

4 27-14:11

• $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
ve spojitém případě $f_{X,Y}(x,y)$

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x+y) P(X=x, Y=y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X,Y}(x,y) dy \right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{X,Y}(x,y) dx \right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y) dy$$

$E(X)$ $E(Y)$

4 27-14:58

• n. distribucím při pádu

$$E(X+Y) = \sum_{i,j} (x_i + y_j) P(X=x_i, Y=y_j)$$

$$= \sum_i \sum_j x_i P(X=x_i, Y=y_j) + \sum_j \sum_i y_j P(X=x_i, Y=y_j)$$

$$= \sum_i x_i P(X=x_i) + \sum_j y_j P(Y=y_j)$$

$$= E(X) + E(Y)$$

4 27-15:04

X, Y stochasticky nezávislé

$$P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j)$$

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad \text{distr.}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \text{hust.}$$

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \quad \text{přev. fce}$$

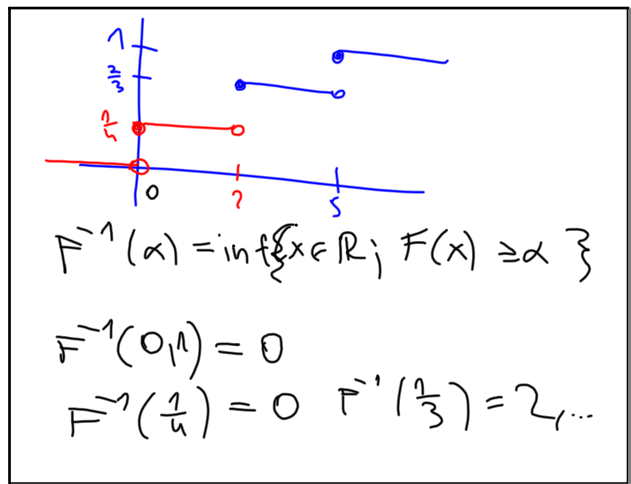
spojitě: $E(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_{X,Y}(x,y) dx dy$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y) dx dy =$$

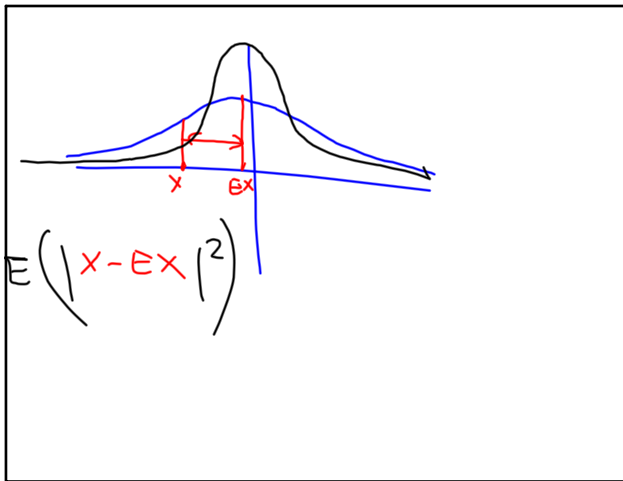
$$= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx \right) dy =$$

$$= E(X) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y) dy = E(X) \cdot E(Y)$$

4 27-15:08



4 27-15:13



4 27-15:22

ad 1.

$$\begin{aligned}
 D(X) &= E((X - EX)^2) = \\
 &= E((X - EX) \cdot (X - EX)) = \\
 &= E(X^2 - 2X \cdot EX + (EX)^2) = \\
 &= E(X^2) - E(2X \cdot EX) + E((EX)^2) = \\
 &= E(X^2) - 2EX \cdot E(X) + (EX)^2 \\
 &= E(X^2) - (EX)^2
 \end{aligned}$$

4 27-15:26

$$\begin{aligned}
 D(a+bX) &= E((a+bX)^2) - (E(a+bX))^2 \\
 &= E(a^2 + 2abX + b^2X^2) - \\
 &\quad - (a + b \cdot EX)^2 = \\
 &= \cancel{a^2} + \cancel{2abEX} + b^2 \cdot E(X^2) - \\
 &\quad - (\cancel{a^2} + \cancel{2abEX} + b^2(EX)^2) = \\
 &= b^2(E(X^2) - (EX)^2) = b^2 DX
 \end{aligned}$$

4 27-15:28

normované náhodné veličiny

$X \dots EX, DX$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow Y = \frac{X - EX}{\sqrt{DX}} &\Rightarrow EY = 0 \\
 &\quad DY = 1 \\
 (EY = E(\frac{X - EX}{\sqrt{DX}})) &= \frac{1}{\sqrt{DX}} \cdot E(X - EX) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{DX}} \cdot (E(X) - EX) = \underline{0} \\
 DY = D(\frac{X - EX}{\sqrt{DX}}) &= \frac{1}{DX} \cdot D(X - EX) \\
 &= \frac{1}{DX} \cdot DX = \underline{1}
 \end{aligned}$$

4 27-15:35