$Z \sim N(0,1) \qquad f_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$

$EZ = \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz = \dots = 0$

5 4-14:10

Normální rozdělení a rozdělení odvezená | Limitní věty a odhady | Popisná statistika | Náhodný vektor | Náhodný výběr

Momenty normálního rozdělení

Přímý výpočet střední hodnoty a rozptylu normovaného normálního rozdělení není triviální. S využitím momentové vytvořující funkce je ale poměrně jednoduché.

Nechť $Z \sim N(0,1)$. Pak hustota

$$E(e^{tZ}) = M_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2 - 2tz + t^2 - t^2}{2}\right) dz =$$
$$= \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z-t)^2}{2}\right) dz = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Poslední integrál je roven 1 díky tomu, že na místě integrované funkce je funkce s vlastnostmi hustoty.

5 4-14:12

Normální rozdělení a rozdělení odvezená | Limitní věty a odhady | Popisná statistika | Náhodný vektor | Náhodný výběr

Střední hodnota a rozptyl normálního rozdělení

S využitím předchozího výpočtu $M_Z(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$ snadno spočítáme, že

$$M_Z'(t) = t \exp\left(\frac{t^2}{2}\right),$$
$$M_Z''(t) = t^2 \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) + \exp\left(\frac{t^2}{2}\right). \Rightarrow \mu_2' = e^0 = 1$$

Dosazením $t = 0$ pak dostaneme $D(Z) = \mu_2' - (\mu_1')^2 = 1 - 0^2 = 1$

$$E(Z) = 0, D(Z) = 1.$$

$M_Z(t) = \mu_0' \cdot \frac{t^0}{0!} + \mu_1' \frac{t^1}{1!} + \mu_2' \cdot \frac{t^2}{2!} + \mu_3' \frac{t^3}{3!} \dots$

$M_Z'(t) = \mu_1' + \mu_2' \frac{t^1}{1!} + \mu_3' \cdot \frac{t^2}{2!}$

5 4-14:16

Normální rozdělení a rozdělení odvezená | Limitní věty a odhady | Popisná statistika | Náhodný vektor | Náhodný výběr

Příklad

Určete rozdělení součtu nezávislých náhodných veličin $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

Řešení

Z vlastností momentové vytvořující funkce dostáváme

$$M_{X+Y}(t) = \exp\left(\mu_X t + \sigma_X^2 \frac{t^2}{2}\right) \exp\left(\mu_Y t + \sigma_Y^2 \frac{t^2}{2}\right) =$$
$$= \exp\left((\mu_X + \mu_Y)t + (\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)\frac{t^2}{2}\right).$$

Proto $X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$.

5 4-14:20

Normální rozdělení a rozdělení odvezená | Limitní věty a odhady | Popisná statistika | Náhodný vektor | Náhodný výběr

Pomocí Čebyševovy nerovnosti můžeme odhadovat pravděpodobnost, s jakou se náhodná veličina s neznámým rozdělením odchýlí od své střední hodnoty o více než k-násobek směrodatné odchylky (zřejmě je totiž $P(|X - E(X)| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$).

Příklad

Nechť je $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$.

1. Odhadněte $P(|X - \mu| \geq 3\sigma)$.
2. Vypočtěte $P(|X - \mu| \geq 3\sigma)$, jestliže navíc víte, že $X \sim N(0,1)$.

Řešení

1. 1/9,
2. 0,0027 $= 1 - (\Phi(3) - \Phi(-3)) = 2(1 - \Phi(3))$

5 4-14:40

Normální rozdělení a rozdělení odvezená | Limitní věty a odhady | Popisná statistika | Náhodný vektor | Náhodný výběr

Příklad

Mezi matematiky v ČR je jich 10% s příjmem přesahujícím celostátní průměr. Kolik matematiků je třeba pozvat na konferenci, aby s pravděpodobností aspoň 0,95 mezi nimi bylo 8 až 12 procent s nadprůměrným příjmem?

Řešení

$Y_n \sim \mathrm{Bi}(n; 0{,}1)$, $E(Y_n) = 0{,}1 \cdot n$, $D(Y_n) = 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot n$. Pak

$$0{,}95 \leq P(0{,}08n \leq Y_n \leq 0{,}12n) =$$
$$= P\left(\frac{0{,}08 - 0{,}1}{\sqrt{0{,}09n}} n \leq \frac{Y_n - 0{,}1n}{\sqrt{0{,}09n}} \leq \frac{0{,}12 - 0{,}1}{\sqrt{0{,}09n}} n\right) =$$
$$= P\left(\frac{-\sqrt{n}}{15} \leq \frac{Y_n - 0{,}1n}{\sqrt{0{,}09n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{15}\right) \approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{15}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{15}\right).$$

$2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{15}\right) - 1$

$1 - \Phi(\ )$

Je tedy $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{15}\right) \geq 0{,}975$, což je ekvivalentní $\sqrt{n}/15 \geq 1{,}96$, tj. $n \geq 865$.

$2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{15}\right) - 1 \geq 0{,}95$

$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{15}\right) \geq 0{,}975$

$u_{0{,}975} = 1{,}96$

5 4-15:04

$$E\,\underline{[X-E(X)]\cdot[X-E(X)]^T} = \operatorname{var}(X)$$

$$E\begin{pmatrix} X_1-EX_1 \\ X_2-EX_2 \\ \vdots \\ X_n-EX_n \end{pmatrix}(X_1-EX_1, \dots, X_n-EX_n) =$$

$$= \Big(E(X_i-EX_i)(X_j-EX_j) = C(X_i, X_j) \Big)$$

5 4-15:15

Normální rozdělení a rozdělení odvezená | Limitní věty a odhady | Popisná statistika | Náhodný vektor | Náhodný výběr

Ukážeme na příkladech, že pravděpodobnostní struktura náhodného vektoru (X, Y) není určena pouze marginálními rozděleními veličin X a Y. Podstatný je rovněž pravděpodobnostní vztah mezi X a Y, který je částečně popsán např. prostřednictvím korelačního koeficientu.

Příklad

Jsou-li X a Y náhodné veličiny, nabývající hodnot 0 a 1, pak

$$\underline{P(X=1, Y=1) - P(X=1)P(Y=1)} = \underline{E(XY) - E(X)E(Y)} =$$
$$= \boxed{\operatorname{cov}(X,Y)} = 0 \Rightarrow P(X=1, Y=1) = P(X=1)\cdot P(Y=1)$$

Odtud je snadno vidět, že pokud jsou X a Y nekorelované, jsou i nezávislé (což obecně neplatí).

$$E(X\cdot Y) = 0\cdot P(X=0, Y=0) + 0\cdot P(X=0, Y=1) +$$
$$+ 0\cdot P(X=1, Y=0) + 1\cdot P(X=1, Y=1)$$
$$= P(X=1, Y=1)$$

$$E(X) = 0\cdot P(X=0) + 1\cdot P(X=1) = P(X=1)$$
$$E(Y) = P(Y=1)$$

5 4-15:19

ad 1. $X_1, \dots, X_n$ náhodný výběr z rozdělení se stř. hodnotou μ

$M = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ ... výb. průměr

$$E(M) = E\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\big(E(X_1)+\dots+E(X_n)\big)$$
$$= \frac{1}{n}(\mu+\mu+\dots+\mu) = \mu$$

ad 3. $$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \sum(X_i^2 - 2\mu X_i + \mu^2) =$$
$$= \sum X_i^2 - 2\mu\sum X_i + n\cdot\mu^2$$
$$= \cancel{\sum X_i^2} - \cancel{2n\mu M} + \cancel{n\mu^2}$$

$$\sum(X_i-M)^2 + n\cdot(M-\mu)^2 =$$
$$= \sum(X_i^2 - 2MX_i + M^2) + n\cdot(M-\mu)^2 =$$
$$= \cancel{\sum X_i^2} - \cancel{2M\cdot n\cdot M} + \cancel{nM^2} + \cancel{nM^2} - \cancel{2nM\mu} + \cancel{n\mu^2}$$

dále viz slidy

5 4-15:33