

**Logické programování
s omezujícími podmínkami**

Constraint Logic Programming: CLP

CP: elektronické materiály

● Dechter, R. **Constraint Processing**. Morgan Kaufmann Publishers, 2003.

● <http://www.ics.uci.edu/~dechter/books/materials.html>

průsvitky ke knize

● Barták R. **Přednáška Omezující podmínky na MFF UK, Praha.**

● <http://kti.ms.mff.cuni.cz/~bartak/podminky/index.html>

● **SICStus Prolog User's Manual**. Kapitola o CLP(FD).

● <http://www.fi.muni.cz/~hanka/sicstus/doc/html/>

● **Příklady v distribuci SICStus Prologu**: cca 60 příkladů, zdrojový kód

● `lib/sicstus-*/library/clpfd/examples/`

Probírané oblasti

- Obsah
 - úvod: od LP k CLP
 - základy programování
 - základní algoritmy pro řešení problémů s omezujícími podmínkami

Probírané oblasti

● Obsah

- úvod: od LP k CLP
- základy programování
- základní algoritmy pro řešení problémů s omezujícími podmínkami

● Příbuzné přednášky na FI

- PA163 Programování s omezujícími podmínkami
 - viz interaktivní osnova IS
- PA167 Rozvrhování
 - <http://www.fi.muni.cz/~hanka/rozvrhovani>
 - zahrnuty CP techniky pro řešení rozvrhovacích problémů

Omezení (*constraint*)

• Dána

• množina **(doménových) proměnných** $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$

• **konečná** množina hodnot (**doména**) $D = \{D_1, \dots, D_k\}$

Omezení c na Y je podmnožina $D_1 \times \dots \times D_k$

• omezuje hodnoty, kterých mohou proměnné nabývat současně

Omezení (*constraint*)

● Dána

- množina (**doménových**) **proměnných** $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$

- **konečná** množina hodnot (**doména**) $D = \{D_1, \dots, D_k\}$

Omezení c na Y je podmnožina $D_1 \times \dots \times D_k$

- omezuje hodnoty, kterých mohou proměnné nabývat současně

● Příklad:

- proměnné: A, B

- domény: $\{0, 1\}$ pro A $\{1, 2\}$ pro B

- omezení: $A \neq B$ nebo $(A, B) \in \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$

Omezení (*constraint*)

● Dána

- množina (**doménových**) **proměnných** $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$

- **konečná** množina hodnot (**doména**) $D = \{D_1, \dots, D_k\}$

Omezení c na Y je podmnožina $D_1 \times \dots \times D_k$

- omezuje hodnoty, kterých mohou proměnné nabývat současně

● Příklad:

- proměnné: A, B

- domény: $\{0, 1\}$ pro A $\{1, 2\}$ pro B

- omezení: $A \neq B$ nebo $(A, B) \in \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$

- Omezení c definováno na y_1, \dots, y_k je **splněno**,
pokud pro $d_1 \in D_1, \dots, d_k \in D_k$ platí $(d_1, \dots, d_k) \in c$

- příklad (pokračování): omezení splněno pro $(0, 1), (0, 2), (1, 2)$, není splněno pro $(1, 1)$

Problém splňování podmínek (CSP)

• Dána

- konečná množina **proměnných** $X = \{x_1, \dots, x_n\}$
- konečná množina hodnot (**doména**) $D = \{D_1, \dots, D_n\}$
- konečná množina **omezení** $C = \{c_1, \dots, c_m\}$
 - omezení je definováno na podmnožině X

Problém splňování podmínek je trojice (X, D, C)
(constraint satisfaction problem)

Problém splňování podmínek (CSP)

● Dána

- konečná množina **proměnných** $X = \{x_1, \dots, x_n\}$
- konečná množina hodnot (**doména**) $D = \{D_1, \dots, D_n\}$
- konečná množina **omezení** $C = \{c_1, \dots, c_m\}$
 - omezení je definováno na podmnožině X

Problém splňování podmínek je trojice (X, D, C)

(constraint satisfaction problem)

● Příklad:

- proměnné: A, B, C
- domény: {0, 1} pro A {1, 2} pro B {0, 2} pro C
- omezení: $A \neq B, B \neq C$

Řešení CSP

- **Částečné ohodnocení proměnných** $(d_1, \dots, d_k), k < n$
 - některé proměnné mají přiřazenu hodnotu
- **Úplné ohodnocení proměnných** (d_1, \dots, d_n)
 - všechny proměnné mají přiřazenu hodnotu

Řešení CSP

- **Částečné ohodnocení proměnných** $(d_1, \dots, d_k), k < n$
 - některé proměnné mají přiřazenu hodnotu
- **Úplné ohodnocení proměnných** (d_1, \dots, d_n)
 - všechny proměnné mají přiřazenu hodnotu
- **Řešení CSP**
 - úplné ohodnocení proměnných, které splňuje všechna omezení
 - $(d_1, \dots, d_n) \in D_1 \times \dots \times D_n$ je **řešení** (X, D, C)
 - pro každé $c_i \in C$ na x_{i_1}, \dots, x_{i_k} platí $(d_{i_1}, \dots, d_{i_k}) \in c_i$

Řešení CSP

- **Částečné ohodnocení proměnných** $(d_1, \dots, d_k), k < n$
 - některé proměnné mají přiřazenu hodnotu
- **Úplné ohodnocení proměnných** (d_1, \dots, d_n)
 - všechny proměnné mají přiřazenu hodnotu
- **Řešení CSP**
 - úplné ohodnocení proměnných, které splňuje všechna omezení
 - $(d_1, \dots, d_n) \in D_1 \times \dots \times D_n$ je **řešení** (X, D, C)
 - pro každé $c_i \in C$ na x_{i_1}, \dots, x_{i_k} platí $(d_{i_1}, \dots, d_{i_k}) \in c_i$
- Hledáme: jedno nebo
všechna řešení nebo
optimální řešení (vzhledem k objektivní funkci)

Příklad: jednoduchý školní rozvrh

- **proměnné:** Jan, Petr, ...
- **domény:** {3, 4, 5, 6}, {3, 4}, ...
- **omezení:** `all_distinct([Jan, Petr, ...])`

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

Příklad: jednoduchý školní rozvrh

- **proměnné:** Jan, Petr, ...
- **domény:** {3, 4, 5, 6}, {3, 4}, ...
- **omezení:** `all_distinct([Jan, Petr, ...])`
- **částečné ohodnocení:** Jan=6, Anna=5, Marie=1
- **úplné ohodnocení:**
Jan=6, Petr=3, Anna=5, Ota=2, Eva=4, **Marie=6**

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

Příklad: jednoduchý školní rozvrh

- **proměnné:** Jan, Petr, ...
- **domény:** {3, 4, 5, 6}, {3, 4}, ...
- **omezení:** `all_distinct([Jan, Petr, ...])`
- **částečné ohodnocení:** Jan=6, Anna=5, Marie=1
- **úplné ohodnocení:**
Jan=6, Petr=3, Anna=5, Ota=2, Eva=4, **Marie=6**
- **řešení CSP:**
Jan=6, Petr=3, Anna=5, Ota=2, Eva=4, Marie=1

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

- **všetchna řešení:** ještě Jan=6, **Petr=4**, Anna=5, Ota=2, **Eva=3**, Marie=1

Příklad: jednoduchý školní rozvrh

- **proměnné:** Jan, Petr, ...
- **domény:** {3, 4, 5, 6}, {3, 4}, ...
- **omezení:** `all_distinct([Jan, Petr, ...])`
- **částečné ohodnocení:** Jan=6, Anna=5, Marie=1
- **úplné ohodnocení:**
Jan=6, Petr=3, Anna=5, Ota=2, Eva=4, **Marie=6**
- **řešení CSP:**
Jan=6, Petr=3, Anna=5, Ota=2, Eva=4, Marie=1
- **všechna řešení:** ještě Jan=6, **Petr=4**, Anna=5, Ota=2, **Eva=3**, Marie=1
- **optimalizace:** ženy učí co nejdříve

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

Příklad: jednoduchý školní rozvrh

- **proměnné:** Jan, Petr, ...
- **domény:** {3, 4, 5, 6}, {3, 4}, ...
- **omezení:** `all_distinct([Jan, Petr, ...])`
- **částečné ohodnocení:** Jan=6, Anna=5, Marie=1
- **úplné ohodnocení:**
Jan=6, Petr=3, Anna=5, Ota=2, Eva=4, **Marie=6**
- **řešení CSP:**
Jan=6, Petr=3, Anna=5, Ota=2, Eva=4, Marie=1

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

- **všechna řešení:** ještě Jan=6, **Petr=4**, Anna=5, Ota=2, **Eva=3**, Marie=1
- **optimálizace:** ženy učí co nejdříve
Anna+Eva+Marie \neq Cena minimalizace hodnoty proměnné Cena
- **optimální řešení:** Jan=6, **Petr=4**, Anna=5, Ota=2, **Eva=3**, Marie=1

CLP(*FD*) program

● Základní struktura **CLP programu**

1. definice proměnných a jejich domén
2. definice omezení
3. hledání řešení

CLP(*FD*) program

- Základní struktura **CLP programu**
 1. definice proměnných a jejich domén
 2. definice omezení
 3. hledání řešení
- (1) a (2) deklarativní část
 - **modelování** problému
 - vyjádření problému splňování podmínek

CLP(*FD*) program

● Základní struktura **CLP programu**

1. definice proměnných a jejich domén
2. definice omezení
3. hledání řešení

● (1) a (2) deklarativní část

- **modelování** problému
- vyjádření problému splňování podmínek

● (3) řídicí část

- **prohledávání** stavového prostoru řešení
- procedura pro hledání řešení (enumeraci) se nazývá **labeling**
- umožní nalézt jedno, všechna nebo optimální řešení

Kód CLP(*FD*) programu

% základní struktura CLP programu

```
solve( Variables ) :-
```

```
    declare_variables( Variables ),          domain([Jan],3,6), ...
```

Kód CLP(*FD*) programu

% základní struktura CLP programu

```
solve( Variables ) :-
```

```
    declare_variables( Variables ),
```

```
    post_constraints( Variables ),
```

```
    domain([Jan],3,6), ...
```

```
    all_distinct([Jan,Petr,...])
```

Kód CLP(*FD*) programu

% základní struktura CLP programu

```
solve( Variables ) :-  
    declare_variables( Variables ),  
    post_constraints( Variables ),  
    labeling( Variables ).  
domain([Jan],3,6), ...  
all_distinct([Jan,Petr,...])
```

Kód CLP(*FD*) programu

% základní struktura CLP programu

```
solve( Variables ) :-  
    declare_variables( Variables ),  
    post_constraints( Variables ),  
    labeling( Variables ).  
  
domain([Jan],3,6), ...  
all_distinct([Jan,Petr,...])
```

% triviální labeling

```
labeling( [] ).
```

```
labeling( [Var|Rest] ) :-
```

```
    fd_min(Var,Min),
```

```
    ( Var#=Min, labeling( Rest )
```

% výběr nejmenší hodnoty z domény

Kód CLP(*FD*) programu

% základní struktura CLP programu

```
solve( Variables ) :-  
    declare_variables( Variables ),  
    post_constraints( Variables ),  
    labeling( Variables ).  
                                domain([Jan],3,6), ...  
                                all_distinct([Jan,Petr,...])
```

% triviální labeling

```
labeling( [] ).
```

```
labeling( [Var|Rest] ) :-
```

```
    fd_min(Var,Min),  
    ( Var#=Min, labeling( Rest )  
    ;  
      Var#>Min , labeling( [Var|Rest] )  
    ).  
                                % výběr nejmenší hodnoty z domény
```

Příklad: algebrogram

- Přiřad'te cifry 0, . . . 9 písmenům S, E, N, D, M, O, R, Y tak, aby platilo:
 - SEND + MORE = MONEY
 - různá písmena mají přiřazena různé cifry
 - S a M nejsou 0

Příklad: algebrogram

- Přiřad'te cifry 0, . . . 9 písmenům S, E, N, D, M, O, R, Y tak, aby platilo:
 - SEND + MORE = MONEY
 - různá písmena mají přiřazena různé cifry
 - S a M nejsou 0
- $\text{domain}([E,N,D,O,R,Y], 0, 9), \text{domain}([S,M], 1, 9)$

Příklad: algebrogram

● Přiřad'te cifry 0, . . . 9 písmenům S, E, N, D, M, O, R, Y tak, aby platilo:

● SEND + MORE = MONEY

● různá písmena mají přiřazena různé cifry

● S a M nejsou 0

● $\text{domain}([E,N,D,O,R,Y], 0, 9), \text{domain}([S,M], 1, 9)$

$$\begin{array}{r} \bullet \\ + \\ \# = \end{array} \begin{array}{r} 1000*S + 100*E + 10*N + D \\ 1000*M + 100*O + 10*R + E \\ 10000*M + 1000*O + 100*N + 10*E + Y \end{array}$$

Příklad: algebrogram

● Přiřad'te cifry 0, . . . 9 písmenům S, E, N, D, M, O, R, Y tak, aby platilo:

● SEND + MORE = MONEY

● různá písmena mají přiřazena různé cifry

● S a M nejsou 0

● $\text{domain}([E,N,D,O,R,Y], 0, 9), \text{domain}([S,M], 1, 9)$

$$\begin{array}{r} \bullet \quad \quad \quad 1000*S + 100*E + 10*N + D \\ + \quad \quad \quad 1000*M + 100*O + 10*R + E \\ \# = \quad 10000*M + 1000*O + 100*N + 10*E + Y \end{array}$$

● $\text{all_distinct}([S,E,N,D,M,O,R,Y])$

Příklad: algebrogram

● Přiřad'te cifry 0, . . . 9 písmenům S, E, N, D, M, O, R, Y tak, aby platilo:

● SEND + MORE = MONEY

● různá písmena mají přiřazena různé cifry

● S a M nejsou 0

● $\text{domain}([E,N,D,O,R,Y], 0, 9), \text{domain}([S,M], 1, 9)$

●
$$\begin{array}{r} 1000*S + 100*E + 10*N + D \\ + \quad 1000*M + 100*O + 10*R + E \\ \# = 10000*M + 1000*O + 100*N + 10*E + Y \end{array}$$

● $\text{all_distinct}([S,E,N,D,M,O,R,Y])$

● $\text{labeling}([S,E,N,D,M,O,R,Y])$

Od LP k CLP I.

- CLP: rozšíření logického programování o omezující podmínky
- CLP systémy se liší podle typu domény
 - $\text{CLP}(\mathcal{A})$ generický jazyk
 - $\text{CLP}(FD)$ domény proměnných jsou konečné (*Finite Domains*)
 - $\text{CLP}(\mathbb{R})$ doménou proměnných je množina reálných čísel

Od LP k CLP I.

- CLP: rozšíření logického programování o omezující podmínky
- CLP systémy se liší podle typu domény
 - $\text{CLP}(\mathcal{A})$ generický jazyk
 - $\text{CLP}(FD)$ domény proměnných jsou konečné (*Finite Domains*)
 - $\text{CLP}(\mathbb{R})$ doménou proměnných je množina reálných čísel
- Cíl
 - využít syntaktické a výrazové přednosti LP
 - dosáhnout větší efektivity

Od LP k CLP I.

- CLP: rozšíření logického programování o omezující podmínky
- CLP systémy se liší podle typu domény
 - $\text{CLP}(\mathcal{A})$ generický jazyk
 - $\text{CLP}(FD)$ domény proměnných jsou konečné (*Finite Domains*)
 - $\text{CLP}(\mathbb{R})$ doménou proměnných je množina reálných čísel
- Cíl
 - využít syntaktické a výrazové přednosti LP
 - dosáhnout větší efektivity
- **Unifikace v LP je nahrazena splňováním podmínek**
 - unifikace se chápe jako **jedna z** podmínek
 - $A = B$
 - $A \#< B, \quad A \text{ in } 0..9, \quad \text{domain}([A,B],0,9), \quad \text{all_distinct}([A,B,C])$

Od LP k CLP II.

- Pro řešení podmínek se používají **konzistenční techniky**
 - *consistency techniques, propagace omezení (constraint propagation)*
 - omezení: $A \text{ in } 0..2, B \text{ in } 0..2, B \neq A$

Od LP k CLP II.

- Pro řešení podmínek se používají **konzistenční techniky**
 - *consistency techniques, propagace omezení (constraint propagation)*
 - omezení: $A \text{ in } 0..2, B \text{ in } 0..2, B \#< A$
domény po propagaci omezení $B \#< A$: $A \text{ in } 1..2, B \text{ in } 0..1$

Od LP k CLP II.

- Pro řešení podmínek se používají **konzistenční techniky**
 - *consistency techniques, propagace omezení (constraint propagation)*
 - omezení: $A \text{ in } 0..2, B \text{ in } 0..2, B \#< A$
domény po propagaci omezení $B \#< A$: $A \text{ in } 1..2, B \text{ in } 0..1$
- Podmínky jsou deterministicky vyhodnoceny v okamžiku volání podmínky

Od LP k CLP II.

- Pro řešení podmínek se používají **konzistenční techniky**
 - *consistency techniques, propagace omezení (constraint propagation)*
 - omezení: $A \text{ in } 0..2, B \text{ in } 0..2, B \#< A$
domény po propagaci omezení $B \#< A$: $A \text{ in } 1..2, B \text{ in } 0..1$
- Podmínky jsou deterministicky vyhodnoceny v okamžiku volání podmínky
- **Prohledávání doplněno konzistenčními technikami**
 - $A \text{ in } 1..2, B \text{ in } 0..1, B \#< A$

Od LP k CLP II.

- Pro řešení podmínek se používají **konzistenční techniky**
 - *consistency techniques, propagace omezení (constraint propagation)*
 - omezení: $A \text{ in } 0..2, B \text{ in } 0..2, B \#< A$
domény po propagaci omezení $B \#< A$: $A \text{ in } 1..2, B \text{ in } 0..1$
- Podmínky jsou deterministicky vyhodnoceny v okamžiku volání podmínky
- **Prohledávání doplněno konzistenčními technikami**
 - $A \text{ in } 1..2, B \text{ in } 0..1, B \#< A$
 - po provedení $A \# = 1$ se z $B \#< A$ se odvodí: $B \# = 0$

Od LP k CLP II.

- Pro řešení podmínek se používají **konzistenční techniky**
 - *consistency techniques, propagace omezení (constraint propagation)*
 - omezení: $A \in 0..2, B \in 0..2, B \#< A$
domény po propagaci omezení $B \#< A$: $A \in 1..2, B \in 0..1$
- Podmínky jsou deterministicky vyhodnoceny v okamžiku volání podmínky
- **Prohledávání doplněno konzistenčními technikami**
 - $A \in 1..2, B \in 0..1, B \#< A$
 - po provedení $A \# = 1$ se z $B \#< A$ se odvodí: $B \# = 0$
- **Podmínky jako výstup**
 - kompaktní reprezentace nekonečného počtu řešení, výstup lze použít jako vstup

Od LP k CLP II.

- Pro řešení podmínek se používají **konzistenční techniky**

- *consistency techniques, propagace omezení (constraint propagation)*

- omezení: $A \text{ in } 0..2, B \text{ in } 0..2, B \#< A$

domény po propagaci omezení $B \#< A$: $A \text{ in } 1..2, B \text{ in } 0..1$

- Podmínky jsou deterministicky vyhodnoceny v okamžiku volání podmínky

- **Prohledávání doplněno konzistenčními technikami**

- $A \text{ in } 1..2, B \text{ in } 0..1, B \#< A$

- po provedení $A \# = 1$ se z $B \#< A$ se odvodí: $B \# = 0$

- **Podmínky jako výstup**

- kompaktní reprezentace nekonečného počtu řešení, výstup lze použít jako vstup

- dotaz: $A \text{ in } 0..2, B \text{ in } 0..2, B \#< A$

výstup: $A \text{ in } 1..2, B \text{ in } 0..1,$

Od LP k CLP II.

- Pro řešení podmínek se používají **konzistenční techniky**
 - *consistency techniques, propagace omezení (constraint propagation)*
 - omezení: $A \text{ in } 0..2, B \text{ in } 0..2, B \#< A$
domény po propagaci omezení $B \#< A$: $A \text{ in } 1..2, B \text{ in } 0..1$
- Podmínky jsou deterministicky vyhodnoceny v okamžiku volání podmínky
- **Prohledávání doplněno konzistenčními technikami**
 - $A \text{ in } 1..2, B \text{ in } 0..1, B \#< A$
 - po provedení $A \# = 1$ se z $B \#< A$ se odvodí: $B \# = 0$
- **Podmínky jako výstup**
 - kompaktní reprezentace nekonečného počtu řešení, výstup lze použít jako vstup
 - dotaz: $A \text{ in } 0..2, B \text{ in } 0..2, B \#< A$
výstup: $A \text{ in } 1..2, B \text{ in } 0..1, B \#< A$

Syntaxe CLP

- Výběr jazyka omezení

- CLP klauzule

jako LP klauzule, ale její tělo může obsahovat omezení daného jazyka

$p(X,Y) :- X \#< Y+1, q(X), r(X,Y,Z).$

- Rezoluční krok v LP

- kontrola existence nejobecnějšího unifikátoru (MGU) mezi cílem a hlavou

- Krok odvození v CLP také zahrnuje

- kontrola konzistence aktuální množiny omezení s omezeními v těle klauzule

⇒ Vyvolání dvou řešičů: unifikace + řešič omezení

Operační sémantika CLP

- CLP výpočet cíle G
 - $Store$ množina aktivních omezení \equiv **prostor omezení (*constraint store*)**
 - inicializace $Store = \emptyset$
 - seznamy cílů v G prováděny v obvyklém pořadí
 - pokud narazíme na cíl s omezením c : $NewStore = Store \cup \{c\}$
 - snažíme se splnit c vyvoláním jeho řešiče
 - při neúspěchu se vyvolá backtracking
 - při úspěchu se podmínky v $NewStore$ zjednoduší propagací omezení
 - zbývající cíle jsou prováděny s upraveným $NewStore$
- CLP výpočet cíle G je úspěšný, pokud se dostaneme z iniciálního stavu $\langle G, \emptyset \rangle$ do stavu $\langle G', Store \rangle$, kde G' je prázdný cíl a $Store$ je splnitelná.

CLP(*FD*) v SICStus Prologu

Systemy a jazyky pro CP

● IBM ILOG CP

1987

- omezující podmínky v C++, Java nebo generickém modelovacím jazyku OPL
- implementace podmínek založena na objektově orientovaném programování
- špičkový komerční sw, vznikl ve Francii, nedávno zakoupen IBM
- nyní nově volně dostupný pro akademické použití

Systemy a jazyky pro CP

● IBM ILOG CP

1987

- omezující podmínky v C++, Java nebo generickém modelovacím jazyku OPL
- implementace podmínek založena na objektově orientovaném programování
- špičkový komerční sw, vznikl ve Francii, nedávno zakoupen IBM
- nyní nově volně dostupný pro akademické použití

● Swedish Institute of Computer Science: SICStus Prolog

1985

- silná CLP(*FD*) knihovna, komerční i akademické použití

Systemy a jazyky pro CP

- **IBM ILOG CP** 1987
 - omezující podmínky v C++, Java nebo generickém modelovacím jazyku OPL
 - implementace podmínek založena na objektově orientovaném programování
 - špičkový komerční sw, vznikl ve Francii, nedávno zakoupen IBM
 - nyní nově volně dostupný pro akademické použití
- **Swedish Institute of Computer Science: SICStus Prolog** 1985
 - silná CLP(*FD*) knihovna, komerční i akademické použití
- **IC-PARC, Imperial College London, Cisco Systems: ECLⁱPS^e** 1984
 - široké možnosti kooperace mezi různými řešičemi: konečné domény, reálná čísla, repair
 - od 2004 vlastní Cisco Systems volně dostupné pro akademické použití, rozvoj na IC-PARC, platformy: Windows, Linux, Solaris

Systemy a jazyky pro CP

- **IBM ILOG CP** 1987
 - omezující podmínky v C++, Java nebo generickém modelovacím jazyku OPL
 - implementace podmínek založena na objektově orientovaném programování
 - špičkový komerční sw, vznikl ve Francii, nedávno zakoupen IBM
 - nyní nově volně dostupný pro akademické použití
- **Swedish Institute of Computer Science: SICStus Prolog** 1985
 - silná CLP(*FD*) knihovna, komerční i akademické použití
- **IC-PARC, Imperial College London, Cisco Systems: ECLⁱPS^e** 1984
 - široké možnosti kooperace mezi různými řešičemi: konečné domény, reálná čísla, repair
 - od 2004 vlastní Cisco Systems volně dostupné pro akademické použití, rozvoj na IC-PARC, platformy: Windows, Linux, Solaris
- Mnoho dalších systémů: Choco, Gecode, Minion, Oz, SWI Prolog, ...

CLP(*FD*) v SICStus Prologu

- Vestavěné predikáty jsou dostupné v separátním modulu (knihovně)
`:- use_module(library(clpfd)).`
- Obecné principy platné všude nicméně standardy jsou nedostatečné
 - stejné/podobné vestavěné predikáty existují i jinde
 - CLP knihovny v SWI Prologu i ECLiPSe se liší

Příslušnost k doméně: Range terms

● ?- domain([A,B], 1,3).

A in 1..3

B in 1..3

domain(+Variables, +Min, +Max)

Příslušnost k doméně: Range terms

● ?- domain([A,B], 1,3).

A in 1..3

B in 1..3

domain(+Variables, +Min, +Max)

● ?- A in 1..8, A #\= 4.

A in (1..3) \/ (5..8)

?X in +Min..+Max

Příslušnost k doméně: Range terms

- `?- domain([A,B], 1,3).` domain(+Variables, +Min, +Max)
A in 1..3
B in 1..3
- `?- A in 1..8, A #\= 4.` ?X in +Min..+Max
A in (1..3) \\/ (5..8)
- Doména reprezentována jako posloupnost intervalů celých čísel
- `?- A in (1..3) \\/ (8..15) \\/ (5..9) \\/ {100}.` ?X in +Range
A in (1..3) \\/ (5..15) \\/ {100}

Příslušnost k doméně: Range terms

- `?- domain([A,B], 1,3).` `domain(+Variables, +Min, +Max)`
A in 1..3
B in 1..3
- `?- A in 1..8, A #\= 4.` `?X in +Min..+Max`
A in (1..3) \\/ (5..8)
- Doména reprezentována jako posloupnost intervalů celých čísel
- `?- A in (1..3) \\/ (8..15) \\/ (5..9) \\/ {100}.` `?X in +Range`
A in (1..3) \\/ (5..15) \\/ {100}
- Zjištění domény Range proměnné Var: `fd_dom(?Var, ?Range)`
● `A in 1..8, A #\= 4, fd_dom(A, Range).` `Range=(1..3) \\/ (5..8)`

Příslušnost k doméně: Range terms

- `?- domain([A,B], 1,3).` `domain(+Variables, +Min, +Max)`
A in 1..3
B in 1..3
- `?- A in 1..8, A #\= 4.` `?X in +Min..+Max`
A in (1..3) \\/ (5..8)
- Doména reprezentována jako posloupnost intervalů celých čísel
- `?- A in (1..3) \\/ (8..15) \\/ (5..9) \\/ {100}.` `?X in +Range`
A in (1..3) \\/ (5..15) \\/ {100}
- Zjištění domény Range proměnné Var: `fd_dom(?Var, ?Range)`
 - A in 1..8, A #\= 4, `fd_dom(A, Range).` `Range=(1..3) \\/ (5..8)`
 - A in 2..10, `fd_dom(A, (1..3) \\/ (5..8)).` no

Příslušnost k doméně: Range termy

- `?- domain([A,B], 1,3).` `domain(+Variables, +Min, +Max)`
A in 1..3
B in 1..3
- `?- A in 1..8, A #\= 4.` `?X in +Min..+Max`
A in (1..3) \\/ (5..8)
- Doména reprezentována jako posloupnost intervalů celých čísel
- `?- A in (1..3) \\/ (8..15) \\/ (5..9) \\/ {100}.` `?X in +Range`
A in (1..3) \\/ (5..15) \\/ {100}
- Zjištění domény Range proměnné Var: `fd_dom(?Var, ?Range)`
 - A in 1..8, A #\= 4, `fd_dom(A, Range).` `Range=(1..3) \\/ (5..8)`
 - A in 2..10, `fd_dom(A, (1..3) \\/ (5..8)).` no
- Range term: reprezentace nezávislá na implementaci

Příslušnost k doméně: FDSet termy

● FDSet term: reprezentace závislá na implementaci

● `?- A in 1..8, A #\= 4, fd_set(A,FDSet).`

`fd_set(?Var,?FDSet)`

`A in (1..3) \ / (5..8)`

`FDSet = [[1|3],[5|8]]`

Příslušnost k doméně: FDSet termy

● FDSet term: reprezentace závislá na implementaci

● `?- A in 1..8, A #\= 4, fd_set(A,FDSet).`

`fd_set(?Var,?FDSet)`

`A in (1..3) \\/ (5..8)`

`FDSet = [[1|3],[5|8]]`

● `?- A in 1..8,A #\= 4, fd_set(A,FDSet),B in_set FDSet.`

`?X in_set +FDSet`

`A in (1..3) \\/ (5..8)`

`FDSet = [[1|3],[5|8]]`

`B in (1..3) \\/ (5..8)`

Příslušnost k doméně: FDSet termy

- FDSet term: reprezentace závislá na implementaci

● `?- A in 1..8, A #\= 4, fd_set(A,FDSet).` `fd_set(?Var,?FDSet)`

`A in (1..3) \\/ (5..8)`

`FDSet = [[1|3],[5|8]]`

● `?- A in 1..8,A #\= 4, fd_set(A,FDSet),B in_set FDSet.` `?X in_set +FDSet`

`A in (1..3) \\/ (5..8)`

`FDSet = [[1|3],[5|8]]`

`B in (1..3) \\/ (5..8)`

- FDSet termy představují nízko-úrovňovou implementaci

- FDSet termy nedoporučeny v programech

- používat pouze predikáty pro manipulaci s nimi

- omezit použití `A in_set [[1|2],[6|9]]`

- Range termy preferovány

Další fd_... predikáty

- `fdset_to_list(+FDset, -List)` vrací do seznamu prvky FDset
- `list_to_fdset(+List, -FDset)` vrací FDset odpovídající seznamu
- `fd_var(?Var)` je Var doménová proměnná?
- `fd_min(?Var, ?Min)` nejmenší hodnota v doméně
- `fd_max(?Var, ?Max)` největší hodnota v doméně
- `fd_size(?Var, ?Size)` velikost domény
- `fd_degree(?Var, ?Degree)` počet navázaných omezení na proměnné
 - mění se během výpočtu: pouze aktivní omezení, i odvozená aktivní omezení

Aritmetická omezení

Expr RelOp Expr RelOp \rightarrow #= | #\= | #< | #=< | #> | #>=

A + B #=< 3, A #\= (C - 4) * (D - 5), A/2 #= 4

POZOR: neplést #=< a #>= s operátory pro implikaci: #<= #=>

Aritmetická omezení

Expr RelOp Expr RelOp \rightarrow #= | #\= | #< | #=< | #> | #>=

A + B #=< 3, A #\= (C - 4) * (D - 5), A/2 #= 4

POZOR: neplést #=< a #>= s operátory pro implikaci: #<= #=>

sum(Variables, RelOp, Suma)

domain([A,B,C,F], 1, 3), sum([A,B,C], #=, F)

Variables i Suma musí být doménové proměnné nebo celá čísla

Aritmetická omezení

• `Expr RelOp Expr` `RelOp -> #= | #\= | #< | #=< | #> | #>=`

• `A + B #=< 3, A #\= (C - 4) * (D - 5), A/2 #= 4`

• POZOR: neplést `#=<` a `#>=` s operátory pro implikaci: `#<=` `#=>`

• `sum(Variables, RelOp, Suma)`

• `domain([A,B,C,F],1,3), sum([A,B,C],#=,F)`

• `Variables` i `Suma` musí být doménové proměnné nebo celá čísla

• `scalar_product(Coeffs, Variables, RelOp, ScalarProduct)`

• `domain([A,B,C,F],1,6), scalar_product([1,2,3],[A,B,C],#=,F)`

• `Variables` i `Value` musí být doménové proměnné nebo celá čísla, `Coeffs` jsou celá čísla

• POZOR na pořadí argumentů, nejprve jsou celočíselné koeficienty, pak dom. proměnné

• `scalar_product(Coeffs, Variables, #=, Value, [consistency(domain)])`

• silnější typ konzistence

• POZOR: domény musí mít konečné hranice

Základní globální omezení

• `all_distinct(List)`

- všechny proměnné různé

• `cumulative(...)`

- disjunktivní a kumulativní rozvrhování

• `cumulatives(...)`

- kumulativní rozvrhování na více zdrojů

Všechny proměnné různé

- `all_distinct(Variables)`, `all_different(Variables)`
- Proměnné v seznamu `Variables` jsou různé
- `all_distinct` a `all_different` se liší úrovní propagace
 - `all_distinct` má úplnou propagaci
 - `all_different` má slabší (neúplnou) propagaci

Všechny proměnné různé

- `all_distinct(Variables)`, `all_different(Variables)`
- Proměnné v seznamu `Variables` jsou různé
- `all_distinct` a `all_different` se liší úrovní propagace
 - `all_distinct` má úplnou propagaci
 - `all_different` má slabší (neúplnou) propagaci
- Příklad: učitelé musí učit v různé hodiny

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

Všechny proměnné různé

- `all_distinct(Variables)`, `all_different(Variables)`
- Proměnné v seznamu `Variables` jsou různé
- `all_distinct` a `all_different` se liší úrovní propagace
 - `all_distinct` má úplnou propagaci
 - `all_different` má slabší (neúplnou) propagaci
- Příklad: učitelé musí učit v různé hodiny
 - `all_distinct([Jan,Petr,Anna,Ota,Eva,Marie])`
Jan = 6, Ota = 2, Anna = 5,
Marie = 1, Petr in 3..4, Eva in 3..4

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

Všechny proměnné různé

- `all_distinct(Variables)`, `all_different(Variables)`
- Proměnné v seznamu `Variables` jsou různé
- `all_distinct` a `all_different` se liší úrovní propagace
 - `all_distinct` má úplnou propagaci
 - `all_different` má slabší (neúplnou) propagaci
- Příklad: učitelé musí učit v různé hodiny
 - `all_distinct([Jan,Petr,Anna,Ota,Eva,Marie])`
Jan = 6, Ota = 2, Anna = 5,
Marie = 1, Petr in 3..4, Eva in 3..4
 - `all_different([Jan,Petr,Anna,Ota,Eva,Marie])`
Jan in 3..6, Petr in 3..4, Anna in 2..5,
Ota in 2..4, Eva in 3..4, Marie in 1..6

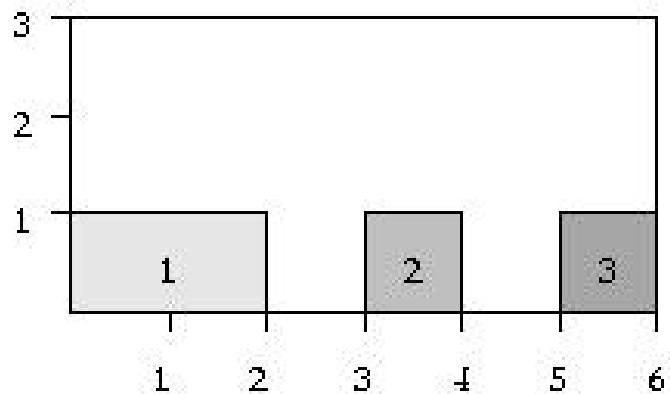
učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

Disjunktivní rozvrhování (unární zdroj)

- `cumulative([task(Start, Duration, End, 1, Id) | Tasks])`
- Rozvržení úloh zadaných startovním a koncovým časem (`Start, End`), dobou trvání (nezáporné `Duration`) a identifikátorem (`Id`) tak, aby se nepřekrývaly

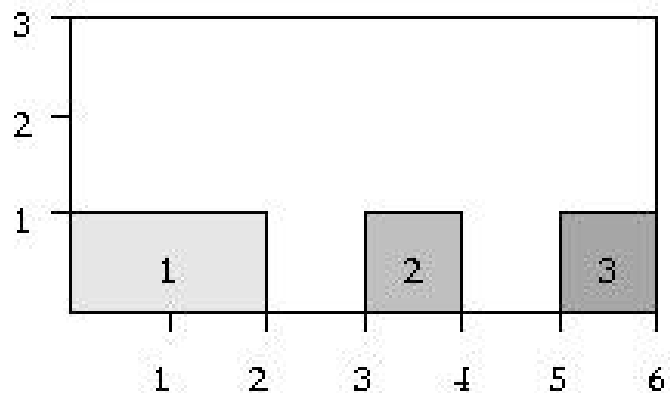
Disjunktivní rozvrhování (unární zdroj)

- `cumulative([task(Start, Duration, End, 1, Id) | Tasks])`
- Rozvržení úloh zadaných startovním a koncovým časem (Start, End), dobou trvání (nezáporné Duration) a identifikátorem (Id) tak, aby se nepřekrývaly
- příklad s konstantami: `cumulative([task(0,2,2,1,1), task(3,1,4,1,2), task(5,1,6,1,3)])`



Disjunktivní rozvrhování (unární zdroj)

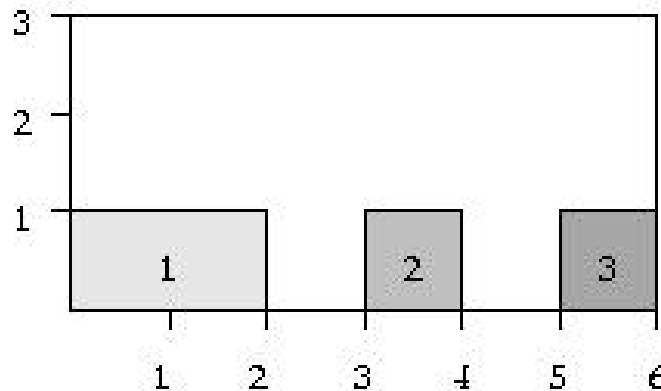
- `cumulative([task(Start, Duration, End, 1, Id) | Tasks])`
- Rozvržení úloh zadaných startovním a koncovým časem (Start, End), dobou trvání (nezáporné Duration) a identifikátorem (Id) tak, aby se nepřekrývaly
- příklad s konstantami: `cumulative([task(0,2,2,1,1), task(3,1,4,1,2), task(5,1,6,1,3)])`



- příklad: vytvoření rozvrhu, za předpokladu, že **doba trvání hodin není stejná**

Disjunktivní rozvrhování (unární zdroj)

- `cumulative([task(Start, Duration, End, 1, Id) | Tasks])`
- Rozvržení úloh zadaných startovním a koncovým časem (Start, End), dobou trvání (nezáporné Duration) a identifikátorem (Id) tak, aby se nepřekrývaly
- příklad s konstantami: `cumulative([task(0,2,2,1,1), task(3,1,4,1,2), task(5,1,6,1,3)])`



- příklad: vytvoření rozvrhu, za předpokladu, že **doba trvání hodin není stejná**

JanE#= Jan+3, PetrE#= Petr+1, AnnaE#= Anna+2, ...

```
cumulative(task(Jan, 3, JanE, 1, 1), task(Petr, 1, PetrE, 1, 2), task(Anna, 2, AnnaE, 1, 3),  
task(Ota, 2, OtaE, 1, 4), task(Eva, 2, EvaE, 1, 5), task(Marie, 3, MarieE, 1, 6)])
```

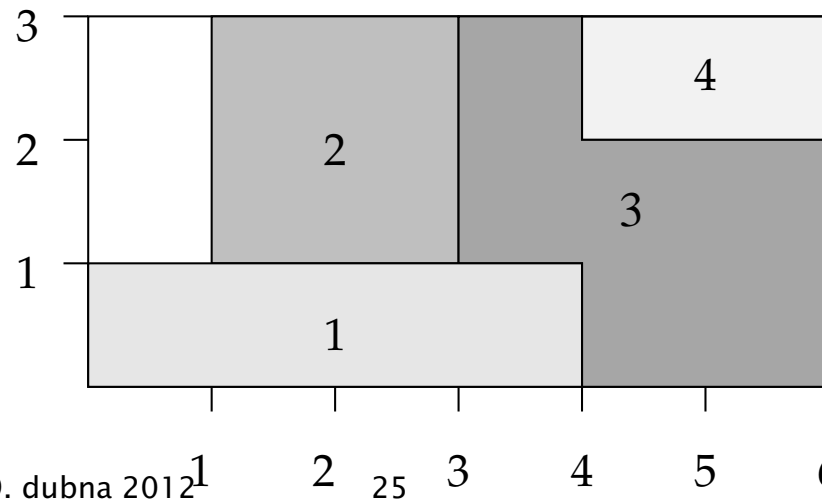
Kumulativní rozvrhování

- `cumulative([task(Start,Duration,End,Demand,TaskId) | Tasks], [limit(Limit)])`
- Rozvržení úloh zadaných startovním a koncovým časem (`Start`, `End`), dobou trvání (nezáporné `Duration`), požadovanou kapacitou zdroje (`Demand`) a identifikátorem (`Id`) tak, aby se nepřekrývaly a aby celková kapacita zdroje nikdy nepřekročila `Limit`

Kumulativní rozvrhování

- `cumulative([task(Start,Duration,End,Demand,TaskId) | Tasks], [limit(Limit)])`
- Rozvržení úloh zadaných startovním a koncovým časem (Start, End), dobou trvání (nezáporné Duration), požadovanou kapacitou zdroje (Demand) a identifikátorem (Id) tak, aby se nepřekrývaly a aby celková kapacita zdroje nikdy nepřekročila Limit
- Příklad s konstantami:

```
cumulative([task(0,4,4,1,1), task(1,2,3,2,2), task(3,3,6,2,3), task(4,2,6,1,4)], [limit(3)])
```



Kumulativní rozvrhování s více zdroji

- Rozvržení úloh tak, aby se nepřekrývaly a daná kapacita zdrojů nebyla překročena (limit zdroje chápán jako horní mez – `bound(upper)`)
- `cumulatives([task(Start,Duration,End,Demand,MachineId) | Tasks],
[machine(Id,Limit) | Machines], [bound(upper)])`
- Úlohy zadány startovním a koncovým časem (`Start`, `End`), dobou trvání (nezáporné `Duration`), požadovanou kapacitou zdroje (`Demand`) a požadovaným typem zdroje (`MachineId`)
- Zdroje zadány identifikátorem (`Id`) a kapacitou (`Limit`)

Kumulativní rozvrhování s více zdroji

- Rozvržení úloh tak, aby se nepřekrývaly a daná kapacita zdrojů nebyla překročena (limit zdroje chápán jako horní mez – `bound(upper)`)
- `cumulatives([task(Start,Duration,End,Demand,MachineId) | Tasks],
[machine(Id,Limit) | Machines], [bound(upper)])`
- Úlohy zadány startovním a koncovým časem (`Start`, `End`), dobou trvání (nezáporné `Duration`), požadovanou kapacitou zdroje (`Demand`) a požadovaným typem zdroje (`MachineId`)
- Zdroje zadány identifikátorem (`Id`) a kapacitou (`Limit`)
- Příklad:
?- `domain([B,C],1,2),
cumulatives([task(0,4,4,1,1),task(3,1,4,1,B), task(5,1,6,1,C)],
[machine(1,1),machine(2,1)],
[bound(upper)]).` `C in 1..2, B=2`

Příklad: kumulativní rozvrhování

- Vytvořte rozvrh pro následující úlohy, tak aby nebyla překročena kapacita 13 zdrojů, a **minimalizujte** celkovou dobu trvání

úloha	doba trvání	kapacita
t1	16	2
t2	6	9
t3	13	3
t4	7	7
t5	5	10
t6	18	1
t7	4	11

Příklad: kumulativní rozvrhování

- Vytvořte rozvrh pro následující úlohy, tak aby nebyla překročena kapacita 13 zdrojů, a **minimalizujte** celkovou dobu trvání

úloha	doba trvání	kapacita
t1	16	2
t2	6	9
t3	13	3
t4	7	7
t5	5	10
t6	18	1
t7	4	11

Řešení: kumulativní rozvrhování

| ?- schedule(13, [16,6,13,7,5,18,4], [2,9,3,7,10,1,11], 69, Ss, End).

Ss = [0,16,9,9,4,4,0], End = 22 ?

Řešení: kumulativní rozvrhování

| ?- schedule(13, [16,6,13,7,5,18,4], [2,9,3,7,10,1,11], 69, Ss, End).

Ss = [0,16,9,9,4,4,0], End = 22 ?

schedule(Limit, Ds, Rs, MaxCas, Ss, End) :-

Řešení: kumulativní rozvrhování

| ?- schedule(13, [16,6,13,7,5,18,4], [2,9,3,7,10,1,11], 69, Ss, End).

Ss = [0,16,9,9,4,4,0], End = 22 ?

```
schedule(Limit, Ds, Rs, MaxCas, Ss, End) :-  
    domain(Ss, 0, MaxCas), End in 0..MaxCas,
```


Řešení: kumulativní rozvrhování

```
| ?- schedule(13, [16,6,13,7,5,18,4], [2,9,3,7,10,1,11], 69, Ss, End).
```

```
Ss = [0,16,9,9,4,4,0], End = 22 ?
```

```
schedule(Limit, Ds, Rs, MaxCas, Ss, End) :-  
    domain(Ss, 0, MaxCas), End in 0..MaxCas,  
    vytvor_u_lohy(Ss,Ds,Rs,1,Tasks),
```

Řešení: kumulativní rozvrhování

```
| ?- schedule(13, [16,6,13,7,5,18,4], [2,9,3,7,10,1,11], 69, Ss, End).
```

```
Ss = [0,16,9,9,4,4,0], End = 22 ?
```

```
schedule(Limit, Ds, Rs, MaxCas, Ss, End) :-  
    domain(Ss, 0, MaxCas), End in 0..MaxCas,  
    vytvor_u_lohy(Ss,Ds,Rs,1,Tasks),  
    cumulative(Tasks, [limit(Limit)]),
```

Řešení: kumulativní rozvrhování

```
| ?- schedule(13, [16,6,13,7,5,18,4], [2,9,3,7,10,1,11], 69, Ss, End).
```

```
Ss = [0,16,9,9,4,4,0], End = 22 ?
```

```
schedule(Limit, Ds, Rs, MaxCas, Ss, End) :-  
    domain(Ss, 0, MaxCas), End in 0..MaxCas,  
    vytvor_u_lohy(Ss,Ds,Rs,1,Tasks),  
    cumulative(Tasks, [limit(Limit)]),  
    after(Ss, Ds, End),      % koncový čas
```

Řešení: kumulativní rozvrhování

```
| ?- schedule(13, [16,6,13,7,5,18,4], [2,9,3,7,10,1,11], 69, Ss, End).
```

```
Ss = [0,16,9,9,4,4,0], End = 22 ?
```

```
schedule(Limit, Ds, Rs, MaxCas, Ss, End) :-  
    domain(Ss, 0, MaxCas), End in 0..MaxCas,  
    vytvor_u_lohy(Ss,Ds,Rs,1,Tasks),  
    cumulative(Tasks, [limit(Limit)]),  
    after(Ss, Ds, End),      % koncový čas  
    append(Ss, [End], Vars),
```

Řešení: kumulativní rozvrhování

```
| ?- schedule(13, [16,6,13,7,5,18,4], [2,9,3,7,10,1,11], 69, Ss, End).
```

```
Ss = [0,16,9,9,4,4,0], End = 22 ?
```

```
schedule(Limit, Ds, Rs, MaxCas, Ss, End) :-  
    domain(Ss, 0, MaxCas), End in 0..MaxCas,  
    vytvor_u_lohy(Ss,Ds,Rs,1,Tasks),  
    cumulative(Tasks, [limit(Limit)]),  
    after(Ss, Ds, End),      % koncový čas  
    append(Ss, [End], Vars),  
    labeling([minimize(End)],Vars).
```

Řešení: kumulativní rozvrhování

```
| ?- schedule(13, [16,6,13,7,5,18,4], [2,9,3,7,10,1,11], 69, Ss, End).
```

```
Ss = [0,16,9,9,4,4,0], End = 22 ?
```

```
schedule(Limit, Ds, Rs, MaxCas, Ss, End) :-  
    domain(Ss, 0, MaxCas), End in 0..MaxCas,  
    vytvor_ulohy(Ss,Ds,Rs,1,Tasks),  
    cumulative(Tasks, [limit(Limit)]),  
    after(Ss, Ds, End),      % koncový čas  
    append(Ss, [End], Vars),  
    labeling([minimize(End)],Vars).
```

```
vytvor_ulohy([], [], [], _Id, []).
```

```
vytvor_ulohy([S|Ss], [D|Ds], [R|Rs], Id, [task(S,D,E,R,Id)|Tasks]) :-  
    NewId is Id+1,  
    E #= S+D,  
    vytvor_ulohy(Ss,Ds,Rs, NewId,Tasks).
```

Řešení: kumulativní rozvrhování

```
| ?- schedule(13, [16,6,13,7,5,18,4], [2,9,3,7,10,1,11], 69, Ss, End).
```

```
Ss = [0,16,9,9,4,4,0], End = 22 ?
```

```
schedule(Limit, Ds, Rs, MaxCas, Ss, End) :-  
    domain(Ss, 0, MaxCas), End in 0..MaxCas,  
    vytvor_ulohy(Ss,Ds,Rs,1,Tasks),  
    cumulative(Tasks, [limit(Limit)]),  
    after(Ss, Ds, End),      % koncový čas  
    append(Ss, [End], Vars),  
    labeling([minimize(End)],Vars).
```

```
vytvor_ulohy([], [], [], _Id, []).
```

```
vytvor_ulohy([S|Ss], [D|Ds], [R|Rs], Id, [task(S,D,E,R,Id)|Tasks]) :-  
    NewId is Id+1,  
    E #= S+D,  
    vytvor_ulohy(Ss,Ds,Rs, NewId,Tasks).
```

```
after([], [], _).
```

```
after([S|Ss], [D|Ds], End) :- E #>= S+D, after(Ss, Ds, End).
```