Logické programování
s omezujícími podmínkami
Constraint Logic Programming: CLP

CP: elektronické materiály

- Dechter, R. **Constraint Processing.** Morgan Kaufmann Publishers, 2003.
  - `http://www.ics.uci.edu/~dechter/books/materials.html`
    průsvitky ke knize
- Barták R. **Přednáška Omezující podmínky na MFF UK, Praha**.
  - `http://kti.ms.mff.cuni.cz/~bartak/podminky/index.html`
- **SICStus Prolog User's Manual**. Kapitola o CLP(FD).
  - `http://www.fi.muni.cz/~hanka/sicstus/doc/html/`
- **Příklady v distribuci SICStus Prologu**: cca 60 příkladů, zdrojový kód
  - `lib/sicstus-*/library/clpfd/examples/`

Probírané oblasti

- Obsah
  - úvod: od LP k CLP
  - základy programování
  - základní algoritmy pro řešení problémů s omezujícími podmínkami
- Příbuzné přednášky na FI
  - PA163 Programování s omezujícími podmínkami
    - viz interaktivní osnova IS
  - PA167 Rozvrhování
    - `http://www.fi.muni.cz/~hanka/rozvrhovani`
    - zahrnuty CP techniky pro řešení rozvrhovacích problémů

Omezení (*constraint*)

- Dána
  - množina **(doménových) proměnných** $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$
  - **konečná** množina hodnot (**doména**) $D = \{D_1, \ldots, D_k\}$

  Omezení c na Y je podmnožina $D_1 \times \ldots \times D_k$
  - omezuje hodnoty, kterých mohou proměnné nabývat současně
- Příklad:
  - proměnné: A,B
  - domény: {0,1} pro A {1,2} pro B
  - omezení: A≠B nebo (A,B) ∈ {(0,1),(0,2),(1,2)}
- Omezení c definováno na $y_1, \ldots y_k$ je **splněno**, pokud pro $d_1 \in D_1, \ldots d_k \in D_k$ platí $(d_1, \ldots d_k) \in c$
  - příklad (pokračování): omezení splněno pro $(0,1), (0,2), (1,2)$, není splněno pro $(1,1)$

Problém splňování podmínek (CSP)

- Dána
  - konečná množina **proměnných** $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$
  - konečná množina hodnot (**doména**) $D = \{D_1, \ldots, D_n\}$
  - konečná množina **omezení** $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$
    - omezení je definováno na podmnožině X

  Problém splňování podmínek je trojice (X, D, C)
  (constraint satisfaction problem)
- Příklad:
  - proměnné: A,B,C
  - domény: {0,1} pro A {1,2} pro B {0,2} pro C
  - omezení: A≠B, B≠C

Řešení CSP

- **Částečné ohodnocení proměnných** $(d_1, \ldots, d_k), k < n$
  - některé proměnné mají přiřazenu hodnotu
- **Úplné ohodnocení proměnných** $(d_1, \ldots, d_n)$
  - všechny proměnné mají přiřazenu hodnotu
- **Řešení CSP**
  - úplné ohodnocení proměnných, které splňuje všechna omezení
  - $(d_1, \ldots, d_n) \in D_1 \times \ldots \times D_n$ je **řešení** (X, D, C)
    - pro každé $c_i \in C$ na $x_{i_1}, \ldots x_{i_k}$ platí $(d_{i_1}, \ldots d_{i_k}) \in c_i$
- Hledáme: jedno nebo
  všechna řešení nebo
  optimální řešení (vzhledem k objektivní funkci)

Příklad: jednoduchý školní rozvrh

- **proměnné:** `Jan, Petr, ...`
- **domény:** $\{3,4,5,6\}, \{3,4\}, \ldots$
- **omezení:** `all_distinct([Jan,Petr,...])`
- **částečné ohodnocení:** `Jan=6, Anna=5, Marie=1`
- **úplné ohodnocení:**
  `Jan=6, Petr=3, Anna=5, Ota=2, Eva=4,` **Marie=6**
- **řešení CSP:**
  `Jan=6, Petr=3, Anna=5, Ota=2, Eva=4, Marie=1`
- **všechna řešení:** ještě `Jan=6,` **Petr=4**`, Anna=5, Ota=2,` **Eva=3,** `Marie=1`
- optimálizace: ženy učí co nejdříve
  `Anna+Eva+Marie #= Cena` minimalizace hodnoty proměnné Cena
  optimální řešení: `Jan=6,` **Petr=4,** `Anna=5, Ota=2,` **Eva=3,** `Marie=1`

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

CLP(FD) program

- Základní struktura **CLP programu**
  1. definice proměnných a jejich domén
  2. definice omezení
  3. hledání řešení
- (1) a (2) deklarativní část
  - **modelování** problému
  - vyjádření problému splňování podmínek
- (3) řídící část
  - **prohledávání** stavového prostoru řešení
  - procedura pro hledání řešení (enumeraci) se nazývá **labeling**
  - umožní nalézt jedno, všechna nebo optimální řešení

Kód CLP(FD) programu

```
% základní struktura CLP programu
solve( Variables ) :-
     declare_variables( Variables ),          domain([Jan],3,6], ...
     post_constraints( Variables ),           all_distinct([Jan,Petr,...])
     labeling( Variables ).

% triviální labeling
labeling( [] ).
labeling( [Var|Rest]  ) :-
     fd_min(Var,Min),                  % výběr nejmenší hodnoty z domény
     ( Var#=Min, labeling( Rest )
     ;
       Var#>Min , labeling( [Var|Rest] )
     ).
```


Příklad: algebrogram

- Přiřad'te cifry 0, . . . 9 písmenům S, E, N, D, M, O, R, Y tak, aby platilo:
  - SEND + MORE = MONEY
  - různá písmena mají přiřazena různé cifry
  - S a M nejsou 0
- `domain([E,N,D,O,R,Y], 0, 9), domain([S,M],1,9)`
-
```
                1000*S + 100*E + 10*N + D
+               1000*M + 100*O + 10*R + E
#=   10000*M + 1000*O + 100*N + 10*E + Y
```
- `all_distinct( [S,E,N,D,M,O,R,Y] )`
- `labeling( [S,E,N,D,M,O,R,Y] )`

Od LP k CLP I.

- CLP: rozšíření logického programování o omezující podmínky
- CLP systémy se liší podle typu domény
  - **CLP($\mathcal{A}$)** generický jazyk
  - **CLP(FD)** domény proměnných jsou konečné *(Finite Domains)*
  - **CLP($\mathbb{R}$)** doménou proměnných je množina reálných čísel
- Cíl
  - využít syntaktické a výrazové přednosti LP
  - dosáhnout větší efektivity
- **Unifikace v LP je nahrazena splňováním podmínek**
  - unifikace se chápe jako **jedna z** podmínek
  - `A = B`
  - `A #< B`, `A in 0..9`, `domain([A,B],0,9)`, `all_distinct([A,B,C])`

Od LP k CLP II.

- Pro řešení podmínek se používají **konzistenční techniky**
  - ***consistency techniques*, propagace omezení *(constraint propagation)***
  - omezení: `A in 0..2, B in 0..2, B #< A`

    domény po propagaci omezení `B #< A`: `A in 1..2, B in 0..1`
- Podmínky jsou deterministicky vyhodnoceny v okamžiku volání podmínky
- **Prohledávání doplněno konzistenčními technikami**
  - `A in 1..2, B in 0..1, B #< A`
  - po provedení `A #= 1` se z `B #< A` se odvodí: `B #= 0`
- **Podmínky jako výstup**
  - kompaktní reprezentace nekonečného počtu řešení, výstup lze použít jako vstup
  - dotaz: `A in 0..2, B in 0..2, B #< A`

    výstup: `A in 1..2, B in 0..1, B #< A`

Syntaxe CLP

- Výběr jazyka omezení
- CLP klauzule

  jako LP klauzule, ale její tělo může obsahovat omezení daného jazyka

```
p(X,Y) :- X #< Y+1, q(X), r(X,Y,Z).
```

- Rezoluční krok v LP
  - kontrola existence nejobecnějšího unifikátoru (MGU) mezi cílem a hlavou
- Krok odvození v CLP také zahrnuje
  - kontrola konzistence aktuální množiny omezení s omezeními v těle klauzule

⇒ Vyvolání dvou řešičů: unifikace + řešič omezení

Operační sémantika CLP

- CLP výpočet cíle G
  - $Store$ množina aktivních omezení ≡ **prostor omezení *(constraint store)***
  - inicializace $Store = \emptyset$
  - seznamy cílů v G prováděny v obvyklém pořadí
  - pokud narazíme na cíl s omezením c: $NewStore = Store \cup \{c\}$
  - snažíme se splnit c vyvoláním jeho řešiče
    - při neúspěchu se vyvolá backtracking
    - při úspěchu se podmínky v $NewStore$ zjednoduší propagací omezení
  - zbývající cíle jsou prováděny s upraveným $NewStore$
- CLP výpočet cíle G je úspěšný, pokud se dostaneme z iniciálního stavu $\langle G, \emptyset\rangle$ do stavu $\langle G', Store\rangle$, kde G' je prázdný cíl a $Store$ je splnitelná.

CLP(FD) v SICStus Prologu

Systémy a jazyky pro CP

- **IBM ILOG CP** 1987
  - omezující podmínky v C++, Jave nebo generickém modelovacím jazyku OPL
  - implementace podmínek založena na objektově orientovaném programování
  - špičkový komerční sw, vznikl ve Francii, nedávno zakoupen IBM
  - nyní nově volně dostupný pro akademické použití
- **Swedish Institute of Computer Science: SICStus Prolog** 1985
  - silná CLP(FD) knihovna, komerční i akademické použití
- **IC-PARC, Imperial College London, Cisco Systems: ECL^{i}PS^e** 1984
  - široké možnosti kooperace mezi různými řešičemi: konečné domény, reálná čísla, `repair`
  - od 2004 vlastní Cisco Systems volně dostupné pro akademické použití, rozvoj na IC-PARC, platformy: Windows, Linux, Solaris
- Mnoho dalších systémů: Choco, Gecode, Minion, Oz, SWI Prolog, ...

CLP(FD) v SICStus Prologu

- Vestavěné predikáty jsou dostupné v separátním modulu (knihovně)
  `:- use_module(library(clpfd)).`
- Obecné principy platné všude nicméně standarty jsou nedostatečné
  - stejné/podobné vestavěné predikáty existují i jinde
  - CLP knihovny v SWI Prologu i ECLiPSe se liší

Příslušnost k doméně: `Range` termy

- `?- domain( [A,B], 1,3).` `domain( +Variables, +Min, +Max)`
  `A in 1..3`
  `B in 1..3`
- `?- A in 1..8, A #\= 4.` `?X in +Min..+Max`
  `A in (1..3) \/ (5..8)`
- Doména reprezentována jako posloupnost intervalů celých čísel
- `?- A in (1..3) \/ (8..15) \/ (5..9) \/ {100}.` `?X in +Range`
  `A in (1..3) \/ (5..15) \/ {100}`
- Zjištění domény Range proměnné `Var`: `fd_dom(?Var,?Range)`
  - `A in 1..8, A #\= 4, fd_dom(A,Range).` `Range=(1..3) \/ (5..8)`
  - `A in 2..10, fd_dom(A,(1..3) \/ (5..8)).` `no`
- Range term: reprezentace nezávislá na implementaci

Příslušnost k doméně: `FDSet` termy

- FDSet term: reprezentace závislá na implementaci
- `?- A in 1..8, A #\= 4, fd_set(A,FDSet).` `fd_set(?Var,?FDSet)`
  `A in (1..3) \/ (5..8)`
  `FDSet = [[1|3],[5|8]]`
- `?- A in 1..8,A #\= 4, fd_set(A,FDSet),B in_set FDSet.` `?X in_set +FDSet`
  `A in (1..3) \/  (5..8)`
  `FDSet = [[1|3],[5|8]]`
  `B in (1..3) \/  (5..8)`
- FDSet termy představují nízko-úrovňovou implementaci
- FDSet termy nedoporučeny v programech
  - používat pouze predikáty pro manipulaci s nimi
  - omezit použití `A in_set [[1|2],[6|9]]`
- Range termy preferovány

Další `fd_...` predikáty

- `fdset_to_list(+FDset, -List)` vrací do seznamu prvky FDset
- `list_to_fdset(+List, -FDset)` vrací FDset odpovídající seznamu
- `fd_var(?Var)` je `Var` doménová proměnná?
- `fd_min(?Var,?Min)` nejmenší hodnota v doméně
- `fd_max(?Var,?Max)` největší hodnota v doméně
- `fd_size(?Var,?Size)` velikost domény
- `fd_degree(?Var,?Degree)` počet navázaných omezení na proměnné
  - mění se během výpočtu: pouze aktivní omezení, i odvozená aktivní omezení

Aritmetická omezení

- `Expr RelOp Expr`   `RelOp -> #= | #\= | #< | #=< | #> | #>=`
  - `A + B #=< 3, A #\= (C - 4) * ( D - 5), A/2 #= 4`
  - POZOR: neplést #=< a #>= s operátory pro implikaci: #<= #=>
- `sum(Variables,RelOp,Suma)`
  - `domain([A,B,C,F],1,3), sum([A,B,C],#= ,F)`
  - `Variables` i Suma musí být doménové proměnné nebo celá čísla
- `scalar_product(Coeffs,Variables,RelOp,ScalarProduct)`
  - `domain([A,B,C,F],1,6), scalar_product( [1,2,3],[A,B,C],#= ,F)`
  - `Variables` i `Value` musí být doménové proměnné nebo celá čísla, `Coeffs` jsou celá čísla
  - POZOR na pořadí argumentů, nejprve jsou celočíselné koeficienty, pak dom. proměnné
  - `scalar_product(Coeffs, Variables, #= , Value, [consistency(domain)])`
    - silnější typ konzistence
    - POZOR: domény musí mít konečné hranice

Základní globální omezení

- `all_distinct(List)`
  - všechny proměnné různé
- `cumulative(...)`
  - disjunktivní a kumulativní rozvrhování
- `cumulatives(...)`
  - kumulativní rozvrhování na více zdrojů

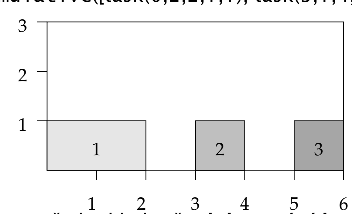
Všechny proměnné různé

- `all_distinct(Variables)`, `all_different(Variables)`
- Proměnné v seznamu `Variables` jsou různé
- `all_distinct` a `all_different` se liší úrovní propagace
  - `all_distinct` má úplnou propagaci
  - `all_different` má slabší (neúplnou) propagaci
- Příklad: učitelé musí učit v různé hodiny
  - `all_distinct([Jan,Petr,Anna,Ota,Eva,Marie])`
    `Jan = 6, Ota = 2, Anna = 5,`
    `Marie = 1, Petr in 3..4, Eva in 3..4`
  - `all_different([Jan,Petr,Anna,Ota,Eva,Marie])`
    `Jan in 3..6, Petr in 3..4, Anna in 2..5,`
    `Ota in 2..4, Eva in 3..4, Marie in 1..6`

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

Disjunktivní rozvrhování (unární zdroj)

- `cumulative([task(Start, Duration, End, 1, Id) | Tasks])`
- Rozvržení úloh zadaných startovním a koncovým časem (`Start,End`), dobou trvání (nezáporné `Duration`) a identifikátorem (`Id`) tak, aby se nepřekrývaly
  - příklad s konstantami: `cumulative`([task(0,2,2,1,1), task(3,1,4,1,2), task(5,1,6,1,3)])



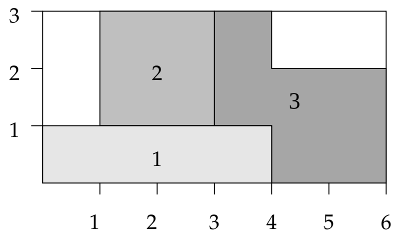
  - příklad: vytvoření rozvrhu, za předpokladu, že **doba trvání hodin není stejná**

```
JanE#= Jan+3, PetrE#= Petr+1, AnnaE#= Anna+2, ...
cumulative(task(Jan,3,JanE,1,1),task(Petr,1,PetrE,1,2),task(Anna,2,AnnaE,1,
  task(Ota,2,OtaE,1,4),task(Eva,2,EvaE,1,5),task(Marie,3,MarieE,1,6)])
```

Kumulativní rozvrhování

- `cumulative([task(Start,Duration,End,Demand,TaskId) | Tasks],`
  `[limit(Limit)])`
- Rozvržení úloh zadaných startovním a koncovým časem (`Start`,`End`), dobou trvání (nezáporné `Duration`), požadovanou kapacitou zdroje (`Demand`) a identifikátorem (`Id`) tak, aby se nepřekrývaly a aby celková kapacita zdroje nikdy nepřekročila `Limit`
- Příklad s konstantami:

```
cumulative([task(0,4,4,1,1),task(1,2,3,2,2),task(3,3,6,2,3),task(4,2,6,1,4)],[limit(3)])
```



Kumulativní rozvrhování s více zdroji

- Rozvržení úloh tak, aby se nepřekrývaly a daná kapacita zdrojů nebyla překročena (limit zdroje chápán jako horní mez – `bound(upper)`)
- `cumulatives([task(Start,Duration,End,Demand,MachineId)|Tasks],`
  `[machine(Id,Limit)|Machines],[bound(upper)])`
- Úlohy zadány startovním a koncovým časem (`Start`,`End`), dobou trvání (nezáporné `Duration`), požadovanou kapacitou zdroje (`Demand`) a požadovaným typem zdroje (`MachineId`)
- Zdroje zadány identifikátorem (`Id`) a kapacitou (`Limit`)
- Příklad:

```
?- domain([B,C],1,2),
   cumulatives([task(0,4,4,1,1),task(3,1,4,1,B), task(5,1,6,1,C)],
               [machine(1,1),machine(2,1)],
               [bound(upper)]).                    C in 1..2, B=2
```


Příklad: kumulativní rozvrhování

- Vytvořte rozvrh pro následující úlohy, tak aby nebyla překročena kapacita 13 zdroje, a **minimalizujte** celkovou dobu trvání

úloha	doba trvání	kapacita
t1	16	2
t2	6	9
t3	13	3
t4	7	7
t5	5	10
t6	18	1
t7	4	11

Řešení: kumulativní rozvrhování

```
| ?-  schedule(13, [16,6,13,7,5,18,4], [2,9,3,7,10,1,11], 69, Ss, End).
Ss = [0,16,9,9,4,4,0], End = 22 ?

schedule(Limit, Ds, Rs, MaxCas, Ss, End) :-
    domain(Ss, 0, MaxCas), End in 0..MaxCas,
    vytvor_ulohy(Ss,Ds,Rs,1,Tasks),
    cumulative(Tasks, [limit(Limit)]),
    after(Ss, Ds, End),      % koncový čas
    append(Ss, [End], Vars),
    labeling([minimize(End)],Vars).

vytvor_ulohy([],[],[],_Id,[]).
vytvor_ulohy([S|Ss], [D|Ds], [R|Rs], Id, [task(S,D,E,R,Id)|Tasks]):-
      NewId is Id+1,
      E #= S+D,
      vytvor_ulohy(Ss,Ds,Rs, NewId,Tasks).

after([], [], _).
after([S|Ss], [D|Ds], End) :- E #>= S+D, after(Ss, Ds, End).
```