Algoritmy pro CSP
(pokračování)

Prohledávání + konzistence

- Splňování podmínek **prohledáváním** prostoru řešení
  - podmínky jsou užívány pasivně jako test
  - přiřazuji hodnoty proměnných a zkouším co se stane
  - vestavěný prohledávací algoritmus Prologu: **backtracking**, triviální: **generuj & testuj**
  - úplná metoda (nalezneme řešení nebo dokážeme jeho neexistenci)
  - zbytečně pomalé (exponenciální): procházím i „evidentně" špatná ohodnocení
- **Konzistenční (propagační) techniky**
  - umožňují odstranění nekonzistentních hodnot z domény proměnných
  - neúplná metoda (v doméně zůstanou ještě nekonzistentní hodnoty)
  - relativně rychlé (polynomiální)
- Používá se **kombinace obou metod**
  - postupné přiřazování hodnot proměnným
  - po přiřazení hodnoty odstranění nekonzistentních hodnot konzistenčními technikami

Prohledávání do hloubky

- Základní prohledávací algoritmus pro problémy splňování podmínek
- **Prohledávání stavového prostoru do hloubky *(depth first search)***
- Dvě fáze prohledávání s navracením
  - **dopředná fáze**: proměnné jsou postupně vybírány, rozšiřuje se částečné řešení přiřazením konzistení hodnoty (pokud existuje) další proměnné
    - po vybrání hodnoty testujeme konzistenci
  - **zpětná fáze**: pokud neexistuje konzistentní hodnota pro aktuální proměnnou, algoritmus se vrací k předchozí přiřazené hodnotě
- Proměnné dělíme na
  - **minulé** – proměnné, které už byly vybrány (a mají přiřazenu hodnotu)
  - **aktuální** – proměnná, která je právě vybrána a je jí přiřazována hodnota
  - **budoucí** – proměnné, které budou vybrány v budoucnosti

Základní algoritmus prohledávání do hloubky

- Pro jednoduchost proměnné očíslujeme a ohodnocujeme je v daném pořadí
- Na začátku voláno jako `labeling(G,1)`

```
procedure labeling(G,a)
if a > |uzly(G)| then return uzly(G)
for ∀x ∈ D_a do
    if consistent(G,a) then   % consistent(G,a) je nahrazeno FC(G,a), LA(G,a)
       R := labeling(G,a+1)
       if R ≠ fail then return R
return fail
end labeling
```

Po přiřazení všech proměnných vrátíme jejich ohodnocení

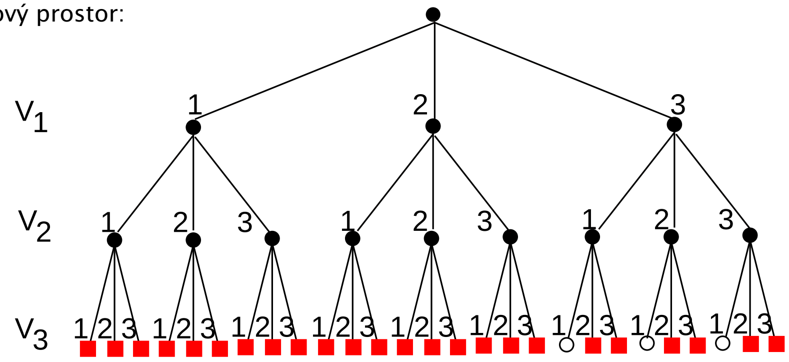
- Procedury `consistent` uvedeme pouze pro binární podmínky

Backtracking (BT)

- Backtracking ověřuje v každém kroku konzistenci podmínek vedoucích z minulých proměnných do aktuální proměnné
- Backtracking tedy zajišťuje konzistenci podmínek
  - na všech minulých proměnných
  - na podmínkách mezi minulými proměnnými a aktuální proměnnou
- procedure BT(G,a)
  Q:=$\{(V_i, V_a) \in$ hrany(G), $i < a\}$ % hrany vedoucí z minulých proměnných do aktuální
  Consistent := true
  while Q není prázdná $\wedge$ Consistent do
  vyber a smaž libovolnou hranu (V_k, V_m) z Q
  Consistent := not revise(V_k, V_m) % pokud vyřadíme prvek, bude doména prázdná
  return Consistent
  end BT

Příklad: backtracking

- Omezení: V_1, V_2, V_3 in $1 \ldots 3$, $V_1\# = 3 \times V_3$
- Stavový prostor:



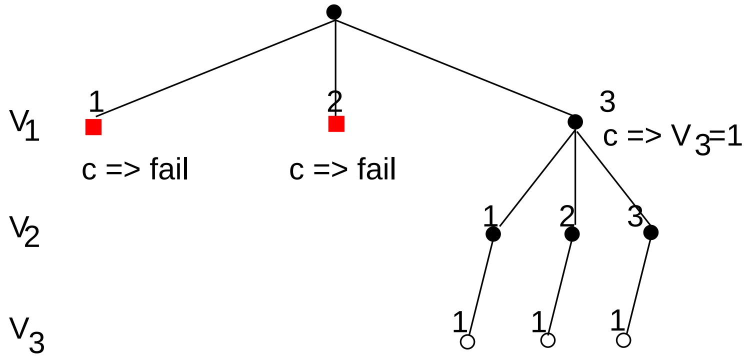
- červené čtverečky: chybný pokus o instanciaci, řešení neexistuje
- nevyplněná kolečka: nalezeno řešení
- černá kolečka: vnitřní uzel, máme pouze částečné přiřazení

Kontrola dopředu *(FC – forward checking)*

- FC je rozšíření backtrackingu
- FC navíc zajišťuje konzistenci mezi aktuální proměnnou a budoucími proměnnými, které jsou s ní spojeny dosud nesplněnými podmínkami
- procedure FC(G,a)
  Q:=$\{(V_i, V_a) \in$ hrany(G), $i > a\}$ % přidání hran z budoucích do aktuální proměnné
  Consistent := true
  while Q není prázdná $\wedge$ Consistent do
  vyber a smaž libovolnou hranu (V_k, V_m) z Q
  if revise((V_k, V_m)) then
  Consistent := $(|D_k| > 0)$ % vyprázdnění domény znamená nekonzistenci
  return Consistent
  end FC
- Hrany z minulých proměnných do aktuální proměnné není nutno testovat

Příklad: kontrola dopředu

- Omezení: V_1, V_2, V_3 in $1 \ldots 3$, $c : V_1\# = 3 \times V_3$
- Stavový prostor:



Pohled dopředu *(LA – looking ahead)*

- LA je rozšíření FC, navíc ověřuje konzistenci hran mezi budoucími proměnnými
- procedure LA(G,a)

  Q := $\{(V_i, V_a) \in$ hrany(G), $i > a\}$ % začínáme s hranami do a

  Consistent := true

  while Q není prázdná $\wedge$ Consistent do

      vyber a smaž libovolnou hranu (V_k, V_m) z Q

      if revise((V_k, V_m)) then

          Q := Q $\cup$ $\{(V_i, V_k) | (V_i, V_k) \in$ hrany(G), $i \neq k, i \neq m, i > a\}$

          Consistent := $(|D_k| > 0)$

  return Consistent

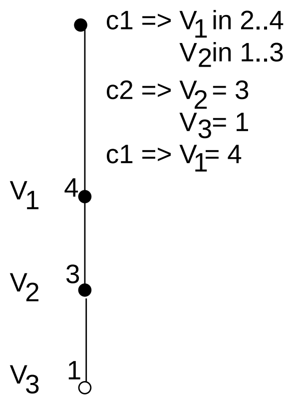
  end LA

  - Hrany z minulých proměnných do aktuální proměnné opět netestujeme
  - Tato LA procedura je založena na AC-3, lze použít i jiné AC algoritmy
- **LA udržuje hranovou konzistenci:** protože ale LA(G,a) používá AC-3, musíme **zajistit iniciální konzistenci** pomocí AC-3 ještě před startem prohledávání

Příklad: pohled dopředu (pomocí AC-3)

- Omezení: V_1, V_2, V_3 in $1 \ldots 4$, $c1 : V_1 \# > V_2$, $c2 : V_2 \# = 3 \times V_3$
- Stavový prostor

  (spouští se iniciální konzistence se před startem prohledávání)



Přehled algoritmů

- **Backtracking (BT)** kontroluje v kroku a podmínky

  $c(V_1, V_a), \ldots, c(V_{a-1}, V_a)$

  z minulých proměnných do aktuální proměnné
- **Kontrola dopředu (FC)** kontroluje v kroku a podmínky

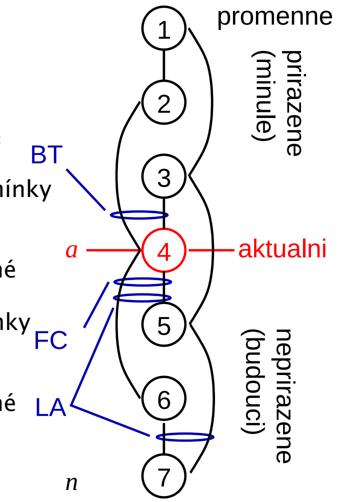
  $c(V_{a+1}, V_a), \ldots, c(V_n, V_a)$

  z budoucích proměnných do aktuální proměnné
- **Pohled dopředu (LA)** kontroluje v kroku a podmínky

  $\forall l (a \leq l \leq n), \forall k (a \leq k \leq n), k \neq l : c(V_k, V_l)$

  z budoucích proměnných do aktuální proměnné

  a mezi budoucími proměnnými



Cvičení

1. Jak vypadá stavový prostor řešení pro následující omezení

   A in 1..4, B in 3..4, C in 3..4, B #< C, A #= C

   při použití kontroly dopředu a uspořádání proměnných A,B,C? Popište, jaký typ propagace proběhne v jednotlivých uzlech.

2. Jak vypadá stavový prostor řešení pro následující omezení

   A in 1..4, B in 3..4, C in 3..4, B #< C, A #= C

   při použití pohledu dopředu a uspořádání proměnných A,B,C? Popište, jaký typ propagace proběhne v jednotlivých uzlech.

3. Jak vypadá stavový prostor řešení pro následující omezení

   domain([A,B,C],0,1), A #= B-1, C #= A*A

   při použití backtrackingu a pohledu dopředu a uspořádání proměnných A,B,C? Popište, jaký typ propagace proběhne v jednotlivých uzlech.

Cvičení

1. Jaká jsou pravidla pro konzistenci mezí u omezení X#= Y+5? Jaké typy propagací pak proběhnou v následujícím příkladě při použití konzistence mezí?

   X in 1..20, Y in 1..20, X #= Y + 5, Y #> 10.

2. Ukažte, jak je dosaženo hranové konzistence v následujícím příkladu:

   domain([X,Y,Z],1,5]), X #< Y, Z#= Y+1 .

Implementace Prologu

Literatura:

- Matyska L., Toman D.: Implementační techniky Prologu, Informační systémy, (1990), 21–59.
  `http://www.ics.muni.cz/people/matyska/vyuka/lp/lp.html`

Opakování: základní pojmy

- Konečná množina klauzulí `Hlava :- Tělo` tvoří **program P**.
- **`Hlava`** je literál
- **`Tělo`** je (eventuálně prázdná) konjunkce literálů $T_1, \dots T_a$, $a \geq 0$
- **Literál**
  je tvořen m-árním predikátovým symbolem (m/p) a m termy (argumenty)
- **Term** je konstanta, proměnná nebo složený term.
- **Složený term**
  s n termy na místě argumentů
- **Dotaz (cíl)** je neprázdná množina literálů.

Interpretace

Deklarativní sémantika:

Hlava platí, platí-li jednotlivé literály těla.

Procedurální (imperativní) sémantika:

```
Entry: Hlava::
{
   call T1
   ⋮
   call Ta
}
```

Volání procedury s názvem `Hlava` uspěje, pokud uspěje volání všech procedur (literálů) v těle.

Procedurální sémantika = podklad pro implementaci

Abstraktní interpret

Vstup: Logický program P a dotaz G.

1. Inicializuj množinu cílů S literály z dotazu G; S:=G
2. `while ( S != empty ) do`
3. Vyber A∈S a dále vyber klauzuli A':-B_1,...,B_n $(n \geq 0)$ z programu P takovou, že $\exists\sigma : A\sigma = A'\sigma$; σ je nejobecnější unifikátor.
   Pokud neexistuje A' nebo σ, ukonči cyklus.
4. Nahraď A v S cíli B_1 až B_n.
5. Aplikuj σ na G a S.
6. `end while`
7. Pokud S==`empty`, pak výpočet úspěšně skončil a výstupem je G se všemi aplikovanými substitucemi.
   Pokud S!=`empty`, výpočet končí neúspěchem.

Abstraktní interpret – pokračování

Kroky (3) až (5) představují **redukci** (logickou inferenci) cíle A.

Počet redukcí za sekundu (LIPS) == indikátor výkonu implementace

Věta

Existuje-li instance G' dotazu G, odvoditelná z programu P v konečném počtu kroků, pak bude tímto interpretem nalezena.

Nedeterminismus interpetu

1. **Selekční pravidlo:** výběr cíle A z množiny cílů S
   - neovlivňuje výrazně výsledek chování interpretu
2. **Způsob prohledávání stromu výpočtu:** výběr klauzule A' z programu P
   - je velmi důležitý, všechny klauzule totiž nevedou k úspěšnému řešení

Vztah k úplnosti:

1. Selekční pravidlo neovlivňuje úplnost
   - možno zvolit libovolné v rámci SLD rezoluce
2. Prohledávání stromu výpočtu do šířky nebo do hloubky

„Prozření" – automatický výběr správné klauzule

- vlastnost abstraktního interpretu, kterou ale reálné interprety nemají

Prohledávání do šířky

1. Vybereme všechny klauzule $A_i^{'}$, které je možno unifikovat s literálem A
   - nechť je těchto klauzulí q
2. Vytvoříme q kopií množiny S
3. V každé kopii redukujeme A jednou z klauzulí $A_i^{'}$.
   - aplikujeme příslušný nejobecnější unifikátor
4. V následujících krocích redukujeme všechny množiny S_i současně.
5. Výpočet ukončíme úspěchem, pokud se alespoň jedna z množin S_i stane prázdnou.

- Ekvivalence s abstraktnímu interpretem
  - pokud jeden interpret neuspěje, pak neuspěje i druhý
  - pokud jeden interpret uspěje, pak uspěje i druhý

Prohledávání do hloubky

1. Vybereme všechny klauzule A'$_i$, které je možno unifikovat s literálem A.
2. Všechny tyto klauzule zapíšeme na zásobník.
3. Redukci provedeme s klauzulí na vrcholu zásobníku.
4. Pokud v nějakém kroku nenajdeme vhodnou klauzuli A', vrátíme se k předchozímu stavu (tedy anulujeme aplikace posledního unifikátoru σ) a vybereme ze zásobníku další klauzuli.
5. Pokud je zásobník prázdný, končí výpočet neúspěchem.
6. Pokud naopak zredukujeme všechny literály v S, výpočet končí úspěchem.

- Není úplné, tj. nemusí najít všechna řešení
- Nižší paměťová náročnost než prohledávání do šířky
- Používá se v Prologu

Reprezentace objektů

- Beztypový jazyk
- Kontrola „typů" za běhu výpočtu
- Informace o struktuře součástí objektu

Typy objektů

- **Primitivní objekty:**
  - konstanta
  - číslo
  - volná proměnná
  - odkaz (reference)
- **Složené (strukturované) objekty:**
  - struktura
  - seznam

Reprezentace objektů II

Příznaky (tags):

Objekt	Příznak
volná proměnná	FREE
konstanta	CONST
celé číslo	INT
odkaz	REF
složený term	FUNCT

Obsah adresovatelného slova: **hodnota** a **příznak**.

Primitivní objekty uloženy přímo ve slově

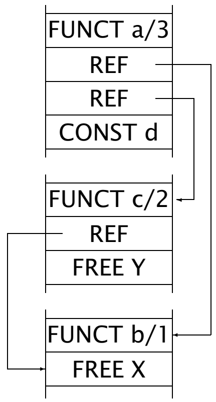
Složené objekty

- jsou instance termu ve zdrojovém textu, tzv. zdrojového termu
- zdrojový term bez proměnných $\Longrightarrow$ každá instanciace ekvivalentní zdrojovému termu
- zdrojový term s proměnnými $\Longrightarrow$ dvě instance se mohou lišit aktuálními hodnotami proměnných, jedinečnost zajišťuje kopírování struktur nebo sdílení struktur

Kopírování struktur

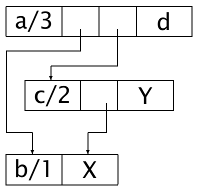
Příklad:

a(b(X),c(X,Y),d),



Kopírování struktur II

- Term F s aritou A reprezentován A+1 slovy:
  - funktor a arita v prvním slově
  - 2. slovo nese první argument (resp. odkaz na jeho hodnotu) ⋮
  - A+1 slovo nese hodnotu A-tého argumentu
- Reprezentace vychází z orientovaných acyklických grafů:



- Vykopírována každá instance ⇒ **kopírování struktur**
- Termy ukládány na **globální zásobník**

Sdílení struktur

- Vychází z myšlenky, že při reprezentaci je třeba řešit přítomnost proměnných
- Instance termu

  `< kostra_termu; rámec >`

  - `kostra_termu` je zdrojový term s očíslovanými proměnnými
  - rámec je vektor aktuálních hodnot těchto proměnných
    - i-tá položka nese hodnotu i-té proměnné v původním termu

Sdílení struktur II

Příklad:

`a(b(X),c(X,Y),d)`

reprezentuje

`< a(b($1),c($1,$2),d) ; [FREE, FREE] >`

kde symbolem `$i` označujeme i-tou proměnnou.

Implementace:

`< &kostra_termu; &rámec >` (& vrací adresu objektu)

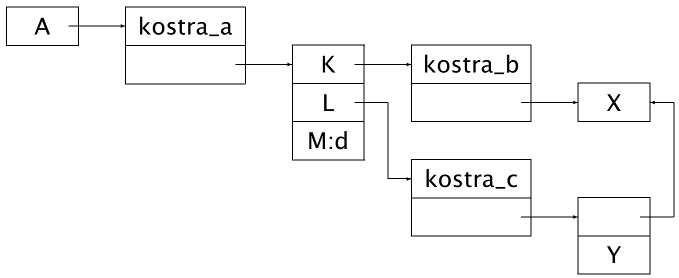
Všechny instance sdílí společnou `kostru_termu` ⇒ **sdílení struktur**

Srovnání: příklad

- Naivní srovnání: sdílení paměťově méně náročné
- Platí ale pouze pro rozsáhlé termy přítomné ve zdrojovém kódu
- Postupná tvorba termů:

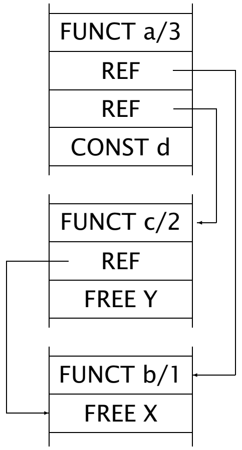
  `A = a(K,L,M), K = b(X), L = c(X,Y), M = d`

  - Sdílení termů:



Srovnání: příklad – pokračování

- Kopírování struktur: `A = a(K,L,M), K = b(X), L = c(X,Y), M = d`



tj. identické jako přímé vytvoření termu `a(b(X),c(X,Y),d)`

Srovnání II

- **Složitost algoritmů pro přístup k jednotlivým argumentům**
  - sdílení struktur: nutná víceúrovňová nepřímá adresace
  - kopírování struktur: bez problémů
  - jednodušší algoritmy usnadňují i optimalizace
- **Lokalita přístupů do paměti**
  - sdílení struktur: přístupy rozptýleny po paměti
  - kopírování struktur: lokalizované přístupy
  - při stránkování paměti – rozptýlení vyžaduje přístup k více stránkám
- Z praktického hlediska neexistuje mezi těmito přístupy zásadní rozdíl

Řízení výpočtu

- **Dopředný výpočet**
  - po úspěchu (úspěšná redukce)
    - jednotlivá volání procedur skončí úspěchem
  - klasické volání rekurzivních procedur
- **Zpětný výpočet (backtracking)**
  - po neúspěchu vyhodnocení literálu (neúspěšná redukce)
    - nepodaří se unifikace aktuálních a formálních parametrů hlavy
  - návrat do bodu, kde zůstala nevyzkoušená alternativa výpočtu
    - je nutná obnova původních hodnot jednotlivých proměnných
    - po nalezení místa s dosud nevyzkoušenou klauzulí pokračuje dále dopředný výpočet

Aktivační záznam

- Volání (=aktivace) procedury
- Aktivace **sdílí společný kód**, liší se obsahem **aktivačního záznamu**
- Aktivační záznam uložen na **lokálním zásobníku**
- Dopředný výpočet
  - stav výpočtu v okamžiku volání procedury
  - aktuální parametry
  - lokální proměnné
  - pomocné proměnné ('a la registry)
- Zpětný výpočet (backtracking)
  - hodnoty parametrů v okamžiku zavolání procedury
  - následující klauzule pro zpracování při neúspěchu

Aktivační záznam a roll-back

- Neúspěšná klauzule mohla nainstanciovat nelokální proměnné
  - `a(X) :- X = b(c,Y), Y = d.` `?- W = b(Z,e), a(W).` (viz instanciace Z)
- Při návratu je třeba obnovit (**roll-back**) původní hodnoty proměnných
- Využijeme vlastností logických proměnných
  - instanciovat lze pouze volnou proměnnou
  - jakmile proměnná získá hodnotu, nelze ji změnit jinak než návratem výpočtu

  ⟹ původní hodnoty všech proměnných odpovídají volné proměnné
- **Stopa** (trail): zásobník s adresami instanciovaných proměnných
  - ukazatel na aktuální vrchol zásobníku uchováván v aktivačním záznamu
  - při neúspěchu jsou hodnoty proměnných na stopě v úseku mezi aktuálním a uloženým vrcholem zásobníku změněny na „volná"
- **Globální zásobník**: pro uložení složených termů
  - ukazatel na aktuální vrchol zásobníku uchováván v aktivačním záznamu
  - při neúspěchu vrchol zásobníku snížen podle uschované hodnoty v aktivačním záznamu

Okolí a bod volby

Aktivační záznam úspěšně ukončené procedury nelze odstranit z lokálního zásobníku ⟹ **rozdělení aktivačního záznamu:**

- **okolí** (environment) – informace nutné pro dopředný běh programu
- **bod volby** (choice point) – informace nezbytné pro zotavení po neúspěchu
- ukládány na lokální zásobník
- samostatně provázány (odkaz na předchozí okolí resp. bod volby)

Důsledky:

- samostatná práce s každou částí aktivačního záznamu (optimalizace)
- alokace pouze okolí pro deterministické procedury
- možnost odstranění okolí po úspěšném vykonání (i nedeterministické) procedury (pokud okolí následuje po bodu volby dané procedury)
  - pokud je okolí na vrcholu zásobníku

Řez

- Prostředek pro ovlivnění běhu výpočtu programátorem
  ```
  a(X) :- b(X), !, c(X).      a(3).
  b(1).      b(2).
  c(1).      c(2).
  ```
- Řez: neovlivňuje dopředný výpočet, má vliv pouze na zpětný výpočet
- Odstranění alternativních větví výpočtu

  ⇒ odstranění odpovídajících bodů volby
  - tj. odstranění bodů volby mezi současným vrcholem zásobníku a bodem volby procedury, která řez vyvolala (včetně bodu volby procedury s řezem)

  ⇒ změna ukazatele na „nejmladší" bod volby

⇒ Vytváření deterministických procedur

⇒ Optimalizace využití zásobníku