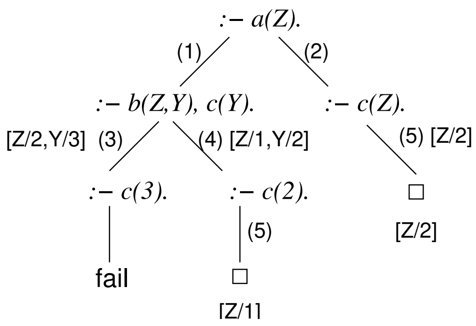
Rezoluce a logické programování (pokračování)

Příklad: SLD–strom a výsledná substituce

$:-a(Z).$

$a(X) :- b(X,Y), c(Y).$ (1)
$a(X) :- c(X).$ (2)
$b(2,3).$ (3)
$b(1,2).$ (4)
$c(2).$ (5)



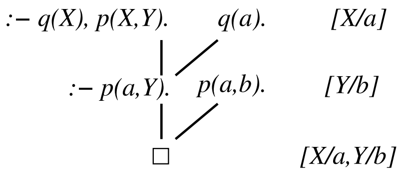
Cvičení:
$p(B) :- q(A,B), r(B).$
$p(A) :- q(A,A).$
$q(a,a).$
$q(a,b).$
$r(b).$

ve výsledné substituci jsou pouze proměnné z dotazu
výsledné substituce jsou $[Z/1]$ a $[Z/2]$
nezajímá mě substituce $[Y/2]$

Výsledná substituce (*answer substitution*)

q(a).
p(a,b).

:−q(X), p(X,Y).
X=a, Y=b



- Každý krok SLD-rezoluce vytváří novou unifikační substituci θ_i
  ⇒ potenciální instanciace proměnné ve vstupní cílové klauzuli
- **Výsledná substituce** (*answer substitution*)

  $\theta = \theta_0\theta_1 \cdots \theta_n$ složení unifikací

Význam SLD-rezolučního vyvrácení $P \cup \{G\}$

- Množina P programových klauzulí, cílová klauzule G
- **Dokazujeme nesplnitelnost**

  (1) $P \wedge (\forall \vec{X})(\neg G_1(\vec{X}) \vee \neg G_2(\vec{X}) \vee \cdots \vee \neg G_n(\vec{X}))$
  kde $G = \{\neg G_1, \neg G_2, \cdots, \neg G_n\}$ a $\vec{X}$ je vektor proměnných v G
  nesplnitelnost (1) je ekvivalentní tvrzení (2) a (3)

  (2) $P \vdash \neg G$

  (3) $P \vdash (\exists \vec{X})(G_1(\vec{X}) \wedge \cdots \wedge G_n(\vec{X}))$

  a jedná se tak o **důkaz existence vhodných objektů**, které na základě vlastností množiny P splňují konjunkci literálů v cílové klauzuli
- Důkaz nesplnitelnosti $P \cup \{G\}$ znamená **nalezení protipříkladu**
  ten pomocí SLD-stromu **konstruuje termy (odpověď)** splňující konjunkci v (3)

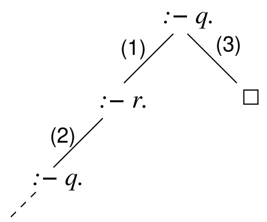
Výpočetní strategie

- **Korektní výpočetní strategie** prohledávání stromu výpočtu musí zaručit, že se každý (konečný) výsledek nalézt v konečném čase
- Korektní výpočetní strategie = **prohledávání stromu do šířky**
  - exponenciální paměťová náročnost
  - složité řídící struktury
- Použitelná výpočetní strategie = **prohledávání stromu do hloubky**
  - jednoduché řídící struktury (zásobník)
  - lineární paměťová náročnost
  - **není ale úplná**: nenalezne vyvrácení i když existuje
    - procházení nekonečné větve stromu výpočtu
      ⇒ na nekonečných stromech dojde k zacyklení
    - nedostaneme se tak na jiné existující úspěšné uzly

SLD-rezoluce v Prologu: úplnost

- **Prolog**: prohledávání stromu do hloubky
  ⇒ **neúplnost** použité výpočetní strategie
- Implementace SLD-rezoluce v Prologu
  - **není úplná**

logický program: $q :- r.$ (1)
$r :- q.$ (2)
$q.$ (3)
dotaz: $:- q.$



Test výskytu

- Kontrola, zda se proměnná vyskytuje v termu, kterým ji substituujeme
  - dotaz $:- a(B, B).$
  - logický program: $a(X, f(X)).$
  - by vedl k: $[B/X]$, $[X/f(X)]$
- Unifikátor pro $g(X_1, \ldots, X_n)$ a $g(f(X_0, X_0), f(X_1, X_1), \ldots, f(X_{n-1}, X_{n-1}))$

$$X_1 = f(X_0, X_0), \quad X_2 = f(X_1, X_1), \ldots, \quad X_n = f(X_{n-1}, X_{n-1})$$
$$X_2 = f(f(X_0, X_0), f(X_0, X_0)), \ldots$$

délka termu pro X_k exponenciálně narůstá

$\Longrightarrow$ **exponenciální složitost** na ověření kontroly výskytu

- Test výskytu se **při unifikaci v Prologu neprovádí**
- Důsledek: $? - X = f(X)$ uspěje s $X = f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(...))))))))))$

SLD-rezoluce v Prologu: korektnost

- Implementace SLD-rezoluce v Prologu nepoužívá při unifikaci test výskytu

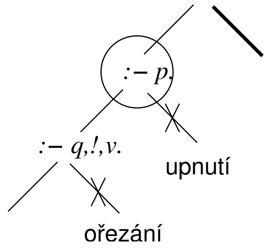
$\Longrightarrow$ **není korektní**

(1) $t(X) :- p(X, X).$ $:- t(X).$
$p(X, f(X)).$ $X = f(f(f(f(...)))))))))$ problém se projeví

(2) $t :- p(X, X).$ $:- t.$
$p(X, f(X)).$ yes dokazovací systém nehledá unifikátor pro X a $f(X)$

- Řešení: problém typu (2) převést na problém typu (1) ?
  - každá proměnná v hlavě klauzule se objeví i v těle, aby se vynutilo hledání unifikátoru (přidáme $X = X$ pro každou X, která se vyskytuje pouze v hlavě)
    $t :- p(X, X).$
    $p(X, f(X)) :- X = X.$
  - optimalizace v kompilátoru mohou způsobit opět odpověď „yes"

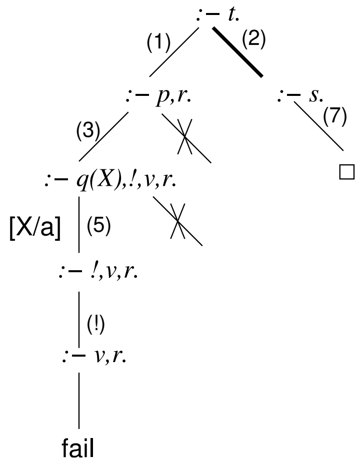
Řízení implementace: řez



- nemá ale žádnou deklarativní sémantiku
- místo toho **mění implementaci programu**
- $p :- q, !, v.$
- snažíme se splnit q
- řez se syntakticky chová jako kterýkoliv jiný literál
- pokud uspěji
  - ⇒ přeskočím řez a pokračuji jako by tam řez nebyl
- pokud ale **neuspěji (a tedy i při backtrackingu) a vracím se přes řez**
  - ⇒ **vracím se až na rodiče** $:-p.$ a zkouším další větev
  - ⇒ nezkouším tedy další možnosti, jak splnit p upnutí
  - ⇒ a nezkouším ani další možnosti, jak splnit q v SLD-stromu ořezání

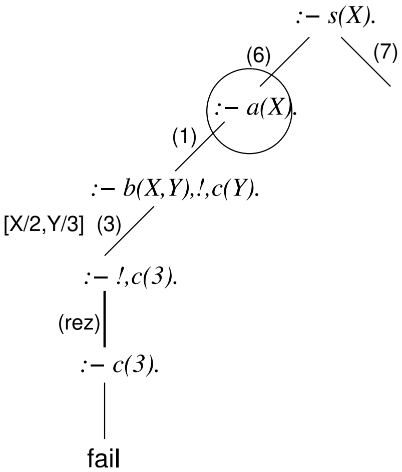
Příklad: řez

$t :- p, r.$	(1)
$t :- s.$	(2)
$p :- q(X), !, v.$	(3)
$p :- u, w.$	(4)
$q(a).$	(5)
$q(b).$	(6)
$s.$	(7)
$u.$	(8)



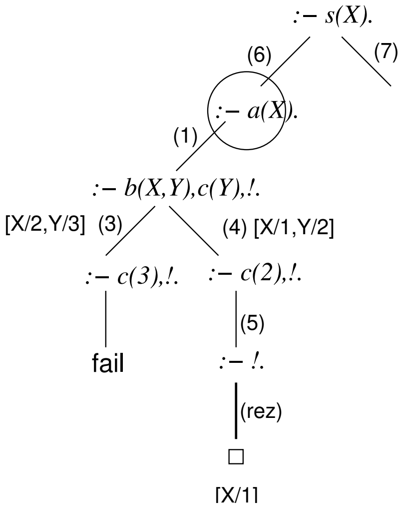
Příklad: řez II

$a(X) :- b(X,Y), !, c(Y).$	(1)
$a(X) :- c(X).$	(2)
$b(2,3).$	(3)
$b(1,2).$	(4)
$c(2).$	(5)
$s(X) :- a(X).$	(6)
$s(X) :- p(X).$	(7)
$p(B) :- q(A,B), r(B).$	(8)
$p(A) :- q(A,A).$	(9)
$q(a,a).$	(10)
$q(a,b).$	(11)
$r(b).$	(12)



Příklad: řez III

$a(X) :- b(X,Y), c(Y), !.$	(1)
$a(X) :- c(X).$	(2)
$b(2,3).$	(3)
$b(1,2).$	(4)
$c(2).$	(5)
$s(X) :- a(X).$	(6)
$s(X) :- p(X).$	(7)
$p(B) :- q(A,B), r(B).$	(8)
$p(A) :- q(A,A).$	(9)
$q(a,a).$	(10)
$q(a,b).$	(11)
$r(b).$	(12)



Operační a deklarativní semantika

Operační sémantika

- **Operační sémantikou** logického programu P rozumíme množinu $O(P)$ všech atomických formulí bez proměnných, které lze pro nějaký cíl $\mathcal{G}^1$ odvodit nějakým rezolučním důkazem ze vstupní množiny $P \cup \{\mathcal{G}\}$.

  [1]tímto výrazem jsou míněny všechny cíle, pro něž zmíněný rezoluční důkaz existuje.

- **Deklarativní sémantika** logického programu P ???

Opakování: interpretace

- **Interpretace** $\mathcal{I}$ jazyka $\mathcal{L}$ je dána univerzem $\mathcal{D}$ a zobrazením, které přiřadí konstantě c prvek $\mathcal{D}$, funkčnímu symbolu f/n n-ární operaci v $\mathcal{D}$ a predikátovému symbolu p/n n-ární relaci.
  - příklad: $F = \{\{f(a,b) = f(b,a)\}, \{f(f(a,a),b) = a\}\}$
    interpretace $\mathcal{I}_1$: $\mathcal{D} = \mathbb{Z}, a := 1, b := -1, f := " + "$
- Interpretace se nazývá **modelem** formule, je-li v ní tato formule pravdivá
  - interpretace množiny $\mathbb{N}$ s obvyklými operacemi je modelem formule (0 + s(0) = s(0))

Herbrandovy interpretace

- Omezení na obor skládající se ze **symbolických výrazů tvořených z predikátových a funkčních symbolů daného jazyka**
  - při zkoumání pravdivosti není nutné uvažovat modely nad všemi interpretacemi
- **Herbrandovo univerzum**: množina všech termů bez proměnných, které mohou být tvořeny funkčními symboly a konstantami daného jazyka
- **Herbrandova interpretace**: libovolná interpretace, která přiřazuje
  - proměnným prvky Herbrandova univerza
  - konstantám sebe samé
  - funkčním symbolům funkce, které symbolu f pro argumenty $t_1, \cdots, t_n$ přiřadí term f$(t_1, \cdots, t_n)$
  - predikátovým symbolům libovolnou funkci z Herbrand. univerza do pravdivostních hodnot
- **Herbrandův model** množiny uzavřených formulí $\mathcal{P}$:
  Herbrandova interpretace taková, že každá formule z $\mathcal{P}$ je v ní pravdivá.

Specifikace Herbrandova modelu

- Herbrandovy interpretace mají předdefinovaný význam funktorů a konstant
- Pro specifikaci Herbrandovy interpretace tedy stačí zadat relace pro každý predikátový symbol
- Příklad: Herbrandova interpretace a Herbrandův model množiny formulí

```
lichy(s(0)).                   % (1)
lichy(s(s(X))) :- lichy(X).   % (2)
```

  - $\mathcal{I}_1 = \emptyset$ — není model (1)
  - $\mathcal{I}_2 = \{lichy(s(0))\}$ — není model (2)
  - $\mathcal{I}_3 = \{lichy(s(0)), lichy(s(s(s(0))))\}$ — není model (2)
  - $\mathcal{I}_4 = \{lichy(s^n(0)) | n \in \{1, 3, 5, 7, \ldots\}\}$ — Herbrandův model (1) i (2)
  - $\mathcal{I}_5 = \{lichy(s^n(0)) | n \in \mathbb{N}\}$ — Herbrandův model (1) i (2)

Příklad: Herbrandovy interpretace

```
rodic(a,b).
rodic(b,c).
predek(X,Y) :- rodic(X,Y).
predek(X,Z) :- rodic(X,Y), predek(Y,Z).
```

$\mathcal{I}_1 = \{rodic(a,b), rodic(b,c), predek(a,b), predek(b,c), predek(a,c)\}$

$\mathcal{I}_2 = \{rodic(a,b), rodic(b,c),$
$predek(a,b), predek(b,c), predek(a,c), predek(a,a)\}$

$\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$ jsou Herbrandovy modely klauzulí

Cvičení: Napište minimální Herbrandův model pro následující logický program.

```
muz(petr). muz(pavel). zena(olga). zena(jitka).
pary(X,Y) :– zena(X), muz(Y).
```

Uveďte další model tohoto programu, který není minimální.

Deklarativní a operační sémantika

- Je-li S množina programových klauzulí a M libovolná množina Herbrandových modelů S, pak **průnik těchto modelů** je opět Herbrandův model množiny S.
- **Důsledek:**
  Existuje **nejmenší Herbrandův model** množiny S, který značíme $M(S)$.
- **Deklarativní sémantikou** logického programu P rozumíme jeho minimální Herbrandův model $M(P)$.
- Připomenutí: **Operační sémantikou** logického programu P rozumíme množinu $O(P)$ všech atomických formulí bez proměnných, které lze pro nějaký cíl $\mathcal{G}$[1] odvodit nějakým rezolučním důkazem ze vstupní množiny $P \cup \{\mathcal{G}\}$.
  [1]tímto výrazem jsou míněny všechny cíle, pro něž zmíněný rezoluční důkaz existuje.
- Pro libovolný logický program P platí $M(P) = O(P)$