Rezoluce v predikátové logice 1.řádu

Rezoluce

- rezoluční princip: z $F \vee A$, $G \vee \neg A$ odvodit $F \vee G$
- dokazovací metoda používaná
  - v Prologu
  - ve většině systémů pro automatické dokazování

Rezoluce

- rezoluční princip: z $F \lor A$, $G \lor \neg A$ odvodit $F \lor G$
- dokazovací metoda používaná
  - v Prologu
  - ve většině systémů pro automatické dokazování
- procedura pro **vyvrácení**
  - hledáme důkaz pro negaci formule
  - snažíme se dokázat, že negace formule je nesplnitelná
    $\Longrightarrow$ formule je vždy pravdivá

Formule

- **literál** l
  - **pozitivní literál** = atomická formule $p(t_1, \cdots, t_n)$
  - **negativní literál** = negace atomické formule $\neg p(t_1, \cdots, t_n)$

Formule

- **literál** l
  - **pozitivní literál** = atomická formule $p(t_1, \cdots, t_n)$
  - **negativní literál** = negace atomické formule $\neg p(t_1, \cdots, t_n)$
- **klauzule** C = konečná množina literálů reprezentující jejich disjunkci
  - příklad: $p(X) \vee q(a, f) \vee \neg p(Y)$ notace: $\{p(X), q(a, f), \neg p(Y)\}$
  - **klauzule je pravdivá** $\Longleftrightarrow$ je pravdivý alespoň jeden z jejích literálů
  - **prázdná klauzule** se značí $\square$ a je vždy nepravdivá (neexistuje v ní pravdivý literál)

Formule

- **literál** l
  - **pozitivní literál** = atomická formule $p(t_1, \cdots, t_n)$
  - **negativní literál** = negace atomické formule $\neg p(t_1, \cdots, t_n)$
- **klauzule** C = konečná množina literálů reprezentující jejich disjunkci
  - příklad: $p(X) \vee q(a, f) \vee \neg p(Y)$ notace: $\{p(X), q(a, f), \neg p(Y)\}$
  - **klauzule je pravdivá** $\Longleftrightarrow$ je pravdivý alespoň jeden z jejích literálů
  - **prázdná klauzule** se značí $\square$ a je vždy nepravdivá (neexistuje v ní pravdivý literál)
- **formule** F = množina klauzulí reprezentující jejich konjunkci
  - formule je v tzv. konjuktivní normální formě (konjunkce disjunkcí)
  - příklad: $(p \vee q) \wedge (\neg p) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$ notace: $\{\{p, q\}, \{\neg p\}, \{p, \neg q, r\}\}$

Formule

- **literál** l
  - **pozitivní literál** = atomická formule $p(t_1, \cdots, t_n)$
  - **negativní literál** = negace atomické formule $\neg p(t_1, \cdots, t_n)$
- **klauzule** C = konečná množina literálů reprezentující jejich disjunkci
  - příklad: $p(X) \vee q(a, f) \vee \neg p(Y)$ notace: $\{p(X), q(a, f), \neg p(Y)\}$
  - **klauzule je pravdivá** $\Longleftrightarrow$ je pravdivý alespoň jeden z jejích literálů
  - **prázdná klauzule** se značí $\square$ a je vždy nepravdivá (neexistuje v ní pravdivý literál)
- **formule** F = množina klauzulí reprezentující jejich konjunkci
  - formule je v tzv. konjuktivní normální formě (konjunkce disjunkcí)
  - příklad: $(p \vee q) \wedge (\neg p) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$ notace: $\{\{p, q\}, \{\neg p\}, \{p, \neg q, r\}\}$
  - **formule je pravdivá** $\Longleftrightarrow$ všechny klauzule jsou pravdivé
  - prázdná formule je vždy pravdivá (neexistuje klauzule, která by byla nepravdivá)

Formule

- **literál** l
  - **pozitivní literál** = atomická formule $p(t_1, \cdots, t_n)$
  - **negativní literál** = negace atomické formule $\neg p(t_1, \cdots, t_n)$
- **klauzule** C = konečná množina literálů reprezentující jejich disjunkci
  - příklad: $p(X) \vee q(a, f) \vee \neg p(Y)$ notace: $\{p(X), q(a, f), \neg p(Y)\}$
  - **klauzule je pravdivá** $\iff$ je pravdivý alespoň jeden z jejích literálů
  - **prázdná klauzule** se značí $\square$ a je vždy nepravdivá (neexistuje v ní pravdivý literál)
- **formule** F = množina klauzulí reprezentující jejich konjunkci
  - formule je v tzv. konjuktivní normální formě (konjunkce disjunkcí)
  - příklad: $(p \vee q) \wedge (\neg p) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$ notace: $\{\{p, q\}, \{\neg p\}, \{p, \neg q, r\}\}$
  - **formule je pravdivá** $\iff$ všechny klauzule jsou pravdivé
  - prázdná formule je vždy pravdivá (neexistuje klauzule, která by byla nepravdivá)
- **množinová notace:** literál je prvek klauzule, klauzule je prvek formule, ...

Splnitelnost

- [Opakování:] Interpretace $\mathcal{I}$ jazyka $\mathcal{L}$ je dána univerzem $\mathcal{D}$ a zobrazením, které přiřadí konstantě c prvek $\mathcal{D}$, funkčnímu symbolu f/n n-ární operaci v $\mathcal{D}$ a predikátovému symbolu p/n n-ární relaci.
  - příklad: $F = \{\{f(a,b) = f(b,a)\}, \{f(f(a,a),b) = a\}\}$
    interpretace $\mathcal{I}_1$: $\mathcal{D} = \mathbb{Z}, a := 1, b := -1, f := "+"$

Splnitelnost

- [Opakování:] Interpretace $\mathcal{I}$ jazyka $\mathcal{L}$ je dána univerzem $\mathcal{D}$ a zobrazením, které přiřadí konstantě c prvek $\mathcal{D}$, funkčnímu symbolu f/n n-ární operaci v $\mathcal{D}$ a predikátovému symbolu p/n n-ární relaci.
  - příklad: $F = \{\{f(a,b) = f(b,a)\}, \{f(f(a,a),b) = a\}\}$
    interpretace $\mathcal{I}_1$: $\mathcal{D} = \mathbb{Z}, a := 1, b := -1, f := " + "$
- Formule je **splnitelná**, existuje-li interpretace, pro kterou je pravdivá
  - formule je konjunkce klauzulí, tj. všechny klauzule musí být v dané interpretaci pravdivé
  - příklad (pokrač.): F je splnitelná (je pravdivá v $\mathcal{I}_1$)

Splnitelnost

- [Opakování:] Interpretace $\mathcal{I}$ jazyka $\mathcal{L}$ je dána univerzem $\mathcal{D}$ a zobrazením, které přiřadí konstantě c prvek $\mathcal{D}$, funkčnímu symbolu f/n n-ární operaci v $\mathcal{D}$ a predikátovému symbolu p/n n-ární relaci.
  - příklad: $F = \{\{f(a,b) = f(b,a)\}, \{f(f(a,a),b) = a\}\}$
    interpretace $\mathcal{I}_1$: $\mathcal{D} = \mathbb{Z}, a := 1, b := -1, f := "+"$
- Formule je **splnitelná**, existuje-li interpretace, pro kterou je pravdivá
  - formule je konjunkce klauzulí, tj. všechny klauzule musí být v dané interpretaci pravdivé
  - příklad (pokrač.): F je splnitelná (je pravdivá v $\mathcal{I}_1$)
- Formule je **nesplnitelná**, neexistuje-li interpretace, pro kterou je pravdivá
  - tj. formule je ve všech iterpretacích nepravdivá
  - tj. neexistuje interpretace, ve které by byly všechny klauzule pravdivé
  - příklad: $G = \{\{p(b)\}, \{p(a)\}, \{\neg p(a)\}\}$ je nesplnitelná
    ($\{p(a)\}$ a $\{\neg p(a)\}$ nemohou být zároveň pravdivé)

Rezoluční princip ve výrokové logice

- **Rezoluční princip** = pravidlo, které umožňuje odvodit z klauzulí $C_1 \cup \{l\}$ a $\{\neg l\} \cup C_2$ klauzuli $C_1 \cup C_2$

$$\frac{C_1 \cup \{l\} \qquad\qquad \{\neg l\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2}$$

- $C_1 \cup C_2$ se nazývá **rezolventou** původních klauzulí

Rezoluční princip ve výrokové logice

- **Rezoluční princip** = pravidlo, které umožňuje odvodit z klauzulí $C_1 \cup \{l\}$ a $\{\neg l\} \cup C_2$ klauzuli $C_1 \cup C_2$

$$\frac{C_1 \cup \{l\} \qquad \{\neg l\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2}$$

- $C_1 \cup C_2$ se nazývá **rezolventou** původních klauzulí
- příklad:

$$\frac{\{p, r\} \qquad \{\neg r, s\}}{\{p, s\}} \qquad \frac{(p \vee r) \wedge (\neg r \vee s)}{p \vee s}$$

Rezoluční princip ve výrokové logice

- **Rezoluční princip** = pravidlo, které umožňuje odvodit z klauzulí $C_1 \cup \{l\}$ a $\{\neg l\} \cup C_2$ klauzuli $C_1 \cup C_2$

$$\frac{C_1 \cup \{l\} \qquad\qquad \{\neg l\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2}$$

- $C_1 \cup C_2$ se nazývá **rezolventou** původních klauzulí
- příklad:

$$\frac{\{p, r\} \qquad\qquad \{\neg r, s\}}{\{p, s\}} \qquad\qquad \frac{(p \vee r) \wedge (\neg r \vee s)}{p \vee s}$$

obě klauzule $(p \vee r)$ a $(\neg r \vee s)$ musí být pravdivé

protože r nestačí k pravdivosti obou klauzulí,

musí být pravdivé p (pokud je pravdivé $\neg r$) nebo s (pokud je pravdivé r),

tedy platí klauzule $p \vee s$

Rezoluční důkaz

- **rezoluční důkaz klauzule C z formule F** je konečná posloupnost $C_1, \ldots, C_n = C$ klauzulí taková, že C_i je buď klauzule z F nebo rezolventa C_j, C_k pro $k, j < i$.

Rezoluční důkaz

- **rezoluční důkaz klauzule C z formule F** je konečná posloupnost $C_1, \ldots, C_n = C$ klauzulí taková, že C_i je buď klauzule z F nebo rezolventa C_j, C_k pro $k, j < i$.
- příklad: rezoluční důkaz $\{p\}$ z formule $F = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}\}$

Rezoluční důkaz

- **rezoluční důkaz klauzule C z formule F** je konečná posloupnost $C_1, \dots, C_n = C$ klauzulí taková, že C_i je buď klauzule z F nebo rezolventa C_j, C_k pro $k, j < i$.
- příklad: rezoluční důkaz $\{p\}$ z formule $F = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}\}$

  $C_1 = \{p, r\}$ klauzule z F

Rezoluční důkaz

- **rezoluční důkaz klauzule C z formule F** je konečná posloupnost $C_1, \ldots, C_n = C$ klauzulí taková, že C_i je buď klauzule z F nebo rezolventa C_j, C_k pro $k, j < i$.
- příklad: rezoluční důkaz $\{p\}$ z formule $F = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}\}$

  $C_1 = \{p, r\}$ klauzule z F

  $C_2 = \{q, \neg r\}$ klauzule z F

Rezoluční důkaz

- **rezoluční důkaz klauzule C z formule F** je konečná posloupnost $C_1, \ldots, C_n = C$ klauzulí taková, že C_i je buď klauzule z F nebo rezolventa C_j, C_k pro $k, j < i$.
- příklad: rezoluční důkaz $\{p\}$ z formule $F = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}\}$

  $C_1 = \{p, r\}$ klauzule z F

  $C_2 = \{q, \neg r\}$ klauzule z F

  $C_3 = \{p, q\}$ rezolventa C_1 a C_2

Rezoluční důkaz

- **rezoluční důkaz klauzule C z formule F** je konečná posloupnost $C_1, \ldots, C_n = C$ klauzulí taková, že C_i je buď klauzule z F nebo rezolventa C_j, C_k pro $k, j < i$.
- příklad: rezoluční důkaz $\{p\}$ z formule $F = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}\}$

  $C_1 = \{p, r\}$ klauzule z F

  $C_2 = \{q, \neg r\}$ klauzule z F

  $C_3 = \{p, q\}$ rezolventa C_1 a C_2

  $C_4 = \{\neg q\}$ klauzule z F

Rezoluční důkaz

- **rezoluční důkaz klauzule C z formule F** je konečná posloupnost $C_1, \ldots, C_n = C$ klauzulí taková, že C_i je buď klauzule z F nebo rezolventa C_j, C_k pro $k, j < i$.
- příklad: rezoluční důkaz $\{p\}$ z formule $F = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}\}$

  $C_1 = \{p, r\}$ klauzule z F

  $C_2 = \{q, \neg r\}$ klauzule z F

  $C_3 = \{p, q\}$ rezolventa C_1 a C_2

  $C_4 = \{\neg q\}$ klauzule z F

  $C_5 = \{p\} = C$ rezolventa C_3 a C_4

Rezoluční vyvrácení

- důkaz pravdivosti formule F spočívá v **demonstraci nesplnitelnosti $\neg F$**
  - $\neg F$ nesplnitelná $\Rightarrow$ $\neg F$ je nepravdivá ve všech interpretacích $\Rightarrow$ F je vždy pravdivá

Rezoluční vyvrácení

- důkaz pravdivosti formule F spočívá v **demonstraci nesplnitelnosti $\neg F$**
  - $\neg F$ nesplnitelná $\Rightarrow$ $\neg F$ je nepravdivá ve všech interpretacích $\Rightarrow$ F je vždy pravdivá
- začneme-li z klauzulí reprezentujících $\neg F$, musíme postupným uplatňováním rezolučního principu **dospět k prázdné klauzuli $\square$**
- Příklad:

$$F \ldots \neg a \vee a$$

Rezoluční vyvrácení

- důkaz pravdivosti formule F spočívá v **demonstraci nesplnitelnosti $\neg F$**
  - $\neg F$ nesplnitelná $\Rightarrow$ $\neg F$ je nepravdivá ve všech interpretacích $\Rightarrow$ F je vždy pravdivá
- začneme-li z klauzulí reprezentujících $\neg F$, musíme postupným uplatňováním rezolučního principu **dospět k prázdné klauzuli $\square$**
- Příklad:

$$F \ldots \neg a \vee a$$

$$\neg F \ldots a \wedge \neg a$$

$$\neg F \ldots \{\{a\}, \{\neg a\}\}$$

Rezoluční vyvrácení

- důkaz pravdivosti formule F spočívá v **demonstraci nesplnitelnosti** $\neg F$
  - $\neg F$ nesplnitelná $\Rightarrow$ $\neg F$ je nepravdivá ve všech interpretacích $\Rightarrow$ F je vždy pravdivá
- začneme-li z klauzulí reprezentujících $\neg F$, musíme postupným uplatňováním rezolučního principu **dospět k prázdné klauzuli** $\Box$
- Příklad:

  $F \ldots \neg a \vee a$

  $\neg F \ldots a \wedge \neg a$

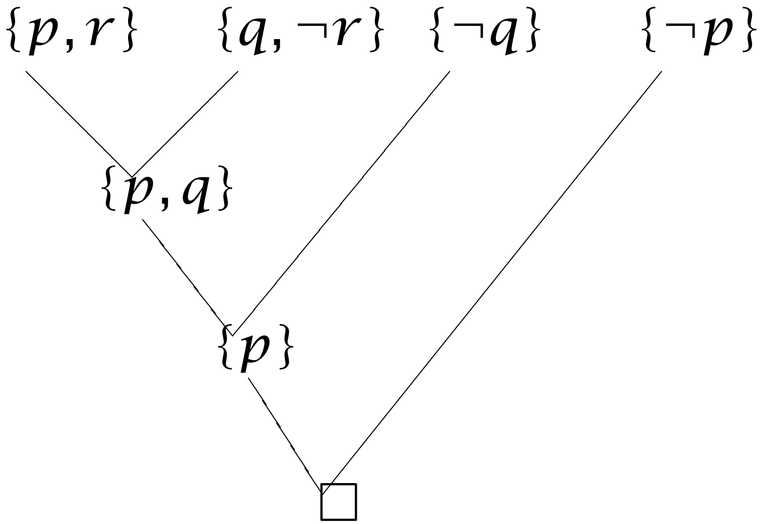
  $\neg F \ldots \{\{a\}, \{\neg a\}\}$

  $C_1 = \{a\}, C_2 = \{\neg a\}$

  rezolventa C_1 a C_2 je $\Box$, tj. F je vždy pravdivá
- rezoluční důkaz $\Box$ z formule G se nazývá **rezoluční vyvrácení formule** G
  - a tedy G je nepravdivá ve všech interpretacích, tj. G je nesplnitelná

Strom rezolučního důkazu

- **strom rezolučního důkazu** klauzule C z formule F je binární strom:
  - kořen je označen klauzulí C,
  - listy jsou označeny klauzulemi z F a
  - každý uzel, který není listem,
    - má bezprostředními potomky označené klauzulemi C_1 a C_2
    - je označen rezolventou klauzulí C_1 a C_2
- příklad: $F = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}, \{\neg p\}\}$ $\qquad C = \square$

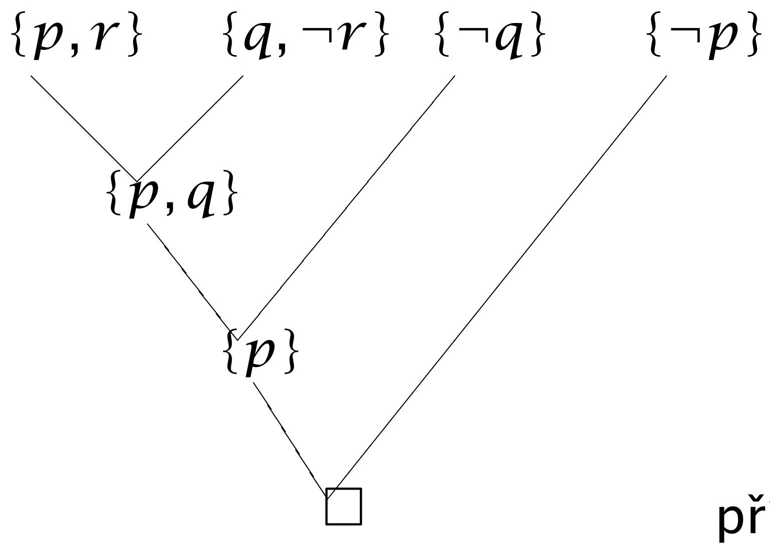


strom rezolučního vyvrácení

(rezoluční důkaz $\square$ z F)

Strom rezolučního důkazu

- **strom rezolučního důkazu** klauzule C z formule F je binární strom:
  - kořen je označen klauzulí C,
  - listy jsou označeny klauzulemi z F a
  - každý uzel, který není listem,
    - má bezprostředními potomky označené klauzulemi C_1 a C_2
    - je označen rezolventou klauzulí C_1 a C_2
- příklad: $F = \{\{p,r\},\{q,\neg r\},\{\neg q\},\{\neg p\}\}$ $\qquad C = \square$



strom rezolučního vyvrácení

(rezoluční důkaz $\square$ z F)

příklad: $\{\{p,r\},\{q,\neg r\},\{\neg q\},\{\neg p,t\},\{\neg s\},\{s,\neg t\}\}$