

# Rezoluce

## Rezoluce v predikátové logice 1.řádu

- rezoluční princip: z  $F \vee A, G \vee \neg A$  odvodit  $F \vee G$
- dokazovací metoda používaná
  - v Prologu
  - ve většině systémů pro automatické dokazování
- procedura pro **vyvrácení**
  - hledáme důkaz pro negaci formule
  - snažíme se dokázat, že negace formule je nesplnitelná  
 $\implies$  formule je vždy pravdivá

## Formule

- **literál**  $l$ 
  - **pozitivní literál** = atomická formule  $p(t_1, \dots, t_n)$
  - **negativní literál** = negace atomické formule  $\neg p(t_1, \dots, t_n)$
- **klauzule**  $C$  = konečná množina literálů reprezentující jejich disjunkci
  - příklad:  $p(X) \vee q(a, f) \vee \neg p(Y)$     notace:  $\{p(X), q(a, f), \neg p(Y)\}$
  - **klauzule je pravdivá**  $\iff$  je pravdivý alespoň jeden z jejich literálů
  - **prázdná klauzule** se značí  $\square$  a je vždy nepravdivá (neexistuje v ní pravdivý literál)
- **formule**  $F$  = množina klauzulí reprezentující jejich konjunkci
  - formule je v tzv. konjunktivní normální formě (konjunkce disjunkcí)
  - příklad:  $(p \vee q) \wedge (\neg p) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$     notace:  $\{\{p, q\}, \{\neg p\}, \{p, \neg q, r\}\}$
  - **formule je pravdivá**  $\iff$  všechny klauzule jsou pravdivé
  - prázdná formule je vždy pravdivá (neexistuje klauzule, která by byla nepravdivá)
- **množinová notace**: literál je prvek klauzule, klauzule je prvek formule, ...

## Splnitelnost

- **[Opakování:]** Interpretace  $\mathcal{I}$  jazyka  $\mathcal{L}$  je dána univerzem  $\mathcal{D}$  a zobrazením, které přiřadí konstantě  $c$  prvek  $\mathcal{D}$ , funkčnímu symbolu  $f/n$   $n$ -ární operaci v  $\mathcal{D}$  a predikátovému symbolu  $p/n$   $n$ -ární relaci.
  - příklad:  $F = \{\{f(a, b) = f(b, a)\}, \{f(f(a, a), b) = a\}\}$   
interpretace  $\mathcal{I}_1$ :  $\mathcal{D} = \mathbb{Z}, a := 1, b := -1, f := "+"$
- **Formule je splnitelná**, existuje-li interpretace, pro kterou je pravdivá
  - formule je konjunkce klauzulí, tj. všechny klauzule musí být v dané interpretaci pravdivé
  - příklad (pokrač.):  $F$  je splnitelná (je pravdivá v  $\mathcal{I}_1$ )
- **Formule je nesplnitelná**, neexistuje-li interpretace, pro kterou je pravdivá
  - tj. formule je ve všech interpretacích nepravdivá
  - tj. neexistuje interpretace, ve které by byly všechny klauzule pravdivé
  - příklad:  $G = \{\{p(b)\}, \{p(a)\}, \{\neg p(a)\}\}$  je nesplnitelná  
( $\{p(a)\}$  a  $\{\neg p(a)\}$  nemohou být zároveň pravdivé)

## Rezoluční princip ve výrokové logice

- **Rezoluční princip** = pravidlo, které umožňuje odvodit z klauzulí  $C_1 \cup \{l\}$  a  $\{\neg l\} \cup C_2$  klauzuli  $C_1 \cup C_2$

$$\frac{C_1 \cup \{l\} \quad \{\neg l\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2}$$

- $C_1 \cup C_2$  se nazývá **rezolventou** původních klauzulí

- příklad:

$$\frac{\{p, r\} \quad \{\neg r, s\}}{\{p, s\}} \quad \frac{(p \vee r) \wedge (\neg r \vee s)}{p \vee s}$$

obě klauzule  $(p \vee r)$  a  $(\neg r \vee s)$  musí být pravdivé protože  $r$  nestačí k pravdivosti obou klauzulí, musí být pravdivé  $p$  (pokud je pravdivé  $\neg r$ ) nebo  $s$  (pokud je pravdivé  $r$ ), tedy platí klauzule  $p \vee s$

## Rezoluční důkaz

- **rezoluční důkaz klauzule  $C$  z formule  $F$**  je konečná posloupnost  $C_1, \dots, C_n = C$  klauzulí taková, že  $C_i$  je buď klauzule z  $F$  nebo rezolventa  $C_j, C_k$  pro  $k, j < i$ .

- příklad: rezoluční důkaz  $\{p\}$  z formule  $F = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}\}$

$C_1 = \{p, r\}$  klauzule z  $F$

$C_2 = \{q, \neg r\}$  klauzule z  $F$

$C_3 = \{p, q\}$  rezolventa  $C_1$  a  $C_2$

$C_4 = \{\neg q\}$  klauzule z  $F$

$C_5 = \{p\} = C$  rezolventa  $C_3$  a  $C_4$

## Rezoluční vyvrácení

- důkaz pravdivosti formule  $F$  spočívá v **demonstraci nesplnitelnosti  $\neg F$** 
  - $\neg F$  nesplnitelná  $\Rightarrow \neg F$  je nepravdivá ve všech interpretacích  $\Rightarrow F$  je vždy pravdivá
- začneme-li z klauzulí reprezentujících  $\neg F$ , musíme postupným uplatňováním rezolučního principu **dospět k prázdné klauzuli  $\square$**

- Příklad:

$F \dots \neg a \vee a$

$\neg F \dots a \wedge \neg a$

$\neg F \dots \{\{a\}, \{\neg a\}\}$

$C_1 = \{a\}, C_2 = \{\neg a\}$

rezolventa  $C_1$  a  $C_2$  je  $\square$ , tj.  $F$  je vždy pravdivá

- rezoluční důkaz  $\square$  z formule  $G$  se nazývá **rezoluční vyvrácení formule  $G$**

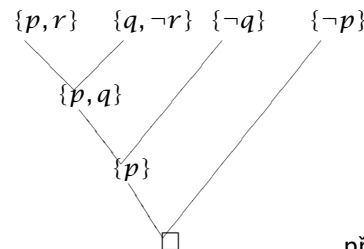
- a tedy  $G$  je nepravdivá ve všech interpretacích, tj.  $G$  je nesplnitelná

## Strom rezolučního důkazu

- **strom rezolučního důkazu** klauzule  $C$  z formule  $F$  je binární strom:

- kořen je označen klauzulí  $C$ ,
- listy jsou označeny klauzulemi z  $F$  a
- každý uzel, který není listem,
  - má bezprostředními potomky označené klauzulemi  $C_1$  a  $C_2$
  - je označen rezolventou klauzulí  $C_1$  a  $C_2$

- příklad:  $F = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}, \{\neg p\}\}$   $C = \square$



**strom rezolučního vyvrácení**  
(rezoluční důkaz  $\square$  z  $F$ )

příklad:  $\{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}, \{\neg p, t\}, \{\neg s\}, \{s, \neg t\}\}$