IB112 Základy matematiky

Základy naivní teorie množin, relace, zobrazení, číselné obory

Jan Strejček

Obsah

- *Množiny*
  - základní operace
  - Russellův paradox
- *Relace*
  - skládání relací
  - ekvivalence a rozklad množiny
  - uspořádání, Hasseův diagram
- *Zobrazení*
  - injekce, surjekce, bijekce
- *Číselné obory* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ *a* $\mathbb{R}$
- *Mohutnost*
  - spočetnost a nespočetnost
  - Cantorova věta
  - princip inkluze a exkluze

Množiny

Množina

- **Množina** je základní pojem matematiky.
- Teorii množin vybudoval *Georg Cantor* (1845–1918) v roce 1872.
- Naivní pohled: *Množina je soubor prvků*.

Zápis

- $a \in A$ značí *a je prvkem množiny A*.
- $a \notin A$ značí *a není prvkem množiny A*.
- $\emptyset$ značí *prázdnou množinu*.
- $\{a, b, c\}$ zapisuje množinu obsahující právě prvky a, b, c.

Množina

- Množina může být prvkem množiny.
- Ve skutečnosti v teorii množin neexistuje nic jiného než množiny, tedy každý prvek a množiny A je opět množina.

Příklady množin

- $\{a, b\}$
- $\{a\}, \{\{a\}\}, \{\{\{a\}\}\}, \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$
- $\{x \mid x \text{ je přirozené číslo dělitelné } 3\}$
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ - množina všech *přirozených čísel*
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ - množina všech *celých čísel*
- $\mathbb{Q}$ - množina všech *racionálních čísel*
- $\mathbb{R}$ - množina všech *reálných čísel*

Russellův paradox

- Proč je uvedená definice množiny označena jako naivní?
- Protože existují soubory prvků, které nelze považovat za množinu. Jeden takový soubor popsal *Bertrandem Russellem* (1872–1970) v roce 1901.

Russellův paradox

Množina X se nazývá *normální*, jestliže $X \notin X$.
Nechť N je množina všech normálních množin.
Je-li N normální, pak $N \in N$ a tedy N není normální.
Není-li N normální, pak $N \notin N$ a tedy N je normální.

V seriózní teorii množin se za množiny považují pouze soubory prvků, které vznikly z prázdné množiny pomocí sady axiomů.

Vztahy mezi množinami

Definice (Podmnožina)

Množina A je podmnožina množiny B, psáno $A \subseteq B$, jestliže každý prvek z A je i prvkem z B.

- Pokud $A \subseteq B$, pak také říkáme, že B je *nadmnožinou* A.
- Pro každou množinu A platí $\emptyset \subseteq A$ a $A \subseteq A$.
- Vztah $\subseteq$ nazýváme také *inkluze*.

Definice (Rovnost)

Množina A je rovna množině B, psáno $A = B$, pokud platí $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$.

- Množiny jsou shodné, pokud mají stejné prvky.
- A je vlastní pomnožinou B, psáno $A \subset B$, pokud $A \subseteq B$ a $A \neq B$.

Operace na množinách

- *sjednocení*: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\}$
- *průnik*: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ a } x \in B\}$
- *rozdíl*: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ a } x \notin B\}$
- *symetrický rozdíl*: $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- Nechť $A \subseteq M$. *Doplňek A (vzhledem k nosné množině M)* je množina $\overline{A} = M \setminus A$.

- Doplňek se nazývá také *komplement*.
- Množiny A a B jsou *disjunktní*, pokud $A \cap B = \emptyset$. V opačném případě se množiny nazývají *incidentní*.

Vlastnosti množinových operací

Průnik a sjednocení jsou

- *komutativní* $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$
- *asociativní* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- *idempotentní* $A \cap A = A$, $A \cup A = A$

Dále platí *distributivní zákony*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Vlastnosti množinových operací

U doplňku velmi záleží na nosné množině M:

- $A = \{a\}$, $M = \{a\}$: $\overline{A} = \emptyset$
- $A = \{a\}$, $M = \{a, b\}$: $\overline{A} = \{b\}$
- $A = \{a\}$, $M = \{a, b, c\}$: $\overline{A} = \{b, c\}$

Pro doplněk dále platí

- $\overline{\overline{A}} = A$
- *De Morganovy zákony* $\quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

De Morganovy zákony lze dále zobecnit

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

Zobecnění průniku a sjednocení

Definice (Zobecněný průnik a sjednocení)

Nechť A_i je množina pro každé $i \in I \neq \emptyset$. Definujeme

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ pro každé } i \in I\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ pro nějaké } i \in I\}.$$

- Příklad: $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{2i\} = \{2, 4, 6, \ldots\}$
- Dále se definuje $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$.
- Je-li dána nosná množina M, lze definovat i $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = M$.

Uspořádaná dvojice

Definice (Uspořádaná dvojice)

Uspořádanou dvojici (a, b) *definujeme jako množinu* $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

- Platí $(a, b) = (c, d)$ právě když $a = c$ a $b = d$.
- Jaká množina je dvojice (a, a)?

Kartézský součin

Definice (Kartézský součin)

Kartézský součin množin A, B je množina

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

- Příklad: $\{a, b\} \times \{c, d\} = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$
- Pro každou množinu A platí $\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$.
- Obecně neplatí $A \times B = B \times A$ (komutativita).
- Obecně neplatí $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ (asociativita).

Uspořádaná k-tice

Definice (Uspořádaná k-tice)

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujeme uspořádanou k-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ induktivně:

- $(a_1) = a_1$
- $(a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}) = ((a_1, \ldots, a_i), a_{i+1})$

- Platí $(a_1, \ldots, a_k) = (b_1, \ldots, b_k)$ právě když $a_i = b_i$ pro všechna $1 \leq i \leq k$.

Kartézský součin více množin

Definice (Kartézský součin více množin)

Nechť $k \in \mathbb{N}$. Kartézská součin množin $A_1, \ldots, A_k$ je množina

$$A_1 \times \ldots \times A_k = \{(a_1, \ldots, a_k) \mid a_i \in A_i \text{ pro každé } 1 \leq i \leq k\}.$$

- Pro $k = 2$ se uvedená definice shoduje s původní definicí kartézského součinu.
- Lze definovat i mocniny: $A^3 = A \times A \times A$.
- Definujeme $A^0 = \{\emptyset\}$.

Potenční množina

Definice (Potenční množina)

Potenční množninu množiny A definujeme jako množinu všech podmnožin množiny A, t.j.

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

- Někdy se používá značení 2^A místo $\mathcal{P}(A)$
- Příklad: $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Relace

Relace

Definice (Relace)

Nechť $n \in \mathbb{N}$. n-ární relace (nebo relace arity n nebo jen relace) R je podmnožina kartézského součinu

$$R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n.$$

- Je-li $A_1 = \ldots = A_n = A$, mluvíme o *n-ární relaci na množině A*.
- *Unární* relace je relace arity 1 $R \subseteq A$, tj. podmnožina.
- Dále se budeme zabývat jen binárními relacemi.

Binární relace, definiční obor, obor hodnot

- *Binární* relace (mezi množinami A, B) je relace $R \subseteq A \times B$.
- *Definiční obor* relace $R \subseteq A \times B$ je množina

$$\{a \in A \mid \text{existuje } b \in B \text{ tak, že } (a, b) \in R\}.$$

- *Obor hodnot* relace $R \subseteq A \times B$ je množina

$$\{b \in B \mid \text{existuje } a \in A \text{ tak, že } (a, b) \in R\}.$$

- Alternativní notace $(a, b) \in R$: aRb nebo $R(a, b)$

Identita a inverzní relace

Definice

Identita *na množině* A *je binární relace*

$$id_A = \{(a, a) \mid a \in A\} \subseteq A \times A.$$

Definice (Inverzní relace)

Inverzní relací *k relaci* $R \subseteq A \times B$ *rozumíme relaci*

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \subseteq B \times A.$$

- Platí $(R^{-1})^{-1} = R$.

Skládání relací

Definice (Skládání relací)

Nechť $R \subseteq A \times B$ a $S \subseteq B \times C$ jsou relace. Jejich složením rozumíme relaci

$$S \circ R = \{(a, c) \mid \text{ existuje } b \in B \text{ splňující } (a, b) \in R \text{ a } (b, c) \in S\}.$$

- $S \circ R$ se čte jako "S *po* R".
- Platí $S \circ R \subseteq A \times C$.
- Skládání relací je asociativní: $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$

Vlastnosti relací

Definice (Vlastnosti relací)

Relace $R \subseteq A \times A$ na množině A se nazývá

- *reflexivní*, pokud platí $(a, a) \in R$ pro každé $a \in A$,
- *symetrická*, pokud $(a, b) \in R$ implikuje $(b, a) \in R$,
- *tranzitivní*, pokud $(a, b), (b, c) \in R$ implikuje $(a, c) \in R$,
- *antisymetrická*, pokud $(a, b), (b, a) \in R$ implikuje $a = b$,
- *úplná*, pokud pro každé $a, b \in A$ platí $(a, b) \in R$ nebo $(b, a) \in R$,
- *univerzální*, pokud pro každé $a, b \in A$ platí $(a, b), (b, a) \in R$.

Příklady

Příklad

- Uvažte binární relaci R na množine $A = \{1, 2\}$:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

- Jaké vlastnosti má tato relace?
- Změní se odpověď, uvážíme-li tutéž relaci na množině $A' = \{1, 2, 3\}$?

Příklad

- Uvažte binární relaci inkluze ($\subseteq$) na množině $\mathcal{P}(\{a, b\})$.
- Vypište všechny prvky této binární relace.
- Jaké vlastnosti má tato relace?

Ekvivalence

Definice (Ekvivalence)

Relace $R \subseteq A \times A$ se nazývá ekvivalence, jestliže R je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Definice

Buď R ekvivalence na A. Pro $a \in A$ položíme $R_a = \{b \in A \mid (a, b) \in R\}$. Množinu R_a nazýváme třída relace ekvivalence R určená prvkem a.

Příklad

- Uvažte relaci R na $\mathbb{N}$: $(x, y) \in R \iff x \bmod 4 = y \bmod 4$.
- Kolik existuje různých tříd ekvivalence?

Vlastnosti tříd ekvivalence

Věta

Buď R ekvivalence na A a $a \in A$. Pak platí:

1. $a \in R_a$
2. $R_a = R_b \iff (a, b) \in R$
3. $R_a \cap R_b \neq \emptyset \iff R_a = R_b$

Důkaz

1. Plyne z reflexivity.

□

Vlastnosti tříd ekvivalence

Věta

Buď R ekvivalence na A a $a \in A$. Pak platí:

1. $a \in R_a$
2. $R_a = R_b \iff (a, b) \in R$
3. $R_a \cap R_b \neq \emptyset \iff R_a = R_b$

Důkaz

2. Nechť $R_a = R_b$. Jelikož $a \in R_a = R_b$, platí $(b, a) \in R$. Ze symetrie pak plyne i $(a, b) \in R$.

   Nechť $(a, b) \in R$. Pak pro každé $c \in R_b$ platí $(b, c) \in R$. Z tranzitivity plyne $(a, c) \in R$ a tudíž $c \in R_a$. Tedy $R_b \subseteq R_a$. Ze symetrie R pak plyne i $R_a \subseteq R_b$.

□

Vlastnosti tříd ekvivalence

Věta

Buď R ekvivalence na A a $a \in A$. Pak platí:

1. $a \in R_a$
2. $R_a = R_b \iff (a, b) \in R$
3. $R_a \cap R_b \neq \emptyset \iff R_a = R_b$

Důkaz

3. Nechť $R_a \cap R_b \neq \emptyset$. Pak existuje $c \in R_a \cap R_b$ a proto $(a, c), (b, c) \in R$. Ze symetrie a tranzitivity plyne $(a, b) \in R$ a tedy $R_a = R_b$.

   Implikace "$\Longleftarrow$" je zřejmá.

□

Rozklad

Definice (Rozklad)

Rozklad $\mathcal{R}$ *množiny* A *je množina* $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$ *splňující*

- *pro každé* $X \in \mathcal{R}$ *platí* $X \neq \emptyset$,
- $\bigcup_{X \in \mathcal{R}} X = A$,
- *pro každé* $X_1, X_2 \in \mathcal{R}$ *platí* $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset \implies X_1 = X_2$.

$X \in \mathcal{R}$ *se nazývá třída rozkladu* $\mathcal{R}$.

- $\{A\}$ je nejhrubší rozklad množiny A (má pouze 1 třídu).
- $\{\{x\} \mid x \in A\}$ je nejjemnější rozklad.
- Ukážeme, že rozklady přesně odpovídají relacím ekvivalence.

Ekvivalence příslušná rozkladu

Věta

Nechť $\mathcal{R}$ je rozklad množiny A. Pak relace

$$R_{\mathcal{R}} = \{(a, b) \mid \text{existuje } X \in \mathcal{R} \text{ splňující } a, b \in X\}$$

je ekvivalence na A.

- $R_{\mathcal{R}}$ se nazývá *ekvivalence příslušná rozkladu $\mathcal{R}$*.
- Ekvivalence příslušná nejjemnějšímu rozkladu je identita.
- Ekvivalence příslušná nejhrubšímu rozkladu je univerzální relace.

Rozklad příslušný ekvivalenci

Věta

Nechť R je ekvivalence na množině $A \neq \emptyset$. Pak množina

$$A/R = \{R_a \mid a \in A\}$$

je rozkladem množiny A.

- A/R se nazývá *faktorová množina* relace ekvivalence R na A.
- A/R se také nazývá *rozklad příslušný ekvivalenci R*.

Vztah ekvivalencí a rozkladů

Věta

Nechť A je neprázdná množina.

- *Je-li R ekvivalence na A, pak $R = R_{A/R}$.*
- *Je-li $\mathcal{R}$ rozklad množiny A, pak $\mathcal{R} = A/R_{\mathcal{R}}$.*

Uspořádání

Definice (Uspořádání)

Relace $R \subseteq A \times A$ se nazývá (částečné) uspořádání na A, jestliže R je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Je-li relace R navíc úplná, nazývá se lineární uspořádání nebo totální uspořádání na A.

- Uspořádání obvykle značíme $\leq$.
- $a < b$ je zkrácený zápis pro $a \leq b$ a $a \neq b$.
- Je-li $a \leq b$ nebo $b \leq a$, pak řekneme, že a, b jsou *srovnetelné*.
- V opačném případě jsou a, b *nesrovnatelné*.
- Příklad uspořádání na $\mathbb{N}$: $a \preceq b$ pokud a je dělitel b.

Uspořádaná množina

Definice

Dvojice $(A, \leq)$ se nazývá uspořádaná množina, pokud $\leq$ je uspořádání na A.

Dvojice $(A, \leq)$ se nazývá lineárně uspořádaná množina, pokud $\leq$ je lineární uspořádání na A.

Příklady

- Lineárně uspořádané množiny: $(\mathbb{N}, \leq), (\mathbb{Z}, \leq), (\mathbb{Q}, \leq), (\mathbb{R}, \leq), \ldots$ ($\leq$ značí přirozené uspořádání na příslušném číselném oboru)
- Uspořádaná množina $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$
- Uspořádaná množina $(\mathbb{N}, \{(1, i), (i, i) \mid i \in \mathbb{N}\})$

Příklad

Příklad

- Uvažme množinu $\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, 10\})$ s relací $\preceq$ definovanou pro $X, Y \in \mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, 10\})$ jako

  $X \preceq Y$ pokud X má nejvýše tolik prvků jako Y.

- Je $(\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, 10\}), \preceq)$ uspořádaná množina?

Hasseův diagram

- Grafická reprezentace konečných uspořádaných množin.
- Použil *Henry Gustav Vogt* v roce 1895, zpopularizoval *Helmut Hasse* (1898–1979)

Hasseův diagram reprezentující uspořádanou množinu $(A, \leq)$ je graf, kde

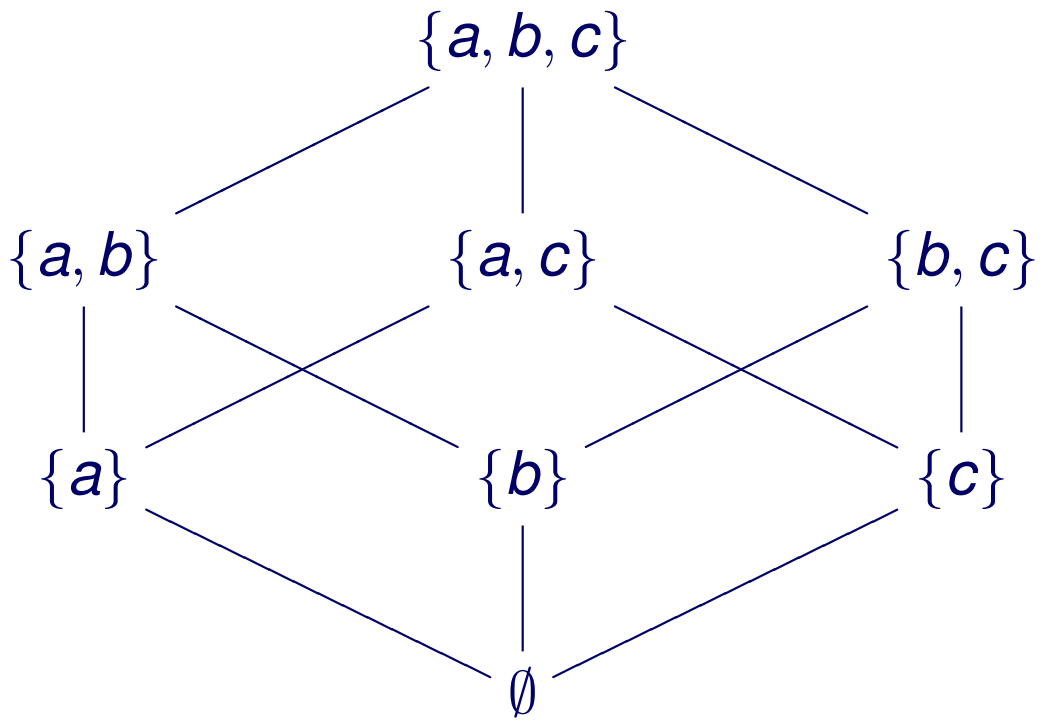
- vrcholy jsou prvky A
- z a vede hrana nahoru do b, pokud $a < b$, $a \neq b$ a neexistuje c splňující $a < c < b$.

Hasseův diagram: příklady

Potenční množina množiny $\{a, b, c\}$ s relací inkluze (podmnožina), t.j. $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$.

Hasseův diagram: příklady

Potenční množina množiny $\{a, b, c\}$ s relací inkluze (podmnožina), t.j. $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$.

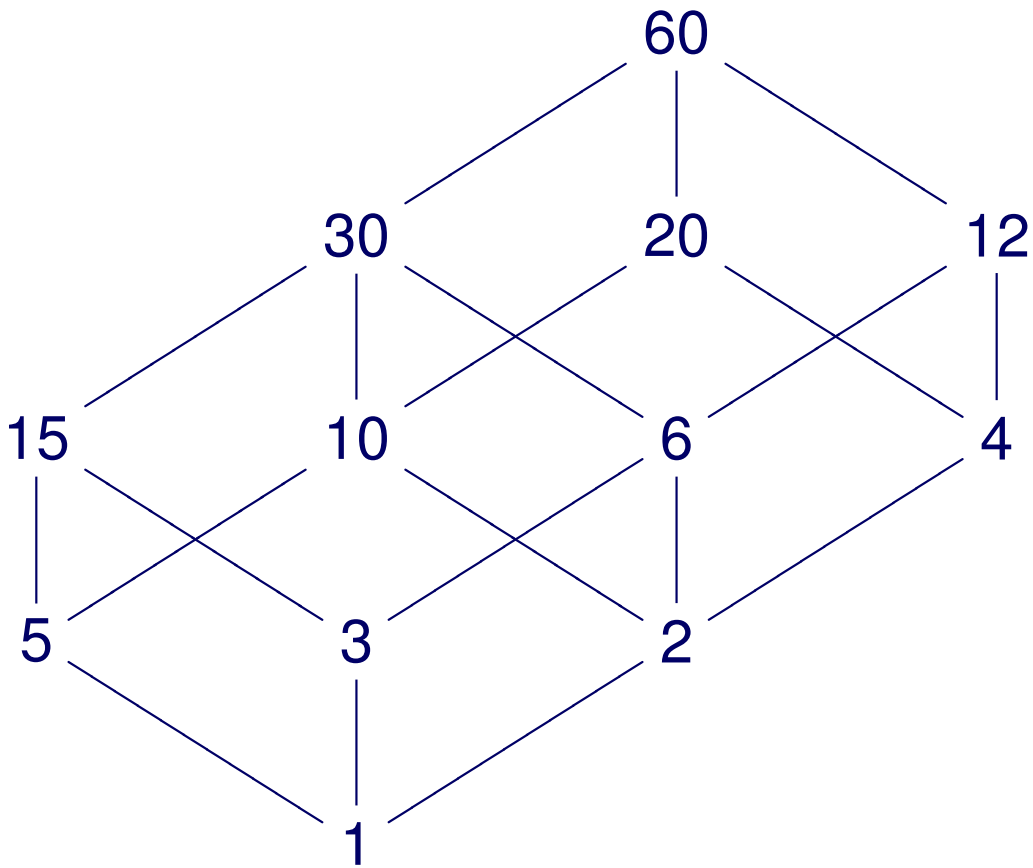


Hasseův diagram: příklady

Množina všech dělitelů čísla 60 uspořádaných relací dělitelnost.

Hasseův diagram: příklady

Množina všech dělitelů čísla 60 uspořádaných relací dělitelnost.



Největší, nejmenší, maximální a minimální prvek

Definice

Nechť $(A, \leq)$ je uspořádané množina. Prvek $a \in A$ je

- *největší, jestliže pro všechna $b \in A$ platí $b \leq a$,*
- *nejmenší, jestliže pro všechna $b \in A$ platí $a \leq b$,*
- *maximální, jestliže pro všechna $b \in A$ platí $a \leq b \implies a = b$,*
- *minimální, jestliže pro všechna $b \in A$ platí $b \leq a \implies a = b$.*

- Existuje-li v množině největší prvek, pak je jediný. Navíc je i maximální a neexistuje jiný maximální prvek.
- Existuje-li v lineárně uspořádané množině maximální prvek, pak je to i prvek největší.
- Analogie platí i pro nejmenší a minimální prvky.

- Existují usp. množiny bez největšího a bez maximálního prvků? A co množiny bez největšího prvku, ale s maximálními prvky?

Zobrazení

Zobrazení

Definice (Zobrazení)

Zobrazení množiny A do množiny B, psáno $f : A \to B$ je relace $f \subseteq A \times B$ taková, že pro každé $a \in A$ existuje právě jedno $b \in B$ splňující $(a, b) \in f$.

Množinu všech zobrazení z A do B značíme B^A.

- Místo $(a, b) \in f$ obvykle píšeme $f(a) = b$, a je *vzor*, b *obraz*.
- Někdy se místo "právě jedno" požaduje "nejvýše jedno". Tím se definuje *částečné zobrazení* neboli zobrazení *z* A do B.
  Pokud pro $a \in A$ neexistuje $b \in B$ splňující $(a, b) \in f$, říkáme, ža zobrazení f není pro a definováno a píšeme $f(a) = \perp$.
- Chceme-li zdůraznit, že zobrazení není částečné, nazveme ho *totální*.
- Zobrazení se také nazývá *funkce*.

Injekce a surjekce

Definice (Injekce a surjekce)

Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá

- *prosté (injektivní, injekce), jestliže $f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$,*
- *zobrazení A na množinu B (surjektivní, surjekce), jestliže pro každé $b \in B$ existuje $a \in A$ splňující $f(a) = b$,*

Příklady

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $f(x) = 2x$ je prosté, ale není surjektivní.
- $f : \mathbb{N} \to \{1\}$, kde $f(x) = 1$ je surjektivní, ale není prosté.

Bijekce

Definice (Injekce a surjekce)

Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá bijektivní nebo bijekce, jestliže je současně prosté i surjektivní.

Množiny A, B nazveme izomorfní, jestliže existuje bijekce $f : A \to B$, píšeme $A \cong B$.

Příklady

- $f : \{1, 2, 3\} \to \{3, 4, 5\}$, kde $f(x) = x + 2$ je bijekce.
- Množiny $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ jsou izomorfní.

Poznámky

- Pojmy *definiční obor*, *obor hodnot* zůstávají stejné jako u relací.
- Inverzní relace k zobrazení nemusí být zobrazení.
- Inverzní relace k bijekci je bijekce.
- Skládání zobrazení se definuje stejně jako skládání relací.
- Identita na A je bijekce.

Vlastnosti bijekcí

Věta

Nechť $f : A \to B$ a $g : B \to C$ jsou bijekce. Platí

- $f^{-1} \circ f = id_A$ *a* $f \circ f^{-1} = id_B$,
- $(f^{-1})^{-1} = f$,
- $g \circ f$ *je bijekce a* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$,
- $f \circ id_A = f = id_B \circ f$.

Číselné obory $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$

Konstrukce přirozených čísel

Definice (Přirozená čísla)

Nechť 0 *značí prázdnou množinu* $\emptyset$*. Přirozená čísla lze definovat induktivně jako množiny:*

$$n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

Značíme $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ *a* $\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$*.*

$$\begin{aligned}
0 &= \emptyset \\
1 &= \{\emptyset\} \\
2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
4 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Uspořádání a operace na přirozených číslech

Množina odpovídající n má právě n prvků. Toho využijeme při definici uspořádání a operací.

- *uspořádání*

$$n \leq m \iff \text{existuje injekce } f : n \to m$$

- *sčítání*

$$n + m = k \text{ pro } k \cong (\{0\} \times n) \cup (\{1\} \times m)$$

- *násobení*

$$n \cdot m = k \text{ pro } k \cong (n \times m)$$

Konstrukce celých čísel

Definice (Celá čísla)

Nechť $\sim$ je relace na množině $\omega \times \omega$ definovaná následovně:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = c + b$$

Relace $\sim$ je ekvivalence. $\mathbb{Z}$ je rozklad $(\omega \times \omega)/\sim$, tedy celé číslo je třída rozkladu $(\omega \times \omega)/\sim$.

- Třídu ekvivalence obsahující (a, b) označíme $\overline{(a, b)}$.
- Třída $\overline{(a, b)}$ reprezentuje celé číslo $a - b$.
- Nezavisí na výběru reprezentanta:
  $(a, b) \sim (c, d) \implies a - b = c - d$

Uspořádání a operace na celých číslech

Pomocí reprezentantů definujeme uspořádání a operace nad $\mathbb{Z}$:

- *uspořádání*

$$\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)} \iff a+d \leq b+c$$

- *sčítání*

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c,b+d)}$$

- *násobení*

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(ac+bd,ad+bc)}$$

Měli bychom dokázat, že v uvedené definice nezávisí na výběru reprezentantů, např. pro sčítání platí:

$$\left.\begin{array}{l}(a,b) \sim (a',b') \\ (c,d) \sim (c',d')\end{array}\right\} \implies (a+c,b+d) \sim (a'+c',b'+d')$$

Konstrukce racionálních čísel

Definice (Racionální čísla)

Nechť $\sim$ *je relace na množině* $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ *definovaná následovně:*

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = cb$$

Relace $\sim$ *je ekvivalence.* $\mathbb{Q}$ *je rozklad* $(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/\sim$*, tedy racionální číslo je třída rozkladu* $(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/\sim$.

- Třídu ekvivalence obsahující (a, b) označíme $\overline{(a, b)}$.
- Třída $\overline{(a, b)}$ reprezentuje racionální číslo $\frac{a}{b}$.
- Nezavisí na výběru reprezentanta: $(a, b) \sim (c, d) \implies \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Uspořádání a operace na racionálních číslech

Pomocí reprezentantů definujeme i uspořádání a operace nad $\mathbb{Q}$:

- *uspořádání*

$$\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)} \iff ad \leq bc$$

- *sčítání*

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(ad+bc,bd)}$$

- *násobení*

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(ac,bd)}$$

Měli bychom dokázat, že v uvedené definice nezávisí na výběru reprezentantů, např. pro sčítání platí:

$$\left.\begin{array}{l}(a,b) \sim (a',b') \\ (c,d) \sim (c',d')\end{array}\right\} \implies (ad+bc,bd) \sim (a'd'+b'c',b'd')$$

Konstrukce reálných čísel

Definice

Řez v množině $\mathbb{Q}$ je dvojice (X, Y), kde $X, Y \subseteq \mathbb{Q}$ splňují:

1. $X \cap Y = \emptyset$
2. $X \cup Y = \mathbb{Q}$
3. *pro všechna $x \in X$ a $y \in Y$ platí $x < y$.*

Řezy v $\mathbb{Q}$ jsou jednoho z následujících tří typů:

- *mezera: X nemá největší prvek a Y nemá nejmenší prvek*
- *dedekindovský řez 1.druhu: X má největší prvek a Y nemá nejmenší prvek*
- *dedekindovský řez 2.druhu: X nemá největší prvek a Y má nejmenší prvek*

$\mathbb{R}$ je množina všech řezů, které jsou mezerami nebo dedekindovskými řezy 1. druhu.

Vlastnosti reálných čísel

- Mezery odpovídají *iracionálním číslům*, dedekindovské řezy 1. druhu racionálním číslům.
- Neexistují řezy (X, Y), kde X má největší prvek a Y nejmenší prvek. (Protože $\mathbb{Q}$ je hustá množina.)
- Řez (X, Y) reprezentuje nejmenší číslo $r \in \mathbb{R}$ splňující $x \leq r$ pro všechna $x \in X$.
- Kupříkladu π odpovídá mezeře

$$(\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \pi\}, \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \pi\}).$$

Uspořádání a operace na reálných číslech

- *uspořádání*

$$(X, Y) \leq (X', Y') \iff X \subseteq X'$$

- *sčítání*

$$(X, Y) + (X', Y') = (X + X', Y + Y')$$

- *násobení*

$$(X, Y) \cdot (X', Y') = (X \cdot X', Y \cdot Y')$$

kde

$$\begin{aligned} X + Y &= \{x + y \mid x \in X, y \in Y\} \\ X \cdot Y &= \{x \cdot y \mid x \in X, y \in Y\} \end{aligned}$$

Mohutnost

Mohutnost množiny

Definice

Jestliže existuje bijekce mezi množinami A, B (tj. $A \cong B$), pak také říkámé, že A a B mají stejnou mohutnost.

Definice (Konečnost)

Množina A je konečná, jestliže má stejnou mohutnost jako některá z množin $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, kde $n \in \omega$. V opačném případě je množina nekonečná.

- Mohutností množiny A rozumíme "počet prvků v množině A" a značíme $|A|$.
- Pro konečné množiny platí $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
- Množiny $\mathbb{Z}$ a $2\mathbb{Z} = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ mají stejnou mohutnost neboť zobrazení $f : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ dané předpisem $f(x) = 2x$ je bijekce.

Spočetné množiny

Definice (Spočetnost)

Množina, která má stejnou mohutnost jako ω se nazývá spočetná. Množina, která je konečná nebo spočetná se nazývá nejvýše spočetná. Ostatní množiny jsou nespočetné.

Někdy se jako spočetná množina označuje každá množina, která má stejnou mohutnost jako libovolná podmnožina ω, tedy i každá konečná množina je spočetná.

Hrátky s nekonečnem: spočetný hotel.

Spočetné množiny

Věta

Množiny $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ jsou spočetné.

Důkaz

Existují bijekce $f : \omega \to \mathbb{N}$ a $g : \omega \to \mathbb{Z}$ dané předpisem:

$$f(x) = x + 1 \qquad g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{je-li } n \text{ sudé} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{je-li } n \text{ liché} \end{cases}$$ □

Spočetnost racionálních čísel

Věta

Množina $\mathbb{Q}$ je spočetná.

Důkaz

Stačí dokázat pro kladná rac. čísla $\mathbb{Q}^+$ (dále dle důkazu pro $\mathbb{Z}$). Reprezentujme $\mathbb{Q}^+$ nekonečnou tabulkou: v i-tém řádku jsou seřazeny všechny vykrácené zlomky s čitatelem i.

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\cdots$
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Čísla seřadíme do posloupnosti po diagonálách: $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 3, \ldots$. Nyní stačí číslu z ω přiřadit číslo z $\mathbb{Q}^+$ na příslušné pozici. Tím je popsána bijekce a $\mathbb{Q}^+$ je spočetná. □

Cantorova věta

Věta (Cantorova věta)

Množiny A a $\mathcal{P}(A)$ nikdy nemají stejnou mohutnost.

Důkaz

Nechť A a $\mathcal{P}(A)$ mají stejnou mohutnost, tj. nechť $f : A \to \mathcal{P}(A)$ je bijekce. Položme

$$B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}.$$

Jelikož $B \subseteq A$ a f je bijekce, musí existovat $b \in A$ takové, že $f(b) = B$. Pak platí

$$b \in B \iff b \notin B$$

a to je spor. □

Tedy existují množiny, které jsou nespočetné: např. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. (Tato množina zjevně není konečná.)

Mohutnost reálných čísel

Věta

Množina $\mathbb{R}$ je nespočetná.

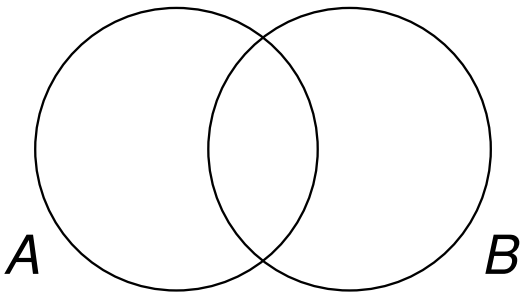
Důkaz

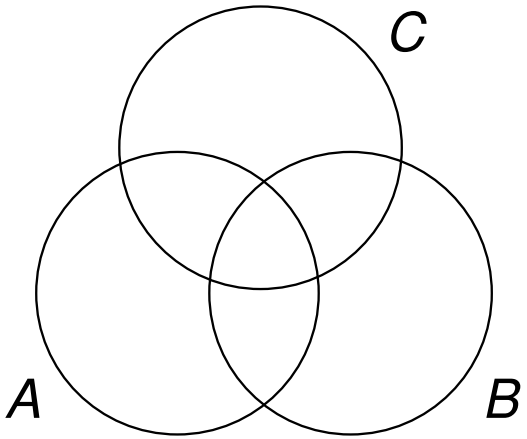
Ukážeme, že i interval reálných čísel [0,1] je nespočetný. Předpokládáme, že existuje bijekce $f : \omega \to [0, 1]$. Následující (nekonečná) tabulka tedy obsahuje všechna čísla z [0,1].

$$\begin{array}{rcccccc} f(0) & = & 0, & 5 & 1 & 0 & \dots \\ f(1) & = & 0, & 4 & 1 & 3 & \dots \\ f(2) & = & 0, & 8 & 2 & 4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \hline r & = & 0, & 6 & 2 & 5 & \dots \end{array}$$

Zkonstruujeme číslo r, které se bude lišit od každého čísla v tabulce (alespoň v číslici na diagonále). Jelikož r je číslo z [0,1] a není v tabulce, dostáváme spor. □

Princip inkluze a exkluze





Věta (Princip inkluze a exkluze)

Pro libovolné konečné množiny A, B, C platí:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Princip inkluze a exkluze

- Slouží pro praktické výpočty počtu prvků v množině či v průniku.
- Lze zobecnit pro libovolný počet konečných množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2.,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$